Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Степаньянц, Вклад полей материи в функцию Гелл-Манна–Лоу для $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 3, 441–460

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5989>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:52:42

© 2007 г.

К. В. Степаньянц*

ВКЛАД ПОЛЕЙ МАТЕРИИ В ФУНКЦИЮ ГЕЛЛ-МАННА-ЛОУ ДЛЯ $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА-МИЛЛСА, РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ВЫСШИМИ КОВАРИАНТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

С помощью уравнений Швингера-Дайсона и тождеств Славнова-Тейлора получен вклад полей материи в функцию Гелл-Манна-Лоу для $N = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными. Обсуждается возможное отличие результата от соответствующего вклада в точной β -функции Новикова-Шифмана-Вайнштейна-Захарова.

Ключевые слова: суперсимметрия, высшие ковариантные производные, диаграммы Фейнмана, уравнения Швингера-Дайсона, тождества Славнова-Тейлора.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что суперсимметрия существенно улучшает ультрафиолетовое поведение теории. В частности, даже в теориях с нерасширенной суперсимметрией можно сделать предположение о виде β -функции во всех порядках теории возмущений. Впервые оно было сделано в работе [1] на основе исследования структуры инстантонных вкладов. В случае $N = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса с полями материи такая β -функция (которая называется точной β -функцией Новикова-Шифмана-Вайнштейна-Захарова (НШВЗ)) имеет вид

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2 [3C_2 - 2C(R)(1 - \gamma(\alpha))]}{2\pi(1 - C_2\alpha/(2\pi))}, \quad (1)$$

где $\gamma(\alpha)$ – аномальная размерность суперполя материи. Заметим, что здесь приведен результат для теории с дираковскими фермионами, каждому из которых соответствуют два киральных суперполя. Через R обозначено представление, в котором лежит одно из суперполей материи, а величина $C(R)$ определяется формулой

$$\text{tr}(T^a T^b) = C(R)\delta^{ab}. \quad (2)$$

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: stepan@phys.msu.ru

Для получения такой β -функции наиболее удобно использовать регуляризацию высшими производными [2]. Тогда перенормировка оператора $W_a C^{ab} W_b$ оказывается чисто однопетлевой, что было подтверждено явными вычислениями в двух- [3], трех- [4] и частично в четырехпетлевом приближении [5], а функция Гелл-Манна–Лоу при этом совпадает с точной β -функцией НШВЗ. (Заметим, что функция Гелл-Манна–Лоу в силу своего определения не зависит от конкретного выбора схемы перенормировки.)

Исследование $N = 1$ суперсимметричной электродинамики точно во всех порядках теории возмущений было выполнено в работе [6]. В этой работе было показано, что при использовании уравнений Швингера–Дайсона и тождеств Уорда можно получить точную β -функцию, однако помимо обычного НШВЗ-результата имеется еще некоторая добавка. Явные вычисления свидетельствуют, что в низших порядках она всегда равна нулю, что позволяет предположить существование некоторого нового тождества для определенных функций Грина. Доказательство этого тождества во всех петлях оказывается весьма нетривиальным. Дело в том, что оно не сводится к тождеству Уорда, а его доказательство с помощью суммирования диаграмм [7] оказывается весьма сложным. Заметим, что в работе [7] это доказательство было дано только для ограниченного класса диаграмм в безмассовом случае. Тем не менее для остальных диаграмм новое тождество, по-видимому, также справедливо, о чем свидетельствуют, например, явные четырехпетлевые вычисления [5].

Таким образом, уже в электродинамике получение точной β -функции является достаточно нетривиальной задачей. В случае теории Янга–Миллса при использовании регуляризации размерной редукцией точная β -функция согласуется с результатами явных вычислений в двухпетлевом приближении. Однако в трехпетлевом приближении [8]–[10] были выявлены разногласия между предсказаниями, следующими из точной β -функции, и конкретными вычислениями, сделанными в $\overline{\text{MS}}$ -схеме для β -функции, определенной как производная перенормированной константы связи. При этом было показано [9], что эти разногласия могут быть устранены специальным выбором схемы перенормировки, причем сама возможность выбора такой схемы, как оказалось, является крайне нетривиальной [11].

В данной работе делается попытка исследовать вклад полей материи в функцию Гелл-Манна–Лоу в неабелевых суперсимметричных калибровочных теориях точно во всех порядках теории возмущений с помощью уравнений Швингера–Дайсона и тождеств Славнова–Тейлора. Функция Гелл-Манна–Лоу определяется по асимптотике двухточечной функции Грина калибровочного поля в пределе больших импульсов. Поэтому полученные результаты фактически соответствуют предельному случаю, когда поля материи являются безмассовыми. (Но для того, чтобы пояснить вычисление вклада полей Паули–Вилларса, по ходу работы мы будем рассматривать случай произвольной массы. Переход к пределу $m \rightarrow 0$ будет сделан в конце при получении окончательного результата.)

Статья построена следующим образом. В разделе 2 напоминаются основные сведения о $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса и ее регуляризации с помощью высших ковариантных производных. Уравнения Швингера–Дайсона для

рассматриваемой теории получены в разделе 3, где приводится также решение тождеств Славнова–Тейлора, которое определяет вершинные функции в уравнениях Швингера–Дайсона. После подстановки этих вершин получен вклад в двухточечную функцию Грина калибровочного поля в виде некоторого интеграла. Вычисление этого интеграла проводится в разделе 4. В заключении кратко обсуждаются полученные результаты.

2. $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ ЯНГА–МИЛЛСА, МЕТОД ФОНОВОГО ПОЛЯ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

$N = 1$ суперсимметричная теория Янга–Миллса в суперпространстве описывается следующим действием:

$$S = \frac{1}{4e^2} \text{Re tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^+ e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^+ e^{-2V^t} \tilde{\phi}) + \frac{1}{2} m \int d^4x d^2\theta \tilde{\phi}^t \phi + \frac{1}{2} m \int d^4x d^2\bar{\theta} \tilde{\phi}^+ \phi^*. \quad (3)$$

Здесь ϕ и $\tilde{\phi}$ – киральные суперполя материи, а V – вещественное скалярное суперполе, которое в качестве одной из компонент содержит калибровочное поле A_μ . Суперполе W_a представляет собой суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля и определяется как

$$W_a = \frac{1}{32} \bar{D}(1 - \gamma_5) D[e^{-2V}(1 + \gamma_5) D_a e^{2V}], \quad (4)$$

где

$$D = \frac{\partial}{\partial \theta} - i\gamma^\mu \theta \partial_\mu \quad (5)$$

– суперсимметричная ковариантная производная. В наших обозначениях калибровочное суперполе V разлагается по генераторам калибровочной группы T^a как $V = eV^a T^a$ (e – константа связи).

Действие (3) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\phi \rightarrow e^{i\Lambda} \phi, \quad \tilde{\phi} \rightarrow e^{-i\Lambda^t} \tilde{\phi}, \quad e^{2V} \rightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda}. \quad (6)$$

Такой закон калибровочного преобразования означает, что если поле ϕ находится в некотором представлении R калибровочной группы G , то поле $\tilde{\phi}$ лежит в представлении $\bar{R}$, сопряженном к R .

Для квантования этой модели удобно использовать метод фонового поля, который позволяет проводить вычисления эффективного действия, не нарушая явно калибровочную инвариантность. В применении к суперсимметричному случаю он может быть сформулирован следующим образом [12]. Осуществим в действии (3) замену

$$e^{2V} \rightarrow e^{2V'} \equiv e^{\Omega^+} e^{2V} e^{\Omega}, \quad (7)$$

где Ω – фоновое скалярное суперполе. Выражение для V' является сложной нелинейной функцией V , Ω и Ω^+ , конкретный вид которой нас не интересует:

$$V' = V'[V, \Omega] \quad (8)$$

(для краткости обозначений зависимость от Ω^+ здесь и далее мы явно выписывать не будем).

Получившаяся теория будет инвариантна относительно фоновых калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^\Lambda \phi, & \tilde{\phi} &\rightarrow e^{-\Lambda^t} \tilde{\phi}, & V &\rightarrow e^{iK} V e^{-iK}, \\ e^\Omega &\rightarrow e^{iK} e^\Omega e^{-\Lambda}, & e^{\Omega^+} &\rightarrow e^{-\Lambda^+} e^{\Omega^+} e^{-iK}, \end{aligned} \quad (9)$$

где K – произвольное вещественное суперполе, а Λ – произвольное киральное суперполе.

Построим киральные ковариантные производные

$$\mathbf{D} \equiv e^{-\Omega^+} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) D e^{\Omega^+}, \quad \overline{\mathbf{D}} \equiv e^{\Omega} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) D e^{-\Omega}. \quad (10)$$

При действии на некоторое поле X , которое преобразуется по закону $X \rightarrow e^{iK} X$, эти ковариантные производные будут меняться точно так же. Можно определить и ковариантную производную с лоренцевым индексом

$$\mathbf{D}_\mu \equiv -\frac{i}{4} (C\gamma^\mu)^{ab} \{\mathbf{D}_a, \overline{\mathbf{D}}_b\}, \quad (11)$$

которая будет иметь такое же свойство. Несложно убедиться, что после замены (7) действие (3) перейдет в

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{4e^2} \text{tr Re} \int d^4x d^2\theta \mathbf{W}^a \mathbf{W}_a - \frac{1}{128e^2} \text{tr Re} \int d^4x d^4\theta [16(e^{-2V} \mathbf{D}^a e^{2V}) \mathbf{W}_a + \\ & + (e^{-2V} \mathbf{D}^a e^{2V}) \overline{\mathbf{D}}^2 (e^{-2V} \mathbf{D}_a e^{2V})] + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^+ e^{\Omega^+} e^{2V} e^\Omega \phi + \\ & + \tilde{\phi}^+ e^{-\Omega^*} e^{-2V^t} e^{-\Omega^t} \tilde{\phi}) + \frac{1}{2} m \int d^4x d^2\theta \tilde{\phi}^t \phi + \frac{1}{2} m \int d^4x d^2\bar{\theta} \tilde{\phi}^+ \phi^*, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\mathbf{W}_a = \frac{1}{32} e^{\Omega} \overline{\mathbf{D}} (1 - \gamma_5) D (e^{-\Omega} e^{-\Omega^+} (1 + \gamma_5) D_a e^{\Omega^+} e^\Omega) e^{-\Omega} \quad (13)$$

и используются обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 &\equiv \frac{1}{2} \overline{\mathbf{D}} (1 + \gamma_5) \mathbf{D}, & \overline{\mathbf{D}}^2 &\equiv \frac{1}{2} \overline{\mathbf{D}} (1 - \gamma_5) \mathbf{D}, \\ \mathbf{D}^a &\equiv \left[\frac{1}{2} \overline{\mathbf{D}} (1 + \gamma_5) \right]_a^a, & \mathbf{D}_a &\equiv \left[\frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \mathbf{D} \right]_a^a, \\ \overline{\mathbf{D}}^a &\equiv \left[\frac{1}{2} \overline{\mathbf{D}} (1 - \gamma_5) \right]_a^a, & \overline{\mathbf{D}}_a &\equiv \left[\frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \mathbf{D} \right]_a^a. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом действие ковариантных производных на поле V , лежащее в присоединенном представлении, определяется стандартным образом.

Удобно выбрать регуляризацию и фиксацию калибровки таким образом, чтобы инвариантность (9) не нарушалась. Например, регуляризация с помощью высших ковариантных производных может быть осуществлена заменой действия (12) на

$$\begin{aligned}
 S_\Lambda = & \frac{1}{4e^2} \operatorname{tr} \operatorname{Re} \int d^4x d^2\theta \mathbf{W}^a \mathbf{W}_a - \frac{1}{128e^2} \operatorname{tr} \operatorname{Re} \int d^4x d^4\theta \left[16(e^{-2V} \mathbf{D}^a e^{2V}) \mathbf{W}_a + \right. \\
 & + (e^{-2V} \mathbf{D}^a e^{2V}) \bar{\mathbf{D}}^2 \left(e^{-2V} \mathbf{D}_a \left(1 + \frac{(\mathbf{D}_\mu^2)^n}{\Lambda^{2n}} \right) e^{2V} \right) \Big] + \\
 & + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^+ e^{\Omega^+} e^{2V} e^{\Omega} \phi + \tilde{\phi}^+ e^{-\Omega^*} e^{-2V^t} e^{-\Omega^t} \tilde{\phi}) + \\
 & + \frac{1}{2} m \int d^4x d^2\theta \tilde{\phi}^t \phi + \frac{1}{2} m \int d^4x d^2\bar{\theta} \tilde{\phi}^+ \phi^*. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что это действие будет инвариантно относительно фоновых калибровочных преобразований (9).

Заметим, что описанный способ регуляризации несколько отличается от метода, предложенного в работе [13]. Отличие заключается в форме слагаемого, которое содержит высшие производные. Использование предлагаемого здесь метода несколько упрощает проведение вычислений, тогда как все характерные особенности регуляризации высшими производными в обоих случаях одинаковы. Поэтому, хотя явные вычисления в двух и более петлях с помощью метода, предложенного в работе [13], пока не проводились, есть основания полагать, что их результаты не будут существенно отличаться от полученных далее в этой работе.

Калибровку также можно фиксировать инвариантным образом, например, добавлением слагаемых

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{64e^2} \int d^4x d^4\theta \left(V \mathbf{D}^2 \bar{\mathbf{D}}^2 \left(1 + \frac{(\mathbf{D}_\mu^2)^n}{\Lambda^{2n}} \right) V + V \bar{\mathbf{D}}^2 \mathbf{D}^2 \left(1 + \frac{(\mathbf{D}_\mu^2)^n}{\Lambda^{2n}} \right) V \right). \quad (16)$$

В этом случае слагаемые, квадратичные по суперполю V , будут иметь наиболее простой вид:

$$\frac{1}{4e^2} \operatorname{tr} \operatorname{Re} \int d^4x d^4\theta V \mathbf{D}_\mu^2 \left(1 + \frac{(\mathbf{D}_\mu^2)^n}{\Lambda^{2n}} \right) V. \quad (17)$$

Конечно, также необходимо добавить соответствующее действие духов Фаддеева–Попова S_{gh} . Явный вид этого действия мы выписывать здесь не будем, поскольку для вычисления вклада петель суперполей материи он не существует.

Предлагаемый способ регуляризации и фиксации калибровки сохраняет как инвариантность относительно преобразований суперсимметрии, так и инвариантность относительно преобразований (9). Следовательно, эффективное действие, вычисленное с помощью метода фонового поля, будет инвариантно как относительно преобразований суперсимметрии, так и относительно калибровочных преобразований.

Построим производящий функционал следующим образом:

$$Z[J, \mathbf{\Omega}, j] = \int D\mu \exp \left\{ iS_{\Lambda}^r + iS_{\text{gf}} + iS_{\text{gh}} + iS_s + iS_{\phi_0} + \right. \\ \left. + i \int d^4x d^4\theta (J + J[\mathbf{\Omega}]) (V'[V, \mathbf{\Omega}] - \mathbf{V}) \right\}, \quad (18)$$

где суперполе $\mathbf{V}$ задается равенством

$$e^{2\mathbf{V}} \equiv e^{\mathbf{\Omega}^+} e^{\mathbf{\Omega}}, \quad (19)$$

$J[\mathbf{\Omega}]$ – некоторый пока не определенный функционал, смысл введения которого будет понятен далее. Мера функционального интегрирования записывается в виде

$$D\mu = DV D\phi D\tilde{\phi}. \quad (20)$$

Через S_{Λ}^r обозначено перенормированное и регуляризованное действие:

$$S_{\Lambda}^r = \frac{1}{4e_0^2} \text{tr Re} \int d^4x d^2\theta \mathbf{W}^a \mathbf{W}_a - \frac{1}{128e_0^2} \text{tr Re} \int d^4x d^4\theta \left[16(e^{-2V} \mathbf{D}^a e^{2V}) \mathbf{W}_a + \right. \\ \left. + (e^{-2V} \mathbf{D}^a e^{2V}) \bar{\mathbf{D}}^2 \left(e^{-2V} \mathbf{D}_a \left(1 + \frac{(\mathbf{D}_{\mu}^2)^n}{\Lambda^{2n}} \right) e^{2V} \right) \right] + \\ + \frac{1}{4} Z \left(e, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \int d^4x d^4\theta (\phi^+ e^{\mathbf{\Omega}^+} e^{2V} e^{\mathbf{\Omega}} \phi + \tilde{\phi}^+ e^{-\mathbf{\Omega}^*} e^{-2V^t} e^{-\mathbf{\Omega}^t} \tilde{\phi}) + \\ + \frac{1}{2} m \int d^4x d^2\theta \tilde{\phi}^t \phi + \frac{1}{2} m \int d^4x d^2\bar{\theta} \tilde{\phi}^+ \phi^*, \quad (21)$$

где e_0 – голая константа связи, а Z – константа перенормировки волновой функции суперполей материи. S_{gf} – члены, фиксирующие калибровку (16) (в них константу связи e мы также заменим на e_0), а S_{gh} – соответствующее действие для духов Фаддеева–Попова (а также для духов Нильсена–Каллош). Через S_s обозначены слагаемые с источниками для киральных суперполей, которые в развернутой форме записываются в виде

$$S_s = \int d^4x d^2\theta (j^t \phi + \tilde{j}^t \tilde{\phi}) + \int d^4x d^2\bar{\theta} (j^+ \phi^* + \tilde{j}^+ \tilde{\phi}^*). \quad (22)$$

Кроме того, в производящий функционал (18) были добавлены дополнительные источники

$$S_{\phi_0} = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi_0^+ e^{\mathbf{\Omega}^+} e^{2V} e^{\mathbf{\Omega}} \phi + \phi^+ e^{\mathbf{\Omega}^+} e^{2V} e^{\mathbf{\Omega}} \phi_0 + \\ + \tilde{\phi}_0^+ e^{-\mathbf{\Omega}^*} e^{-2V^t} e^{-\mathbf{\Omega}^t} \tilde{\phi} + \tilde{\phi}^+ e^{-\mathbf{\Omega}^*} e^{-2V^t} e^{-\mathbf{\Omega}^t} \tilde{\phi}_0), \quad (23)$$

где ϕ_0 , ϕ_0^+ , $\tilde{\phi}_0$ и $\tilde{\phi}_0^+$ – произвольные скалярные суперполя. Вообще говоря, вводить слагаемое S_{ϕ_0} в производящий функционал не обязательно, однако присутствие параметров ϕ_0 крайне желательно при исследовании уравнений Швингера–Дайсона.

Для того чтобы понять, каким образом производящий функционал (18) связан с обычным эффективным действием, совершим замену переменной $V \rightarrow V'$. Тогда получим, что

$$Z[J, \Omega, j] = \exp \left\{ -i \int d^4x d^4\theta (J + J[\Omega]) \mathbf{V} \right\} Z_0[J + J[\Omega], \Omega, j], \quad (24)$$

где

$$Z_0[J, \Omega, j] = \int D\mu \exp \left\{ iS_{\Lambda}^r + iS_{\text{gf}} + iS_{\text{gh}} + iS_{\text{s}} + iS_{\phi_0} + i \int d^4x d^4\theta JV \right\}. \quad (25)$$

Если бы зависимость S_{Λ}^r , S_{gf} , S_{gh} и S_{ϕ_0} от аргументов V , Ω и Ω^+ факторизовалась в зависимость от переменной V' , то Z_0 не зависел бы от Ω и Ω^+ и совпадал с обычным производящим функционалом. Это действительно имеет место для действия (3) и S_{ϕ_0} . Однако в слагаемом с высшими производными и в членах, фиксирующих калибровку, такая факторизация не происходит. Поэтому Z_0 на самом деле несколько отличается от обычного производящего функционала.

С помощью функционала $Z[J, \Omega, j]$ можно построить производящий функционал для связанных функций Грина:

$$\begin{aligned} W[J, \Omega, j] &= -i \ln Z[J, \Omega, j] = \\ &= - \int d^4x d^4\theta (J + J[\Omega]) \mathbf{V} + W_0[J + J[\Omega], \Omega, j]. \end{aligned} \quad (26)$$

Также можно построить и соответствующее эффективное действие:

$$\begin{aligned} \Gamma[V, \Omega, \phi] &= - \int d^4x d^4\theta (J\mathbf{V} + J[\Omega]\mathbf{V}) + W_0[J + J[\Omega], \Omega, j] - \\ &- \int d^4x d^4\theta JV - \int d^4x d^2\theta (j^t\phi + \tilde{j}^t\tilde{\phi}) - \int d^4x d^2\bar{\theta} (j^+\phi^* + \tilde{j}^+\tilde{\phi}^*), \end{aligned} \quad (27)$$

где токи должны быть выражены через поля с помощью соотношений

$$\begin{aligned} V &= \frac{\delta}{\delta J} W[J, \Omega, j] = -\mathbf{V} + \frac{\delta}{\delta J} W_0[J + J[\Omega], \Omega, j], \\ \phi &= \frac{\delta}{\delta j} W[J, \Omega, j] = \frac{\delta}{\delta j} W_0[J + J[\Omega], \Omega, j] \end{aligned} \quad (28)$$

и т.д. Подставляя эти выражения в формулу (27), переписываем эффективное действие следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma[V, \Omega, \phi] &= W_0[J + J[\Omega], \Omega, j] - \int d^4x d^4\theta \left(J[\Omega]\mathbf{V} + J \frac{\delta}{\delta J} W_0[j, J + J[\Omega], \Omega, j] \right) - \\ &- \int d^4x d^2\theta \phi \frac{\delta}{\delta j} W_0[J + J[\Omega], \Omega, j] - (\text{аналогичные члены с } \phi^+, \tilde{\phi}, \tilde{\phi}^+). \end{aligned} \quad (29)$$

Положим теперь $V = 0$, так что

$$\mathbf{V} = \frac{\delta}{\delta J} W_0 [J + J[\Omega], \Omega, j]. \quad (30)$$

Кроме того, учтем, что инвариантность относительно фоновых калибровочных преобразований (9) существенно ограничивает возможную форму эффективного действия. Если при этом квантовое поле V в эффективном действии положить равным нулю, то суперполе K нетривиальным образом будет влиять только на закон калибровочного преобразования полей Ω и Ω^+ , а единственной инвариантной комбинацией окажется выражение (19) (оно инвариантно в том смысле, что в соответствующем законе калибровочного преобразования будет отсутствовать суперполе K). Это означает, что в окончательном выражении для эффективного действия можно положить

$$\Omega = \Omega^+ = \mathbf{V}. \quad (31)$$

В этом случае эффективное действие окажется равным

$$\begin{aligned} \Gamma[0, \mathbf{V}, \phi] = & W_0 [J + J[\mathbf{V}], \mathbf{V}, j] - \int d^4x d^4\theta (J + J[\mathbf{V}]) \frac{\delta}{\delta J} W_0 [J + J[\mathbf{V}], \mathbf{V}, j] - \\ & - \int d^4x d^2\theta \phi \frac{\delta}{\delta j} W_0 [J + J[\mathbf{V}], \mathbf{V}, j] - (\text{аналогичные члены с } \phi^+, \tilde{\phi}, \tilde{\phi}^+). \end{aligned} \quad (32)$$

Заметим, что это выражение не зависит от конкретного вида функционала $J[\Omega]$. В частности, его можно выбрать таким образом, чтобы в формуле (18) ликвидировать слагаемые, линейные по полю V . Такой выбор будет очень удобен далее.

Если бы члены, фиксирующие калибровку, и члены с высшими производными зависели только от V' , то выражение (32) совпало бы с обычным эффективным действием. Однако, как мы уже указывали выше, в предлагаемом нами способе регуляризации и фиксации калибровки зависимость от V , Ω и Ω^+ не факторизуется в зависимость от V' . В соответствии с результатами работ [14] инвариантный заряд (а следовательно, и функция Гелл-Манна-Лоу) является калибровочно независимым, а зависимость эффективного действия от калибровки может быть ликвидирована перенормировкой волновых функций калибровочного поля, духов и полей материи. Поэтому для вычисления функции Гелл-Манна-Лоу мы можем использовать описанную выше фоновую калибровку. Заметим, что при использовании такой калибровки благодаря инвариантности действия относительно преобразований (9) константа перенормировки калибровочного поля A_μ оказывается равной 1.

Тем не менее производящий функционал (18) построен пока еще не полностью. Дело в том, что введение слагаемого с высшими производными не устраняет расходимости в однопетлевых диаграммах. Для их регуляризации необходимо вставить в производящий функционал детерминанты полей Паули-Вилларса [15]. Поскольку в данной работе мы интересуемся только вкладом суперполей материи, то построим эти детерминанты только для них. (Поля Паули-Вилларса необходимо вводить также для калибровочного поля и духов.) При этом мы будем сразу использовать условие (31).

Итак, вставляем в производящий функционал множитель

$$\prod_i (\det \text{PV}(V, \mathbf{V}, M_i))^{c_i}, \quad (33)$$

где детерминанты Паули–Вилларса определяются как

$$(\det \text{PV}(\mathbf{V}, M))^{-1} = \int D\Phi D\tilde{\Phi} e^{iS_{\text{PV}}}. \quad (34)$$

При этом с использованием условия (31) действие для полей Паули–Вилларса будет иметь вид

$$\begin{aligned} S_{\text{PV}} \equiv & Z \left(e, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\Phi^+ e^{\mathbf{V}} e^{2V} e^{\mathbf{V}} \Phi + \tilde{\Phi}^+ e^{-\mathbf{V}^t} e^{-2V^t} e^{-\mathbf{V}^t} \tilde{\Phi}) + \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta M \tilde{\Phi}^t \Phi + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\bar{\theta} M \tilde{\Phi}^+ \Phi^*. \end{aligned} \quad (35)$$

Коэффициенты c_i в формуле (33) удовлетворяют условиям

$$\sum_i c_i = 1, \quad \sum_i c_i M_i^2 = 0. \quad (36)$$

Далее мы будем предполагать, что $M_i = a_i \Lambda$, где a_i – некоторые постоянные. Вставка детерминантов Паули–Вилларса позволяет сократить остаточные расходимости во всех однопетлевых диаграммах, в том числе в диаграммах, содержащих контр-членные вставки.

Совершая в производящем функционале преобразование

$$\phi \rightarrow \frac{\phi}{\sqrt{Z}}, \quad \tilde{\phi} \rightarrow \frac{\tilde{\phi}}{\sqrt{Z}}, \quad \Phi \rightarrow \frac{\Phi}{\sqrt{Z}}, \quad \tilde{\Phi} \rightarrow \frac{\tilde{\Phi}}{\sqrt{Z}}, \quad (37)$$

получаем, что зависимость от константы перенормировки Z может быть легко получена исходя из производящего функционала, в котором константа Z отсутствует. Если ϕ_0 и j равны нулю, то для этого достаточно совершить замену

$$m \rightarrow \frac{m}{Z}, \quad M_i \rightarrow \frac{M_i}{Z}. \quad (38)$$

Поэтому мы будем проводить вычисления при $Z = 1$, а зависимость от константы перенормировки восстановим в окончательном результате.

3. УРАВНЕНИЯ ШВИНГЕРА–ДАЙСОНА И ТОЖДЕСТВА СЛАВНОВА–ТЕЙЛОРА

Для того чтобы построить уравнения Швингера–Дайсона в рассматриваемой теории, необходимо разделить действие на три части: действие для фонового поля, кинетический член для квантовых полей, не содержащий фонового поля, и взаимодействие, в которое включены все остальные слагаемые:

$$S = S(\mathbf{V}) + S_2(V, \phi) + S_1(V, \mathbf{V}, \phi). \quad (39)$$

(Ранее мы уже видели, что слагаемые первого порядка по суперполю V , которые получаются из разложения классического действия, могут быть отброшены.) Поэтому производящий функционал (18) может быть представлен следующим образом:

$$\begin{aligned} Z[J, j, \mathbf{V}] &= \int d\mu \exp \left(iS[\mathbf{V}] + iS_2[V, \phi] + iS_I[V, \mathbf{V}, \phi] + iS_s + i \int d^8x JV \right) = \\ &= \exp \left(iS[\mathbf{V}] + iS_I \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} \right] \right) \times \\ &\quad \times \int d\mu \exp \left(iS_2[V, \phi] + iS_s + i \int d^8x JV + i \int d^8x \mathbf{J}\mathbf{V} \right) \Big|_{\mathbf{J}=0}, \quad (40) \end{aligned}$$

где $\int d^8x \equiv \int d^4x d^4\theta_x$. Продифференцируем это выражение по фоновому полю:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \mathbf{V}_x} Z[J, j, \mathbf{V}] &= i \frac{\delta S[\mathbf{V}]}{\delta \mathbf{V}} Z + \exp \left(iS_I \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} \right] \right) i \mathbf{J}_x \times \\ &\quad \times \int d\mu \exp \left(iS_2[V, \phi] + iS_s + i \int d^8x JV + i \int d^8x \mathbf{J}\mathbf{V} \right) \Big|_{\mathbf{J}=0}. \quad (41) \end{aligned}$$

Переносим ток $\mathbf{J}_x$ налево и делим результат на Z , получаем, что

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{V}_x} W[J, j, \mathbf{V}] = \frac{\delta S[\mathbf{V}]}{\delta \mathbf{V}_x} + \frac{\delta}{\delta \mathbf{V}_x} S_I \left[\mathbf{V}, V + \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, \phi + \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j} \right]. \quad (42)$$

Поскольку фоновое поле $\mathbf{V}$ представляет собой некоторый параметр эффективного действия, то это равенство может быть эквивалентно записано следующим образом:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x} = \frac{\delta S[\mathbf{V}]}{\delta \mathbf{V}_x} + \left\langle \frac{\delta}{\delta \mathbf{V}_x} S_I[\mathbf{V}, V, \phi] \right\rangle, \quad (43)$$

где угловые скобки обозначают обычное функциональное усреднение. При этом, конечно, в окончательном результате необходимо положить поле V (аргумент эффективного действия) равным нулю в силу формулы (30) и соответствующего обоснования.

Рассмотрим теперь, какой вклад в это выражение дают суперполя материи. Соответствующие члены взаимодействия имеют вид

$$S_I = \frac{1}{4} \int d^8x \phi^+ (e^{\mathbf{V}} e^{2V} e^{\mathbf{V}} - 1) \phi + (\text{аналогичные члены с } \tilde{\phi}). \quad (44)$$

Дифференцируя S_I по фоновому полю, получаем, что соответствующий вклад в эффективное действие запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x^a} &= (\text{члены без материи}) + \sum_i c_i \frac{\delta}{\delta \mathbf{V}_x^a} \langle \ln \det \text{PV}(V, \mathbf{V}, M_i) \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta \mathbf{V}_x^a} \int d^8x \langle \phi_x^+ e^{\mathbf{V}_x} e^{2V_x} e^{\mathbf{V}_x} \phi_x + (\text{аналогичные члены с } \tilde{\phi}) \rangle. \quad (45) \end{aligned}$$

Нас будет интересовать двухточечная функция Грина калибровочного поля, соответствующая разложению эффективного действия по фоновому полю с точностью

до членов второго порядка. Для вычисления такого разложения удобно воспользоваться равенством

$$\begin{aligned} \int d^8x d^8y \mathbf{V}_x^a \mathbf{V}_y^b \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{V}_x^a \delta \mathbf{V}_y^b} (e^{\mathbf{V}} e^{2V} e^{\mathbf{V}}) \Big|_{\mathbf{V}=0} &= \mathbf{V}(\mathbf{V} e^{2V} + e^{2V} \mathbf{V}) + (\mathbf{V} e^{2V} + e^{2V} \mathbf{V}) \mathbf{V} = \\ &= e \int d^8x d^8y \mathbf{V}_y^b \mathbf{V}_x^a \left[T^a \frac{\delta}{\delta \mathbf{V}_y^b} (e^{\mathbf{V}} e^{2V} e^{\mathbf{V}}) \Big|_{\mathbf{V}=0} + \frac{\delta}{\delta \mathbf{V}_y^b} (e^{\mathbf{V}} e^{2V} e^{\mathbf{V}}) \Big|_{\mathbf{V}=0} T^a \right], \end{aligned} \quad (46)$$

где e перед интегралом в правой части – константа связи. Используя вид действия для дополнительных источников (23), легко получаем, что

$$\frac{1}{4} \langle \phi_x^+ T^a e^{\mathbf{V}_x} e^{2V_x} e^{\mathbf{V}_x} \phi_x + \phi_x^+ e^{\mathbf{V}_x} e^{2V_x} e^{\mathbf{V}_x} T^a \phi_x \rangle = \frac{1}{i} \text{tr} \left[T^a \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta j_x^+ \delta \phi_{0x}^+} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta j_x \delta \phi_{0x}} \right) \right] \quad (47)$$

(в последнем равенстве для краткости были использованы матричные обозначения), при этом производные по источникам должны быть выражены через поля следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta j_x^+} &= \int d^8z \left[\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_z \delta \phi_x^+} \right)^{-1} \frac{D^2}{8\partial^2} \frac{\delta}{\delta \phi_z} + \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_z^+ \delta \phi_x^+} \right)^{-1} \frac{\bar{D}^2}{8\partial^2} \frac{\delta}{\delta \phi_z^+} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_z \delta \phi_x^+} \right)^{-1} \frac{D^2}{8\partial^2} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_z} + \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_z^+ \delta \phi_x^+} \right)^{-1} \frac{\bar{D}^2}{8\partial^2} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_z^+} + \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta V_z \delta \phi_x^+} \right)^{-1} \frac{\delta}{\delta V_z} \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

Поэтому, используя формулы (45), (46) и учитывая наличие аналогичных членов с полями $\tilde{\phi}$, соответствующий вклад в двухточечную функцию Грина суперполя материи можно записать в виде

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_y^b \delta \mathbf{V}_x^a} = \dots + e \frac{\delta}{\delta \mathbf{V}_y^b} \text{tr} \left[T^a \frac{1}{i} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta j_x^+ \delta \phi_{0x}^+} - (T^a)^t \frac{1}{i} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{j}_x^+ \delta \tilde{\phi}_{0x}^+} + \text{э.с.} \right], \quad (49)$$

где многоточие указывает на наличие вкладов калибровочных полей, духов, а также всевозможных полей Паули–Вилларса. (В этом выражении опущена симметризация по индексам a и b , поскольку, как мы увидим далее, записанное выражение автоматически окажется симметричным.) Заметим, что вычисление вкладов полей Паули–Вилларса производится полностью аналогично вычислению вклада обычных полей [6] и детально здесь не рассматривается. Результат будет приведен далее.

Для того чтобы вычислить выражения в формуле (49), необходимо воспользоваться формулой (48), а также явным образом выполнить дифференцирование. После этого результат можно представить графически в виде суммы следующих двух эффективных диаграмм:

$$\Delta \Gamma_V^{(2)} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \quad (50)$$

При этом двойные линии соответствуют эффективным пропагаторам, которые в зависимости от киральности конечных точек будут записываться в виде

$$\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^+ \delta \phi_y} \right)^{-1} = -\frac{GD_x^2 \bar{D}_x^2}{4(\partial^2 G^2 + m^2 J^2)} \delta_{xy}^8, \quad \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x \delta \tilde{\phi}_y} \right)^{-1} = -\frac{mJ \bar{D}_x^2}{\partial^2 G^2 + m^2 J^2} \delta_{xy}^8. \quad (51)$$

Функции G и J строятся по двухточечным функциям Грина суперполя материи следующим образом:

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^+ \delta \phi_y} = \frac{D_x^2 \bar{D}_x^2}{16} G(\partial^2) \delta_{xy}^8, \quad \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x \delta \tilde{\phi}_y} = -\frac{\bar{D}_x^2}{4} m J(\partial^2) \delta_{xy}^8, \quad (52)$$

где $\delta_{xy}^8 \equiv \delta^4(x-y) \delta^4(\theta_x - \theta_y)$, а индексы внизу указывают точки, в которых берутся рассматриваемые величины.

Как и в случае электродинамики, вершинные функции могут быть определены из тождеств Славнова–Тейлора. Конечно, при этом необходимо учитывать, что речь идет о вершинных функциях, в которых имеется внешняя линия *фонового* поля. Как уже говорилось выше, эффективное действие инвариантно относительно фоновых калибровочных преобразований. Несложно убедиться, что такая инвариантность может быть выражена равенством

$$0 = \int d^8 y \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_y^a} \delta \mathbf{V}_y^a + \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_y} \frac{D^2}{8 \partial^2} \delta \phi_y + \delta \phi_y^+ \frac{\bar{D}^2}{8 \partial^2} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_y^+} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{0y}} \delta \phi_{0y} + \delta \phi_{0y}^+ \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{0y}^+} + \right. \\ \left. + (\text{аналогичные члены с } \tilde{\phi}, \tilde{\phi}_0) \right), \quad (53)$$

где

$$\delta \phi_x = \Lambda_x \phi_x, \quad \delta \phi_x^+ = \phi_x^+ \Lambda_x^+, \quad \delta \phi_{0x} = \Lambda_x \phi_{0x}, \quad \delta \phi_{0x}^+ = \phi_{0x}^+ \Lambda_x^+, \\ \delta \mathbf{V}_x = -\frac{1}{2} (\Lambda_x + \Lambda_x^+) + O(\mathbf{V}), \quad (54)$$

Λ – произвольное киральное суперполе, а все остальные слагаемые в $\delta \mathbf{V}$ пропорциональны по крайней мере первой степени фонового поля. (Для полей $\tilde{\phi}$ и т.д. законы преобразования также могут быть легко выписаны.) Продифференцируем равенство (53) по Λ_y^a , ψ_z^+ , ϕ_x или по Λ_y^a , $\tilde{\psi}_z$, ϕ_x . В результате получатся тождества Славнова–Тейлора

$$0 = \frac{1}{2e} (\bar{D}_y^2 + D_y^2) \frac{\delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_y^a \delta \phi_{0z}^+ \delta \phi_x} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{0z}^+ \delta \phi_y} T^a \bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 - D_y^2 \left(\delta_{yz}^8 T^a \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{0y}^+ \delta \phi_x} \right), \\ 0 = \frac{1}{2e} (\bar{D}_y^2 + \bar{D}_y^2) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \mathbf{V}_y^a \delta \tilde{\phi}_{0z} \delta \phi_x} - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_{0z} \delta \phi_y} T^a \bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 + \bar{D}_y^2 \left(\delta_{yz}^8 T^a \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_{0y} \delta \phi_x} \right), \quad (55)$$

где

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_y \delta \phi_{0z}^+} = -\frac{1}{8} G(\partial^2) \bar{D}_y^2 \delta_{yz}^8, \quad \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_y^* \delta \phi_{0z}^+} = \frac{m}{32 \partial^2} (J(\partial^2) - 1) D_y^2 \bar{D}_y^2 \delta_{yz}^8. \quad (56)$$

Они отличаются от аналогичных тождеств в случае электродинамики только наличием генераторов калибровочной группы. Поэтому сходными будут и решения:

$$\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \mathbf{V}_y^a \delta \phi_{0z}^+ \delta \phi_x} \Big|_{p=0} = e \left[-2\partial^2 \Pi_{1/2y} (\bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 \delta_{yz}^8) F(q^2) + \frac{1}{8} D^b C_{bc} \bar{D}_y^2 (\bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 D_y^c \delta_{yz}^8) f(q^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{16} q^\mu G'(q^2) \bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D_y (\bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 \delta_{yz}^8) - \frac{1}{4} \bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 \delta_{yz}^8 G(q^2) \right] T^a, \quad (57)$$

$$\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \mathbf{V}_y^a \delta \tilde{\phi}_{0z} \delta \phi_x} \Big|_{p=0} = e \left[\frac{m}{32} D^b C_{bc} D_y^2 (D_y^2 \bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 D_y^c \delta_{yz}^8) h(q^2) + \frac{m}{16} J'(q^2) (\bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 D_y^2 \delta_{yz}^8 - \right. \\ \left. - D_y^2 \bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 \delta_{yz}^8) + \frac{m}{16} \left(\frac{J'(q^2)}{q^2} - \frac{J(q^2) - 1}{q^4} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(D_y^2 \bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 \frac{\bar{D}_y^2 D_y^2}{16} \delta_{yz}^8 + D_y^2 \bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 q^2 \delta_{yz}^8 \right) \right] T^a. \quad (58)$$

Здесь штрихи обозначают производные по q^2 ,

$$\Pi_{1/2} = -\frac{1}{8\partial^2} D^a \bar{D}^2 D_a = -\frac{1}{8\partial^2} \bar{D}^a D^2 \bar{D}_a \quad (59)$$

– суперсимметричный поперечный проектор, для производных используются обозначения, аналогичные (14), а функции F , f и h не могут быть определены из тождеств Славнова–Тейлора.

Функции (57) и (58) позволяют определить и обычные функции Грина с помощью тождеств

$$-\frac{D_z^2}{2} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x^a \delta \phi_y \delta \phi_{0z}^+} = \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x^a \delta \phi_y \delta \phi_z^+}, \quad -\frac{\bar{D}_z^2}{2} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x^a \delta \phi_y \delta \tilde{\phi}_{0z}} = \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x^a \delta \phi_y \delta \tilde{\phi}_z}. \quad (60)$$

Заметим, что дополнительные источники в формуле (23) были специально введены так, чтобы такие тождества имели место. Доказательство этих соотношений может быть проведено полностью аналогично случаю электродинамики, подробно рассмотренному в работе [6]. С помощью равенств (60) получаем, что

$$\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \mathbf{V}_y^a \delta \phi_z^+ \delta \phi_x} \Big|_{p=0} = e \left[\partial^2 \Pi_{1/2y} (\bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 D_y^2 \delta_{yz}^8) F(q^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{32} q^\mu G'(q^2) \bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D_y (\bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 D_y^2 \delta_{yz}^8) + \frac{1}{8} \bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 D_y^2 \delta_{yz}^8 G(q^2) \right] T^a, \quad (61)$$

$$\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \mathbf{V}_y^a \delta \tilde{\phi}_z \delta \phi_x} \Big|_{p=0} = -\frac{em}{32} J'(q^2) [\bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 D_y^2 \bar{D}_y^2 \delta_{yz}^8 - D_y^2 \bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 \bar{D}_y^2 \delta_{yz}^8] T^a. \quad (62)$$

Полученные выражения для вершинных функций позволяют в пределе нулевого внешнего импульса вычислить все выражения, которые входят в формулу (49).

Заметим, что первая диаграмма в уравнении (50) может быть эквивалентно представлена в виде

$$+ e \frac{\delta}{\delta \mathbf{V}_y^b} \text{tr} \left[(T^a)^t \frac{m \bar{D}_x^2}{16 \partial^2} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_z^+ \delta \tilde{\phi}_x^+} \right)_{z=x}^{-1} - T^a \frac{m \bar{D}_x^2}{16 \partial^2} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_z^+ \delta \phi_x^+} \right)_{z=x}^{-1} + \text{э.с.} \right], \quad (63)$$

при этом одинарная линия во второй диаграмме соответствует величине

$$- \frac{D^2 \bar{D}^2}{16 \partial^2} \delta_{12}^8 \quad (64)$$

в случае, если на концах 1 и 2 стоят поля противоположной киральности, и нулю, если киральность концов одинакова. В справедливости равенства (63) можно легко убедиться, используя правила Фейнмана и выполняя дифференцирование по полю $\mathbf{V}$.

Мы будем вычислять величину

$$\left. \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \frac{\delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_y^b \delta \mathbf{V}_x^a} \right|_{p=0}. \quad (65)$$

Заметим, что здесь используется выбранная нами регуляризация высшими ковариантными производными, поскольку она позволяет провести дифференцирование подынтегрального выражения и перейти к пределу нулевого внешнего импульса.

С помощью формул (51), (61) и (62) несложно видеть, что

$$\begin{aligned} e \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \frac{\delta}{\delta \mathbf{V}_y^b} \text{tr} \left[(T^a)^t \frac{m \bar{D}_x^2}{16 \partial^2} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_z^+ \delta \tilde{\phi}_x^+} \right)_{z=x}^{-1} - T^a \frac{m \bar{D}_x^2}{16 \partial^2} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}_z^+ \delta \phi_x^+} \right)_{z=x}^{-1} + \text{э.с.} \right]_{p=0} = \\ = e^2 C(R) \delta^{ab} \partial^2 \Pi_{1/2} \delta_{xy}^8 \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \frac{d}{dq^2} \left(\frac{m^2 J}{q^2 G^2 + m^2 J^2} \right) \end{aligned} \quad (66)$$

(все подобные выражения записаны в евклидовом пространстве после проведения поворота Вика).

Перейдем теперь к вычислению всех остальных вкладов в формуле (50). Для этого заметим, что в них встречается следующая сумма поддиаграмм:

Внешняя линия в этих поддиаграммах соответствует фоновому полю $\mathbf{V}$, а выражения для пропагаторов были приведены выше. После несложных преобразований легко убедиться, что выражения для суммы этих поддиаграмм в пределе $p \rightarrow 0$ в

зависимости от киральности конечных точек записываются в виде

$$\begin{aligned}
 D_y^2 \bar{D}_y^2 \left(\mathbf{V}_y \frac{GD_y^2 \bar{D}_y^2}{64\partial^2(\partial^2 G^2 + m^2 J^2)} \delta_{yz}^8 \right) + \mathbf{V}_y \frac{GD_y^2 \bar{D}_y^2}{4(\partial^2 G^2 + m^2 J^2)} \delta_{yz}^8 = \\
 = - \int d^8 x \frac{D_x^2}{16\partial^2} \delta_{xy}^8 (2\partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}_x + i\bar{D}\gamma^\mu \gamma_5 D \mathbf{V}_x \partial_\mu) \frac{G\bar{D}_z^2}{\partial^2 G^2 + m^2 J^2} \delta_{xz}^8 - \\
 - D^a \mathbf{V}_y \frac{GD_a \bar{D}_z^2}{2(\partial^2 G^2 + m^2 J^2)} \delta_{yz}^8 - D^2 \mathbf{V}_y \frac{G\bar{D}_z^2}{4(\partial^2 G^2 + m^2 J^2)} \delta_{yz}^8
 \end{aligned} \quad (67)$$

или

$$\begin{aligned}
 D_y^2 \bar{D}_y^2 \left(\mathbf{V}_y \frac{mJ D_y^2}{16\partial^2(\partial^2 G^2 + m^2 J^2)} \delta_{yz}^8 \right) + \mathbf{V}_y \frac{mJ D_y^2}{\partial^2 G^2 + m^2 J^2} \delta_{yz}^8 = \\
 = \int d^8 x \frac{D_x^2}{64\partial^2} \delta_{xy}^8 (2\partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}_x + i\bar{D}\gamma^\mu \gamma_5 D \mathbf{V}_x \partial_\mu) \frac{mJ \bar{D}_x^2 D_x^2}{\partial^2(\partial^2 G^2 + m^2 J^2)} \delta_{xz}^8 + \\
 + \frac{1}{8} D^a \mathbf{V}_y \frac{mJ D_{ay} \bar{D}_y^2 D_y^2}{\partial^2(\partial^2 G^2 + m^2 J^2)} \delta_{yz}^8 + \frac{1}{16} D_y^2 \mathbf{V}_y \frac{mJ \bar{D}_y^2 D_y^2}{\partial^2(\partial^2 G^2 + m^2 J^2)} \delta_{yz}^8.
 \end{aligned} \quad (68)$$

Слагаемые в поддиаграммах, содержащие интеграл по $d^8 x$, содержат киральные проекторы, действующие на конечные точки y и z . Это позволяет при проведении вычислений перейти к более простым вершинным функциям (61) и (62) в силу тождеств (60). После несложных, но достаточно длительных вычислений получается, что вклад этих слагаемых в выражение (65) равен

$$e^2 C(R) \delta^{ab} \partial^2 \Pi_{1/2} \delta_{xy}^8 \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \frac{d}{dq^2} \ln(q^2 G^2 + m^2 J^2). \quad (69)$$

Также несложно убедиться, что вклад слагаемых, которые пропорциональны $D^2 \mathbf{V}$ в формулах (67) и (68), равен нулю. Однако вклад слагаемых, пропорциональных $D^a \mathbf{V}$, является нетривиальным и содержит неизвестные функции f и h . Этот вклад можно записать в виде

$$I_a = \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \text{tr} \int d^8 x d^8 y \mathbf{V}_y D^a \mathbf{V}_x \frac{D_{az} \bar{D}_z^2}{4i\partial^2} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta j_z^+ \delta \mathbf{V}_y \delta \phi_{0x}^+} \Big|_{z=x, p=0}, \quad (70)$$

где символ I_a (обозначение работы [7]) означает, что в выражении для точного пропагатора необходимо произвести замену

$$\bar{D}^2 D^2 \delta_{xz}^8 \rightarrow 2\bar{D}^2 D^a \delta_{xz}^8. \quad (71)$$

После подстановки пропагаторов и вершинных функций рассматриваемый вклад оказывается равным

$$e^2 C(R) \delta^{ab} \partial^2 \Pi_{1/2} \delta_{xy}^8 \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{m^2 J (2q^2 J' - (J-1))}{q^4 (q^2 G^2 + m^2 J^2)} - \frac{16Gf + 16m^2 Jh}{q^2 G^2 + m^2 J^2} \right). \quad (72)$$

Собирая вместе все вклады в эффективное действие, получаем следующий результат (при $Z = 1$; зависимость от Z будет восстановлена несколько позже):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \mathbf{V}_y^b \delta \mathbf{V}_x^a} \right|_{p=0} = \dots + e^2 C(R) \delta^{ab} \partial^2 \Pi_{1/2} \delta_{xy}^8 \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{q^2} \frac{d}{dq^2} \left(\ln(q^2 G^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + m^2 J^2) + \frac{m^2 J}{q^2 G^2 + m^2 J^2} \right) - \frac{m^2 J (2q^2 J' - (J - 1))}{q^4 (q^2 G^2 + m^2 J^2)} - \frac{16Gf + 16m^2 Jh}{q^2 G^2 + m^2 J^2} - \right. \\ \left. - (\text{аналогичные члены для полей Паули-Вилларса}) \right\}, \end{aligned} \quad (73)$$

где многоточие означает наличие вкладов калибровочных полей и духов. Сравнивая полученный результат с аналогичным выражением в суперсимметричной электродинамике, мы видим, что различие заключается в наличии множителя $C(R)$. В электродинамике явные вычисления свидетельствуют о том, что имеет место тождество, которое может быть записано в виде равенства нулю вклада (70). Вопрос о том, будет ли аналогичное тождество справедливо в неабелевом случае, пока является открытым. Вообще говоря, это не обязательно, поскольку в неабелевом случае появляются новые диаграммы, которые содержат петлю материи и вершины с самодействием калибровочного суперполя. Поэтому в данной работе мы не будем предполагать существование такого тождества.

4. ТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ГЕЛЛ-МАННА-ЛОУ

При исследовании суперсимметричной электродинамики [6] было установлено, что в случае регуляризации высшими производными расходимости присутствуют только в однопетлевом приближении, а функция Гелл-Манна-Лоу совпадает с точной β -функцией НШВЗ. Рассмотрим, что происходит в случае неабелевой теории.

Функция Гелл-Манна-Лоу определяется зависимостью конечной части двухточечной функции Грина от импульса в пределе $m \rightarrow 0$. Поэтому рассмотрим безмассовый случай и запишем перенормированную двухточечную функцию Грина в виде

$$\Gamma_V^{(2)} = -\frac{1}{16\pi} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \mathbf{V}(-p) \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}(p) d^{-1} \left(\alpha, \frac{\mu}{p} \right), \quad (74)$$

где α – перенормированная константа связи. Известно [16], что функция d инвариантна относительно преобразований ренормгруппы, т.е. не зависит от выбора перенормировочного предписания. Функция Гелл-Манна-Лоу, которую мы будем обозначать $\beta(\alpha)$, определяется соотношением

$$\beta \left(d \left(\alpha, \frac{\mu}{p} \right) \right) = -\frac{\partial}{\partial \ln p} d \left(\alpha, \frac{\mu}{p} \right). \quad (75)$$

Поскольку функция d является ренорминвариантной, то и функция $\beta(\alpha)$ также не будет зависеть от конкретного перенормировочного предписания. Этим она отличается от функции $b(\alpha)$, которая строится по перенормированной константе связи дифференцированием по логарифму точки нормировки.

Для получения физических результатов необходимо действовать следующим образом. Нужно вычислить функцию d в массивном случае, а затем при заданном μ наложить граничное условие

$$d\left(\alpha, \frac{\mu}{p}, \frac{m}{\mu}\right)\Big|_{p=0} = \alpha_{\text{ph}}, \quad (76)$$

где α_{ph} – экспериментально измеренная константа связи. Кроме того, необходимо наложить еще одно граничное условие на функции Грина суперполя материи:

$$G\left(\alpha, \frac{\mu}{p}, \frac{m}{\mu}\right)\Big|_{p^2=m_{\text{ph}}^2} = \frac{m}{m_{\text{ph}}} J\left(\alpha, \frac{\mu}{p}, \frac{m}{\mu}\right)\Big|_{p^2=m_{\text{ph}}^2}, \quad (77)$$

в котором через m_{ph} обозначена физическая масса. (Выполнение этого равенства гарантирует, что пропагатор суперполя материи будет иметь полюс на физической массе.) Указанные граничные условия позволяют выразить параметры α и m (при заданном μ) через физически наблюдаемые величины. Тем не менее результаты данной работы не позволяют найти явный вид функций d , G и J в массивном случае, поэтому связать α и m с экспериментально наблюдаемыми величинами мы не можем. Однако можно получить выражение для вклада суперполей материи в функцию Гелл-Манна-Лоу.

Если через d_0 обозначить функцию d , вычисленную при $Z = 1$, то в соответствии с формулой (73) справедливо следующее уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \ln p} d_0^{-1}\left(\alpha_0, \frac{\Lambda}{p}\right)\Big|_{p=0} &= \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} d_0^{-1}\left(\alpha_0, \frac{\Lambda}{p}\right)\Big|_{p=0} = -16\pi C(R) \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \times \\ &\times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2q^2} \frac{d}{dq^2} \left\{ \ln(q^2 G^2) + X\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right) - \sum_i c_i \ln(q^2 G_{\text{PV}}^2 + M_i^2 J_{\text{PV}}^2) - \right. \\ &\left. - \sum_i c_i \frac{M_i^2 J_{\text{PV}}}{q^2 G_{\text{PV}}^2 + M_i^2 J_{\text{PV}}^2} - \sum_i c_i X\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, a_i\right) \right\}, \end{aligned} \quad (78)$$

где безразмерные функции X определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial X(q^2/\Lambda^2)}{\partial q^2} &= -\frac{16f}{G}, \\ \frac{\partial X_{\text{PV}}(q^2/\Lambda^2, a_i)}{\partial q^2} &= -\frac{M_i^2 J_{\text{PV}}(2q^2 J'_{\text{PV}} - (J_{\text{PV}} - 1))}{q^4(q^2 G_{\text{PV}}^2 + M_i^2 J_{\text{PV}}^2)} - \frac{16G_{\text{PV}} f_{\text{PV}} + 16M_i^2 J_{\text{PV}} h_{\text{PV}}}{q^2 G_{\text{PV}}^2 + M_i^2 J_{\text{PV}}^2}, \end{aligned} \quad (79)$$

причем $M_i = a_i \Lambda$.

Получившийся интеграл в четырехмерных сферических координатах сводится к полной производной, причем отличной от нуля оказывается только подстановка на

нижнем пределе [6]:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} d_0^{-1} \right|_{p=0} = \frac{C(R)}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \left\{ \ln G(0)^2 + X(0) - \sum_i c_i \ln(M_i^2 J_{PV}(0, a_i)^2) - \right. \\ \left. - \sum_i c_i \frac{1}{J_{PV}(0, a_i)} - \sum_i c_i X_{PV}(0, a_i) \right\} = -\frac{1}{\pi} C(R) \left(1 - \frac{\partial \ln G}{\partial \ln \Lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial \ln \Lambda} \right) \Big|_{q=0}. \quad (80)$$

При этом было учтено, что функции $X_{PV}(q^2/\Lambda^2, a_i)$ и $J_{PV}(q^2/\Lambda^2, a_i)$ в пределе $q \rightarrow 0$ стремятся к некоторым конечным постоянным, поскольку интегралы, которые их определяют, являются сходящимися (даже в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$), безразмерными и не содержащими инфракрасных расходимостей. Так как обе части равенства (80) зависят от α_0 и Λ/p , то из него можно найти выражение для d_0^{-1} с точностью до несущественной числовой постоянной:

$$d_0^{-1} \left(\alpha_0, \frac{\Lambda}{p} \right) = -\frac{1}{\pi} C(R) \left(\ln \frac{\Lambda}{p} - \ln G \left(\alpha_0, \frac{\Lambda}{p} \right) - \frac{1}{2} X \left(\alpha_0, \frac{\Lambda}{p} \right) \right) + \text{const}. \quad (81)$$

Проводя замену (38) в формуле (80), можно восстановить зависимость эффективного действия от константы перенормировки Z :

$$d^{-1} \left(\alpha, \frac{\mu}{p} \right) = d_0^{-1} \left(\alpha_0, \frac{\Lambda}{p} \right) + \frac{C(R)}{\pi} \ln Z \left(\alpha, \frac{\mu}{p} \right). \quad (82)$$

Дифференцируя это выражение по импульсу p , получаем функцию Гелл-Манна-Лоу:

$$-\frac{\partial}{\partial \ln p} d^{-1} = -\frac{1}{\pi} C(R) \left(1 + \frac{\partial \ln G}{\partial \ln p} + \frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial \ln p} \right). \quad (83)$$

Используя формулу (79), переписываем этот вклад суперполей материи в виде

$$-\frac{C(R)}{\pi} \left(1 - \gamma(\alpha) - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{16p^2 f}{G} \right), \quad (84)$$

где $\gamma(\alpha)$ – аномальная размерность суперполя материи:

$$\gamma \left(d \left(\alpha, \frac{\mu}{p} \right) \right) = -\frac{\partial}{\partial \ln p} \ln ZG \left(\alpha, \frac{\mu}{p} \right). \quad (85)$$

(Вклад (84) войдет в функцию Гелл-Манна-Лоу, и его нужно сравнивать с числителем формулы (1).) Еще раз отметим, что полученный результат не зависит от выбора схемы перенормировки.

Заметим, что во всех вычисленных до сих пор диаграммах вклад последнего слагаемого в формуле (84) всегда был равен нулю. Более того, если в неабелевом случае справедливо тождество

$$\text{tr} \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \int d^8 x d^8 y \mathbf{V}_y D^a \mathbf{V}_x \frac{D_{az} \bar{D}_z^2}{4i\partial^2} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta j_z^+ \delta \mathbf{V}_y \delta \phi_{0x}^+} \Big|_{z=x, p=0} = 0, \quad (86)$$

то это будет верно всегда. Тем не менее в неабелевом случае это утверждение требует дополнительной проверки. Поэтому для общности мы привели поправку, связанную с нетривиальным вкладом функции f .

Заметим, что функция f реально может влиять только на диаграммы в трех и более петлях. Поэтому, если такой вклад возникал при каких-либо вычислениях схемно-зависимой функции $b(\alpha)$, то его всегда можно было устранить подходящим переопределением константы связи.

Наконец отметим, что сходство результата со случаем электродинамики означает, что если вклад функции f отсутствует, то расходимости имеются только в однопетлевом приближении. Детали соответствующего вычисления приведены в работе [6]. Это полностью согласуется со структурой супермультиплета аномалий и является характерной особенностью использования регуляризации высшими ковариантными производными [17].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе с помощью уравнений Швингера–Дайсона и тождеств Славнова–Тейлора вычисляется вклад суперполей материи в двухточечную функцию Грина калибровочного поля для случая суперсимметричной теории Янга–Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными. Такая регуляризация очень существенна, поскольку используемый метод вычисления основан на дифференцировании по параметру регуляризации и переходе к пределу нулевого импульса.

Во многом полученные результаты являются сходными с аналогичными результатами в случае электродинамики. Однако необходимо отметить и ряд отличий.

1. Вычисление выполнено с использованием метода фонового поля, поскольку этот метод позволяет сохранять явную калибровочную инвариантность эффективного действия. Без его использования было бы необходимо также вычислять константу перенормировки для калибровочного суперполя, что существенно усложнило бы процесс вычисления.

2. В неабелевом случае по сравнению с электродинамикой появляется дополнительный множитель $C(R)$, определенный формулой (2). Такой же множитель имеется и в точной β -функции НШВЗ.

3. Гипотетически возможны отклонения результата от точной β -функции, связанные с вкладом функции f , которая не может быть определена из тождества Славнова–Тейлора. В электродинамике, по-видимому, такие вклады исчезают благодаря некоторому новому тождеству для функций Грина. Однако в неабелевом случае появляются диаграммы, содержащие вершины с самодействием калибровочного поля, которые могут привести к нарушению дополнительного тождества. Явное вычисление вкладов этих диаграмм в рассматриваемой регуляризации пока не сделано. Поэтому мы также привели результат для вклада в β -функцию в том случае, если имеется нетривиальный вклад функции f .

Заметим, что в связи со сказанным выше можно указать две возможные причины отличия трехпетлевых вычислений в рамках размерной редукции от β -функции НШВЗ:

- 1) имеется нетривиальный вклад функции f ;
- 2) в предшествующих работах вычислялась не функция Гелл-Манна-Лоу, а β -функция, определенная как производная перенормированной константы связи в $\overline{\text{MS}}$ -схеме.

В настоящий момент мы не можем сказать, какой из этих вариантов (или же оба сразу) реализуется. Это требует либо проведения явных вычислений, либо нахождения истинной причины возникновения тождества (86).

Кроме того, необходимо научиться с помощью уравнений Швингера-Дайсона и тождеств Славнова-Тейлора вычислять вклад калибровочных полей и духов. В настоящий момент эта проблема находится в стадии исследования.

Благодарности. Работа была поддержана РФФИ (грант № 05-01-00541).

Список литературы

- [1] V. Novikov, M. Shifman, A. Vainstein, V. Zakharov, *Phys. Lett. B*, **166** (1985), 329.
- [2] А. А. Славнов, *ТМФ*, **23** (1975), 3; Т. Bakeyev, A. Slavnov, *Mod. Phys. Lett. A*, **11** (1996), 1539.
- [3] A. Soloshenko, K. Stepanyantz, *Two-loop renormalization of $N = 1$ supersymmetric electrodynamics, regularized by higher derivatives*, [hep-th/0203118](#); А. А. Солошенко, К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **134** (2003), 430.
- [4] А. А. Солошенко, К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **140** (2004), 437.
- [5] А. Пименов, К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **147:2** (2006), 290.
- [6] К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **142** (2005), 37.
- [7] К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **146** (2006), 385.
- [8] L. V. Avdeev, O. V. Tarasov, *Phys. Lett. B*, **112** (1982), 356.
- [9] I. Jack, D. R. T. Jones, C. G. North, *Nucl. Phys. B*, **473** (1996), 308.
- [10] I. Jack, D. R. T. Jones, C. G. North, *Phys. Lett. B*, **386** (1996), 138.
- [11] I. Jack, D. R. T. Jones, *Regularization of supersymmetric theories*, [hep-ph/9707278](#).
- [12] П. Уэст, *Введение в суперсимметрию и супергравитацию*, Мир, М., 1989; J. Gates, M. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel, *Superspace. One thousand and one lessons in supersymmetry. With a foreword by David Pines*, *Frontiers in Phys.*, **58**, Benjamin, Reading, MA, 1983.
- [13] P. West, *Nucl. Phys. B*, **268** (1986), 113.
- [14] H. Kluberg-Stern, J.-B. Zuber, *Phys. Rev. D*, **12** (1975), 467; 482.
- [15] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М., 1988.
- [16] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1973; К. Ицксон, Ж.-Б.Зюбер, *Квантовая теория поля*, т. 1, Мир, М., 1984.
- [17] К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **140** (2004), 53.

Поступила в редакцию 23.05.2006,
после доработки 05.07.2006