Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Лейтес, А. Н. Сергеев, Ортогональные многочлены дискретной переменной и алгебры Ли матриц комплексного порядка, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 2, 205–236

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:03:30

© 2000 г.

Д. А. Лейтес*, А. Н. Сергеев†

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДИСКРЕТНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И АЛГЕБРЫ ЛИ МАТРИЦ КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА

Предлагается единая интерпретация классических непрерывных многочленов Чебышева и ортогональных многочленов Хана дискретной переменной в терминах фейгинновской алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{C}$. q -Многочлены Чебышева и Хана можно интерпретировать подобным же образом и ввести ортогональные многочлены, соответствующие супералгебрам Ли. Кроме того, описаны квазиконечные модули над алгеброй $\mathfrak{gl}(\lambda)$, вещественная форма этой алгебры и условия унитарности квазиконечных модулей. Вводится также аналог тензоров над $\mathfrak{gl}(\lambda)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта работа представляет собой доклад памяти Миши Савельева. Работа состоит из трех частей: описание ортогональных многочленов (разделы 1, 8, 9), описание производящей функции следа и ее аналогов (раздел 2) и описание квазиконечных модулей над алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{C}$ (разделы 3–7).

Уравнение вида

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \quad (1.1)$$

где $\sigma(x)$ — многочлен степени 2, $\tau(x)$ — многочлен степени 1, а λ — константа, называется *уравнением гипергеометрического типа*, а его решения называются функциями *гипергеометрического типа*. Умножая уравнение (1.1) на подходящую функцию $\rho(x)$, его можно привести к самосопряженному виду

$$(\sigma(x)\rho(x)y')' + \lambda\rho(x)y = 0, \quad \text{где } (\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x). \quad (1.2)$$

Пусть y_m и y_n — решения уравнения (1.2), которым соответствуют различные собственные значения λ_m и λ_n . Если для некоторых, не обязательно конечных, чисел a и b функция $\rho(x)$ удовлетворяет условиям

$$\sigma(x)\rho(x)x^k \Big|_{x=a,b} = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \dots,$$

*Department of Mathematics, University of Stockholm, Stockholm, Sweden.
E-mail: mleites@matematik.su.se

†Балаковский университет техники, технологии и контроля, Балаково, Саратовская обл., Россия

то

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) dx = 0. \quad (1.3)$$

(Очевидно, если a и b конечны, достаточно потребовать, чтобы выполнялось условие $\sigma(x)\rho(x)|_{x=a,b} = 0$.)

Примером функции гипергеометрического типа являются *многочлены Якоби* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, определенные при $\alpha, \beta > -1$ как полиномиальные решения уравнения (1.2) для $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\rho = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, $(a, b) = (-1, 1)$ и $\tau = \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$. При $\alpha = \beta = 0$ многочлены Якоби называются многочленами *Чебышева*.

Разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение (1.1) на однородной решетке, очевидно, имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma(x) \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \\ + \frac{\tau(x)}{2} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \lambda y = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Положим $h = 1$ и $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$. Тогда разностное уравнение (1.4) принимает вид

$$\Delta(\sigma(x)\rho(x)\nabla y) + \lambda\rho(x)y = 0, \quad \text{где} \quad \Delta(\sigma(x)\rho(x)) = \tau(x)\rho(x). \quad (1.5)$$

Соотношения ортогональности

$$\sum_{x_i=a}^{b-1} y_m(x_i) y_n(x_i) \rho(x_i) = 0 \quad (1.6)$$

выполняются, если функция $\rho(x)$ удовлетворяет условиям

$$\sigma(x)\rho(x)x^k|_{x=a,b} = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \dots$$

Многочлен Хана $h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$ представляет собой полиномиальное решение уравнения (1.5), определенное при $\alpha, \beta > -1$ для $\sigma(x) = x(N + \alpha - x)$,

$$\rho = \frac{\Gamma(N + \alpha - x) \Gamma(\beta + 1 + x)}{\Gamma(x + 1) \Gamma(Nx)},$$

$(a, b) = (0, N)$ и $\tau = (\beta + 1)(N - 1) - (\alpha + \beta + 2)x$. Как было отмечено в работе [1], многочлены Хана были в действительности известны и Чебышеву и изучались им; Хан переоткрыл их и их q -аналоги.

Многочлен Чебышева $t_n(x, N)$ представляет собой полиномиальное решение уравнения (1.5), определенное при $\alpha = \beta = 0$, $\sigma(x) = x(N - x)$, $\rho = 1$, $(a, b) = (0, N)$ и $\tau = N - 1 - 2x$.

Обычный способ получения q -аналогов этих многочленов заключается в рассмотрении неоднородных разбиений отрезка $[a, b]$ [2]. Другой способ состоит в применении

нашего подхода к алгебре $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ вместо алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$, которая рассматривается в данной работе.

До настоящего времени предполагалось, что стандартные внутренние произведения (1.3) и (1.6) положительно определены. Хотя N , число узлов при однородном разбиении отрезка (a, b) , является целым, в выражениях для многочленов $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$ и $t_n(x, N)$ его можно заменить любым комплексным числом, поскольку эти многочлены зависят от N аналитически. Было замечено [2], что для чисто мнимых N имеется мера, приводящая к положительно-определенному произведению типа (1.3). Были открыты также многочисленные тождества, которым удовлетворяют ортогональные многочлены; полнота списка этих тождеств никогда не обсуждалась.

Дадим резюме полученных в данной работе результатов. Мы обнаружили, что определение непрерывных многочленов Чебышева и ортогональных многочленов Хана дискретной переменной (и их вариантов для неоднородных решеток, или в современной терминологии q -аналогов), а также все тождества, которым они удовлетворяют, следуют из свойств элементов Казимира алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$ матриц комплексного порядка (и ее q -аналога). Отправной точкой нашего подхода была попытка вычислить в явном виде значение квадратичного оператора Казимира на квазиконечных $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модулях, являющиеся источником ортогональных соотношений и различных тождеств, которым удовлетворяют вышеупомянутые многочлены. Более подробное описание квазиконечных модулей уровня 1 можно найти в работе [3].

Пусть число $\lambda = n > 0$ целое. Инвариантный функционал (след) на алгебре $\mathfrak{G} = \mathfrak{gl}(n)$ порождает невырожденную билинейную форму $(A, B) = \text{tr } AB$. Однородные компоненты $\mathfrak{G}_i$, где $\mathfrak{G}_i$ — пространство матриц с носителем на i -й наддиагонали (при $i > 0$) или поддиагонали (при $i < 0$), ортогональны относительно этой формы, и форма является невырожденной на $\mathfrak{G}_{-i} \oplus \mathfrak{G}_i$ и на $\mathfrak{G}_0$. Приведение билинейной формы к каноническому виду на таких пространствах дает классические многочлены дискретной переменной Хана и Чебышева соответственно. Выражая элементы Казимира (генераторы центра алгебры $U(\mathfrak{G})$) в терминах таких многочленов в стандартном базисе, получаем все тождества, которым эти многочлены удовлетворяют. Более точно, мы выражаем элементы как пространства $\mathfrak{G}_0$, так и пространства $\mathfrak{G}_{-i} \oplus \mathfrak{G}_i$ в терминах многочленов от одной переменной H . Детали приводятся в основном тексте статьи, здесь же мы только очертим идею.

Рассмотрим базис

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в алгебре $\mathfrak{sl}(2)$ с коммутационными соотношениями

$$[X, Y] = H, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [H, X] = 2X. \quad (1.7)$$

Рассмотрим *главное* вложение алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ в алгебру $\mathfrak{G} = \mathfrak{gl}(n)$ (это вложение соответствует n -мерному неприводимому $\mathfrak{sl}(2)$ -модулю):

$$Y \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1, i}, \quad H \mapsto \sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) E_{ii}, \quad X \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} i(n - i) E_{i, i+1}.$$

Тогда $\mathfrak{G}$ имеет вид

$$\mathfrak{G} = \bigoplus_{|i| \leq n-1} \mathfrak{G}_i,$$

где $\mathfrak{G}_i = \{X^i \mathfrak{G}_0\}$ и $\mathfrak{G}_{-i} = \{\mathfrak{G}_0 Y^i\}$ при $i > 0$, а $\mathfrak{G}_0 = \mathbb{C}[H]/(P_n(H))$ – подалгебра Картана; здесь

$$P_n(H) = \prod_{1 \leq i \leq n} (H - n + 2i - 1).$$

Применяя данный подход к алгебре $\mathfrak{gl}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, мы проясняем известные результаты относительно так называемых *непрерывных* вариантов классических многочленов дискретной переменной Хана и Чебышева (см. работы [2, 4]), относящиеся к чисто мнимым значениям $N = \lambda$, и получаем некоторые новые результаты. Таким образом, мы начинаем с объяснения того, что такое алгебра Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$, введенная в работе [5].

Квадратичный оператор Казимира алгебры $\mathfrak{sl}(2)$

$$\Omega = 2YX + \frac{1}{2}H^2 + H \quad (1.8)$$

лежит в центре алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$. Пусть I_λ – двусторонний идеал в ассоциативной алгебре $U(\mathfrak{sl}(2))$, порожденной элементом $\Omega - (\lambda^2 - 1)/2$. Оказывается, что ассоциативная алгебра $\tilde{\mathfrak{A}}_\lambda = U(\mathfrak{sl}(2))/I_\lambda$ проста при $\lambda \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, в остальных случаях $\tilde{\mathfrak{A}}_\lambda$ содержит идеал такой, что фактор по нему изоморфен матричной алгебре $\text{Mat}(|\lambda|)$. Положим [6]

$$\mathfrak{A}_\lambda = \begin{cases} \tilde{\mathfrak{A}}_\lambda & \text{при } \lambda \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \text{Mat}(|\lambda|) & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (1.9)$$

Ассоциативная алгебра с единицей $\mathfrak{A}_\lambda$ порождается элементами X , Y и H , удовлетворяющими соотношениям (1.7), а также соотношению

$$XY = \frac{1}{4}(\lambda^2 - (H - 1)^2) \quad (1.10)$$

и еще одному соотношению при целых λ

$$X^{|\lambda|} = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (1.11)$$

В дальнейшем полагаем $\mathfrak{gl}(\lambda) := L(\mathfrak{A}_\lambda)$, что дает алгебру Ли, получаемую из ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}_\lambda$, при замене произведения, обозначаемого точкой, на произведение, обозначаемое скобками.

Если в соотношении (1.9) заменить $U(\mathfrak{sl}(2))$ на ее q -деформацию $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, мы получим q -варианты классических многочленов, тождеств и т. д. Соответствующие подробности будут опубликованы отдельно.

Классики рассматривали ортогональные многочлены относительно знакоопределенного скалярного произведения, задаваемого мерой или соответствующей суммой для разностных уравнений. В традиционных подходах существование такой меры для комплексных значений некоторых параметров неочевидно [2, 4, 7]. В нашем подходе явно видно, что мера существует при любых $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и при чисто мнимых λ (см. ниже

формулу (9.2)). Видно, что формула (9.2) является знакоопределенной при вещественных λ таких, что $0 < |\lambda| < 1$.

Поскольку в точке общего положения скалярное произведение не знакоопределено, естественно также рассматривать и такие скалярные произведения. Более того, если заменить в приведенной выше конструкции алгебру $\mathfrak{sl}(2)$ супералгеброй Ли $\mathfrak{g}$, мы никогда не получим знакоопределенное скалярное произведение на супералгебре Картана. Незнакоопределенные (но невырожденные и симметричные) скалярные произведения рассматривались в литературе. Соответствующие ортогональные многочлены удовлетворяют дифференциальным уравнениям порядка, большего чем 2 [8–10] (мы благодарны Т. Я. Азизову, указавшему нам на эти работы). Подобные уравнения, вероятно, описывают что-то, имеющее отношение к действительности. Васильев в работе [11] показал возможную область применимости этих уравнений. Тем не менее физики предпочитают уравнения второго порядка, поскольку они описывают большинство реальных процессов.

В известных нам попытках обобщить классические непрерывные многочлены дискретной переменной на случай нескольких переменных в действительности рассматривается представление прямой суммы нескольких копий алгебры $\mathfrak{A}_\lambda$ (см. (1.9)) в тензорном произведении модулей Верма над $\mathfrak{sl}(2)$. Это ведет к суммам произведений многочленов от одной переменной, т.е. к несколько более сложным многочленам, но все же многочленам от одной переменной.

Наш подход приводит к многочленам гораздо более сложной структуры, а именно мы предлагаем в описанном выше подходе заменить алгебру $\mathfrak{sl}(2)$ на любую алгебру Ли или супералгебру Ли $\mathfrak{g}$. Это удастся сделать при условии, что $\mathfrak{g}$ обладает, во-первых, модулями Верма с большим, но конечным числом генераторов и, во-вторых, несколькими конечномерными представлениями. По-видимому, теория является наиболее богатой, если алгебра $\mathfrak{g}$ простая или близкая к простой (нетривиальное центральное расширение, производная алгебра и т.д.). Такие обобщения алгебр $\mathfrak{gl}(\lambda)$ появляются в моделях спина большего 2 и в модели Калоджеро–Сазерленда [11]. Результаты, полученные таким способом, будут рассмотрены в отдельной работе. В заключение отметим, что недавно один из авторов (А. С.) нашел, как охватить все классические многочлены дискретной переменной, а не только многочлены Чебышева и Хана, способом, несколько более общим, чем описанный в данной работе.

2. ФОРМУЛА СЛЕДА

ЛЕММА 2.1. Пусть A – ассоциативная алгебра, порождаемая алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, рассматриваемой как подпространство, т.е. A – фактор алгебры $U(\mathfrak{g})$. Тогда $[A, A] = [\mathfrak{g}, A]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $[x_1 \dots x_n, a] \in [\mathfrak{g}, A]$ для любых $a \in A$ и $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$. Проведем индукцию по n . При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$. Воспользуемся тождеством $[ab, c] = [a, bc] + [b, ca]$, имеющим место в любой ассоциативной алгебре (см. работу [12]). Тогда

$$[x_1(x_2 \dots x_n), a] = [x_1, x_2 \dots x_n a] \pm [x_2 \dots x_n, ax_1].$$

По предположению индукции второе слагаемое в правой части лежит в $[\mathfrak{g}, A]$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли или алгебра $\mathfrak{osp}(1|2n)$. Тогда $U(\mathfrak{g}) = Z(U(\mathfrak{g})) \oplus [U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g})]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$U(\mathfrak{g}) = Z(U(\mathfrak{g})) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \neq 0} n_\lambda L^\lambda \right)$$

– разложение на неприводимые $\mathfrak{g}$ -модули относительно присоединенного представления. Поскольку модули L^λ неприводимы,

$$[\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g})] = \left(\bigoplus_{\lambda \neq 0} n_\lambda L^\lambda \right)$$

(этот аргумент не работает для супералгебр Ли, отличных от $\mathfrak{osp}(1|2n)$, из-за отсутствия полной приводимости), что и требовалось доказать.

В дальнейшем ρ равно полусумме положительных корней.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана в алгебре $\mathfrak{g}$, которая является или простой алгеброй, или конечномерной алгеброй Ли; пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и $M^{\lambda-\rho}$ – модуль Верма со старшим весом λ (не $\lambda - \rho$); пусть J_λ – (левый) идеал алгебры $U(\mathfrak{g})$, равный ядру представления $U(\mathfrak{g})$ в $M^{\lambda-\rho}$. Положим $\mathfrak{A}_\lambda = U(\mathfrak{g})/J_\lambda$. Тогда $\mathfrak{A}_\lambda = \mathbb{C} \oplus [\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.1, $[\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{A}_\lambda]$; следовательно, как в следствии 2.1, $\mathfrak{A}_\lambda = Z(\mathfrak{A}_\lambda) \oplus [\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda]$. Однако $Z(\mathfrak{A}_\lambda)$ – гомоморфный образ $Z(U(\mathfrak{g}))$; следовательно, он равен $\mathbb{C}$, что и требовалось доказать.

Если $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, а λ – старший вес конечномерного модуля, то $P(\lambda) = \dim L^\lambda$ – многочлен от $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Рассмотрим $P(\lambda)$ для любых $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ таких, что

$$\prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

Согласно следствию 2.2 имеется только один функционал tr на $\mathfrak{A}_\lambda$ такой, что $\text{tr}(ab) = \text{tr}(ba)$ и $\text{tr}(1) = P(\lambda)$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $u \in U(\mathfrak{g})$, а $\tilde{u} \in \mathfrak{A}_\lambda$ – образ этого элемента. Тогда $\text{tr}(\tilde{u})$ – также многочлен от λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\# : Z(U(\mathfrak{g})) \oplus [U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g})] \rightarrow Z(U(\mathfrak{g}))$ – естественная проекция. По определению $\#$ имеем

$$\text{tr}(\tilde{u}) = \chi_\lambda(u^\#)P(\lambda) = \varphi(u^\#)(\lambda)P(\lambda), \quad (2.1)$$

где $\varphi : Z(U(\mathfrak{g})) \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ – гомоморфизм Хариш-Чандры [13]. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ – ее подалгебра Картана. Отождествим пространство $(\mathbb{C}[\mathfrak{h}])^*$ с алгеброй формальных степенных рядов от переменных $t = (t_1, \dots, t_n)$ следующим образом:

$$f \mapsto \sum_{\nu=(\nu_1, \dots, \nu_n)} f \left(\frac{h_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \dots \frac{h_n^{\nu_n}}{\nu_n!} \right) t_1^{\nu_1} \dots t_n^{\nu_n}, \quad (2.2)$$

где $h_1, \dots, h_n$ – базис в $\mathfrak{h}$, а $\nu_i \in \mathbb{Z}_+$ для любых i . Пусть $e^\lambda(t) = e^{\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n}$ и все λ_i подразумеваются различными. Тогда функционал tr соответствует ряду

$$\psi(\lambda, t) = \frac{\bigoplus_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda)}}{\bigoplus_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\rho)}}(t). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.2

$$\text{tr} \left(\frac{h_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \dots \frac{h_n^{\nu_n}}{\nu_n!} \right)$$

– многочлен от λ . Если $\lambda \in P_{++}$ (где P_{++} – множество старших весов конечномерных модулей), то ряд

$$\hat{\psi}(\lambda, t) = \sum_{\nu=(\nu_1, \dots, \nu_n)} \text{tr} \left(\frac{h_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \dots \frac{h_n^{\nu_n}}{\nu_n!} \right) t_1^{\nu_1} \dots t_n^{\nu_n}$$

согласуется с (2.3) вследствие формулы Вейля для характеров. Однако $\psi(\lambda, t) = \sum_{\nu} P_{\nu} t^{\nu}$, где P_{ν} – некоторые многочлены. Действительно, поскольку

$$P_{\nu}(\lambda) = \text{tr} \left(\frac{h_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \dots \frac{h_n^{\nu_n}}{\nu_n!} \right) \quad \text{при} \quad \lambda \in P_{++},$$

это справедливо при любых $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Следовательно, $\hat{\psi}(\lambda, t) = \psi(\lambda, t)$. Теорема доказана.

3. СТАРШИЕ ВЕСА КВАЗИКОНЕЧНЫХ МОДУЛЕЙ НАД АЛГЕБРОЙ $\mathfrak{gl}(\lambda)$

Пусть L^i – неприводимый $\mathfrak{sl}(2)$ -модуль со старшим весом i . Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$, рассматриваемая как $\mathfrak{sl}(2)$ -модуль относительно присоединенного действия $\mathfrak{sl}(2)$, имеет вид

$$\mathfrak{gl}(\lambda) = \begin{cases} L^0 \oplus L^2 \oplus \dots \oplus L^{2|\lambda|-2} & \text{при } \lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ L^0 \oplus L^2 \oplus \dots & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$ обладает $\mathbb{Z}$ -градуировкой

$$\mathfrak{gl}(\lambda) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{gl}(\lambda)_i,$$

где

$$\mathfrak{gl}(\lambda)_i = \{z \in \mathfrak{gl}(\lambda) : [H, z] = 2iz\}, \quad (3.2)$$

и возрастающей фильтрацией

$$\mathfrak{gl}(\lambda)_{(i)} = \bigoplus_{k \leq i} \mathfrak{gl}(\lambda)_k.$$

Таким образом, мы можем говорить о *треугольном разложении* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\lambda)$, где

$$\mathfrak{g}_{\pm} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{gl}(\lambda)_{\pm i},$$

а также о *параболических подалгебрах*, *старших весах* и т.д. [14].

Следуя работе [14], назовем $\mathfrak{g}$ -модуль V *квазиконечным*, если $V = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ и $\dim V_j < \infty$ для любых j . Мы рассматриваем только *градуированные* $\mathfrak{g}$ -модули, т.е. такие, что $\mathfrak{g}_i V_j \subset V_{i+j}$.

Хорошо известный факт, что $\mathfrak{gl}(n)$ имеет нетривиальное одномерное представление $(A \mapsto \text{tr } A)$, имеет свой аналог и для $\mathfrak{gl}(\lambda)$.

Подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ называется *параболической*, если она содержит $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ как собственную подалгебру. Например, для любого $P \in \mathbb{C}[H]$ мы полагаем $\mathfrak{p}_{-1}(P) = P\mathbb{C}[H]Y$ и считаем, что $\mathfrak{p}(P)$ порождается $\mathfrak{p}_{-1}(P)$ и $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$. Это дает *минимальную* параболическую подалгебру, соответствующую P .

ЛЕММА 3.1. *Минимальная параболическая подалгебра $\mathfrak{p}(P)$ имеет вид*

$$\mathfrak{p}(P) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{p}(P)_k,$$

где $\mathfrak{p}(P)_k = \mathfrak{g}_k$ при $k \geq 0$ и $\mathfrak{p}(P)_{-k} = I_k \cdot Y^k$, а I_k — идеал в $\mathbb{C}[H]$, порожденный $P(H)P(H+2) \dots P(H+2k-2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [14] (*mutatis mutandis*).

Пусть $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$, $\mathfrak{g}_+ v_\lambda = 0$ и $M^\lambda = \text{ind}_{\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+}^{\mathfrak{g}} (\mathbb{C}v_\lambda)$ — соответствующий модуль Верма; пусть L^λ — неприводимый $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом λ .

ЛЕММА 3.2 [14]. *Следующие условия эквивалентны:*

I. M^λ содержит вакуумный вектор, который лежит в $M_{(-1)}^\lambda$ — пространстве фильтрации -1 .

II. Модуль L^λ является квазиконечным.

III. L^λ есть фактор обобщенного модуля Верма $M^{\lambda, P} = \text{ind}_{\mathfrak{p}(P)}^{\mathfrak{g}} (\mathbb{C}v_\lambda)$ для некоторого $P \in \mathbb{C}[H]$.

Шойхет называет $\deg P$ *уровнем* модуля $M^{\lambda, P}$. В работе [3] он описывает модули уровня 1 более детально, чем мы это делаем здесь.

Мы уже установили, что $\mathfrak{g}_0^* \simeq (\mathbb{C}[H])^* \simeq \mathbb{C}[[t]]$, где изоморфизм алгебр имеет вид

$$F: (\mathbb{C}[H])^* \rightarrow \mathbb{C}[[t]], \quad \theta \mapsto F_\theta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta(H^k)}{k!} t^k.$$

Следующая теорема описывает набор формальных степенных рядов, соответствующих старшим весам квазиконечных модулей. Напомним, что *квазимногочлен* представляет собой выражение вида $\sum R_i(t) e^{\alpha_i t}$, где $R_i(t)$ — многочлены.

ТЕОРЕМА 3.1. *Формальный степенной ряд, соответствующий старшему весу любого квазиконечного модуля над $\mathfrak{gl}(\lambda)$, имеет вид $R(t)/(1 - e^{-2t})$, где $R(t)$ – квазимногочлен такой, что $R(0) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что легко доказываются следующие утверждения:

а) если $\theta \in (\mathbb{C}[H])^*$, а

$$F_\theta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta(H^k)}{k!} t^k$$

– соответствующий ряд, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta((H+a)^k)}{k!} t^k = e^{at} F_\theta(t);$$

б) для любого $R(H) \in \mathbb{C}[H]$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta(R(H)H^k)}{k!} t^k &= R\left(\frac{d}{dt}\right) F_\theta(t), \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta(R(H+a)(H+a)^k)}{k!} t^k &= R\left(\frac{d}{dt}\right) (e^{at} F_\theta(t)). \end{aligned}$$

Если θ – старший вес квазиконечного модуля над $\mathfrak{gl}(\lambda)$, то по лемме 3.2 существует многочлен $P(H) \in \mathbb{C}[H]$ такой, что θ продолжается на одномерное представление минимальной параболической подалгебры, соответствующей P . Нетрудно проверить, что $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \cap \mathfrak{g}_0 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{p}_{-1}]$. Следовательно, $\theta([\mathfrak{g}_1, \mathfrak{p}_{-1}]) = 0$.

Обозначим

$$T(H) = XY = \frac{1}{4}(\lambda^2 - (H+1)^2). \quad (3.3)$$

Тогда условие $\theta([\mathfrak{g}_1, \mathfrak{p}_{-1}]) = 0$ можно выразить как $\theta([X, P(H)H^kY]) = 0$ или как

$$\theta(T(H-2)P(H-2)(H-2)^k - P(H)H^kT(H)) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta(T(H-2)P(H-2)(H-2)^k)}{k!} t^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta(T(H)P(H)(H)^k)}{k!} t^k &= \\ = T\left(\frac{d}{dt}\right) P\left(\frac{d}{dt}\right) (e^{-2t} F_\theta(t)) - T\left(\frac{d}{dt}\right) P\left(\frac{d}{dt}\right) (F_\theta(t)) &= \\ = T\left(\frac{d}{dt}\right) P\left(\frac{d}{dt}\right) ((e^{-2t} - 1)F_\theta(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $(e^{-2t} - 1)F_\theta(t)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и, следовательно, многочленом. Очевидно, что $R(0) = 0$.

Обратно, если $R(t)$ представляет собой квазимногочлен, $R(0) = 0$ и $P(d/dt)R(t) = 0$, мы имеем

$$T\left(\frac{d}{dt}\right)P\left(\frac{d}{dt}\right)R(t) = 0,$$

и условие $\theta([g_1, p_{-1}]) = 0$ для $p_{-1} = P(H)g_0Y$ удовлетворяется, если мы положим

$$F_\theta(t) = \frac{R(t)}{e^{-2t} - 1}$$

(что корректно определено, поскольку $R(0) = 0$). Следовательно, θ является старшим весом квазиконечного модуля. Теорема доказана.

Рассмотрим след на $gl(0)$. Если $P = 1$, то параболическая подалгебра в $\mathfrak{g} = gl(0)$ совпадает с полной алгеброй и поэтому $[g, g] \cap g_0 = [g_1, g_{-1}] \cap g_0 \not\cong 1$. Это доказывает, что $\mathfrak{g} \neq [g, g]$ и тем самым что существует инвариантный функционал θ на $\mathfrak{g} = gl(\lambda)$. Таким образом, функция $R = (1 - e^{-2t})F_\theta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$T\left(\frac{d}{dt}\right)R(t) = 0,$$

которое в явном виде записывается как

$$\left(\lambda^2 - \left(\frac{d}{dt} + 1\right)^2\right)R(t) = 0.$$

Если $\lambda \neq 0$, то решения имеют вид $R(t) = c_1 e^{(\lambda-1)t} + c_2 e^{-(\lambda+1)t}$, а из начального условия $R(0) = 0$ следует, что

$$F_\theta(t) = c \frac{e^{(\lambda-1)t} - e^{-(\lambda+1)t}}{1 - e^{-2t}}.$$

Отождествим скаляры со скалярными матрицами и нормируем функционал θ (след) естественным образом, т.е. полагая $\theta(1) = \lambda$. Такая нормировка фиксирует значение $c = 1$.

Ясно, что при $\lambda = 0$ характеристическое уравнение имеет много корней и

$$F_\theta(t) = c \frac{te^{-t}}{1 - e^{-2t}}.$$

Таким образом, $sl(0)$ является бесконечномерной алгеброй Ли с ∞ -мерным тождественным модулем.

4. АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{gl}(\lambda)$ И $\mathfrak{gl}^-(\infty)$, $\mathfrak{gl}^+(\infty)$, $\mathfrak{gl}(\infty)$

Пусть V – векторное пространство с фиксированным базисом v_i , $i \in \mathbb{Z}$, пусть V^+ – подпространство, порожденное элементами v_i при $i \geq 0$, а V^- – подпространство, порожденное элементами v_i при $i < 0$. Пусть $\mathfrak{gl}^-(\infty)$, $\mathfrak{gl}^+(\infty)$ и $\mathfrak{gl}(\infty)$ – алгебры Ли линейных преобразований соответственно пространств V^- , V^+ и V таких, что их матрицы в фиксированных базисах имеют носитель на конечном числе диагоналей, параллельных главной (это число зависит от матрицы).

На алгебре $\mathfrak{gl}(\infty)$ имеется (единственный) нетривиальный 2-коцикл

$$c(A, B) = \text{tr}([J, A]B), \quad \text{где} \quad J = \sum_{i \leq 0} E_{ii} - \sum_{i > 0} E_{ii}. \quad (4.1)$$

Обозначим через $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ соответствующее центральное расширение; скобка в $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ имеет вид

$$[A, B] = AB - BA + \text{tr}([J, A]B) \cdot z,$$

где z – новый центральный элемент.

В частности, для матричных элементов имеем

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj} + \delta_{il} \delta_{jk} (\kappa(i) - \kappa(j)) \cdot z,$$

где $\kappa(i) = 1$, если $i \leq 0$, и $\kappa(i) = 0$ в других случаях.

Модули Хариш-Чандры $M^{\lambda, s} = \text{Span}(v_i : i \in \mathbb{Z})$ для любых $\lambda, s \in \mathbb{C}$ определяются над алгеброй $\mathfrak{sl}(2)$ как линейная оболочка элементов v_i , удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} H v_i &= (s + 2i) v_i, \\ X v_i &= \frac{1}{2} \sqrt{(\lambda - s - 2i - 1)(\lambda + s + 2i + 1)} v_{i+1}, \\ Y v_i &= \frac{1}{2} \sqrt{(\lambda - s - 2i + 1)(\lambda + s + 2i - 1)} v_{i-1}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Легко видеть, что квадратичный оператор Казимира Ω действует на $M^{\lambda, s}$ как скалярный оператор умножения на $(\lambda^2 - 1)/2$ и $M^{\lambda, s} \simeq M^{\lambda, s'}$, если $s - s' \in 2\mathbb{Z}$.

Предположим, что $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тогда согласно [13] $M^{\lambda, s}$ неприводим, если $\lambda - s \notin 2\mathbb{Z} + 1$, и $M^{\lambda, s} = M_+^{\lambda, s} \oplus M_-^{\lambda, s}$, если $\lambda - s \in 2\mathbb{Z} + 1$, где $M_+^{\lambda, s}$ – неприводимый $\mathfrak{sl}(2)$ -модуль с младшим весом $\lambda + 1$, а $M_-^{\lambda, s}$ – неприводимый $\mathfrak{sl}(2)$ -модуль со старшим весом $\lambda - 1$; эти модули исчерпывают все неприводимые $\mathfrak{sl}(2)$ -модули с диагональным H -действием таким, что Ω действует как скалярный оператор умножения на $(\lambda^2 - 1)/2$.

Существует более прозрачная реализация модулей Хариш-Чандры. Положим

$$X^+ = x \frac{\partial}{\partial y} - 2(\lambda - 1) \frac{x}{y}, \quad X^- = y \frac{\partial}{\partial x} \quad \left(\text{т.е.} \quad H = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} - (\lambda - 1) \right)$$

и $w_i = x^{a+i} y^{b-i}$. Тогда $\lambda = a + b + 1$, $s = a - b$ и $w_i = v_i$ с точностью до скалярного множителя.

Модуль $M^{\lambda, s}$ над $\mathfrak{gl}(\lambda)$ определяет вложение $\phi: \mathfrak{gl}(\lambda) \rightarrow \mathfrak{gl}(\infty)$. Поскольку $H^2(\mathfrak{gl}(\lambda)) = 0$ [5], существует подъем ϕ до гомоморфизма $\hat{\phi}: \mathfrak{gl}(\lambda) \rightarrow \widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$, который имеет вид $\hat{\phi}(u) = \phi(u) + \theta(u) \cdot z$, где θ — линейный функционал на $\mathfrak{gl}(\lambda)$ такой, что $\theta([u, v]) = c(\phi(u), \phi(v))$ в терминах коцикла на $\mathfrak{gl}(\infty)$, который превращает эту алгебру в $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$. Заметим, что θ определяется однозначно с точностью до функционала, пропорционального следу на $\mathfrak{gl}(\lambda)$.

Следующая теорема описывает $\hat{\phi}$ более явным образом.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\lambda)$. Тогда $\hat{\phi}(\mathfrak{g}_i) = \phi(\mathfrak{g}_i)$ при $i \neq 0$ и

$$\hat{\phi}(e^{tH}) = \phi(e^{tH}) - \frac{e^{st} - e^{-(\lambda+1)t}}{1 - e^{-2t}} z. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \sum \alpha_i E_{i+1, i}, & \text{где} & \quad \alpha_i = \frac{1}{2} \sqrt{(\lambda - s - 2i - 1)(\lambda + s + 2i + 1)}, \\ \phi(H) &= \sum \gamma_i E_{i, i}, & \text{где} & \quad \gamma_i = s + 2i, \\ \phi(Y) &= \sum \beta_i E_{i-1, i}, & \text{где} & \quad \beta_i = \frac{1}{2} \sqrt{(\lambda - s - 2i + 1)(\lambda + s + 2i - 1)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Следовательно,

$$[J, \phi(X)] = \sum (\kappa(i) - \kappa(i+1)) \alpha_i E_{i+1, i}$$

и $\phi(H^k) \phi(Y) = \sum \gamma_i^k \beta_{i+1} E_{i, i+1}$. Отсюда

$$[J, \phi(X)] \phi(H^k) \phi(Y) = \sum \gamma_i^k \beta_{i+1} \alpha_i (\kappa(i) - \kappa(i+1)) E_{i+1, i+1}$$

и

$$\begin{aligned} c(\phi(X), \phi(H^k Y)) &= \text{tr}([J, \phi(X)] \phi(H^k Y)) = \sum \gamma_i^k \beta_{i+1} \alpha_i (\kappa(i) - \kappa(i+1)) = \\ &= \gamma_0^k \beta_1 \alpha_0 = \frac{1}{4} s^k (\lambda^2 - (s+1)^2) = T(s) s^k. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} T\left(\frac{d}{dt}\right)(e^{st}) &= T(s) e^{st} = \sum_{k \geq 0} \frac{T(s) s^k}{k!} t^k = \sum_{k \geq 0} \frac{c(\phi(X), \phi(H^k Y))}{k!} t^k = \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{\theta([X, H^k Y])}{k!} t^k = \sum_{k \geq 0} \frac{\theta(X H^k Y - H^k Y X)}{k!} t^k = \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{\theta(T(H-2)(H-2)^k - H^k T(H))}{k!} t^k = T\left(\frac{d}{dt}\right)((e^{-2t} - 1)\theta(e^{tH})). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$T\left(\frac{d}{dt}\right)((e^{-2t} - 1)\theta(e^{tH}) - e^{st}) = 0$$

и

$$(e^{-2t} - 1)\theta(e^{tH}) = \begin{cases} e^{st} + c_1 e^{-(\lambda+1)t} + c_2 e^{(\lambda-1)t}, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ e^{st} + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

В обоих случаях, вычитая слагаемое, пропорциональное следу, получим

$$(e^{-2t} - 1)\theta(e^{tH}) = e^{st} - e^{-(\lambda+1)t}.$$

Теорема 4.1 доказана.

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{gl}(\infty)$ над алгеброй усеченных многочленов. Пусть $R_m = \mathbb{C}[\varepsilon]$, где $\varepsilon^{m+1} = 0$. Распиряя модуль $M^{\lambda,s}$ до модуля $M_{R_m}^{\lambda,s}$ над R_m , т.е. считая, что $s \in R_m$, можно определить действие алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ теми же формулами. Если v_i — исходный базис, то в качестве фиксированного базиса в расширенном модуле $M_{R_m}^{\lambda,s}$ мы возьмем $\varepsilon^j v_i$ для всех $i \in \mathbb{Z}$ и $j = 1, \dots, m$. Заметим, что в этом базисе в $M_{R_m}^{\lambda,s}$ действие элемента H недиагонально.

Алгебра $\mathfrak{gl}(\infty; R_m)$ и ее подалгебры $\mathfrak{gl}^\pm(\infty; R_m)$ определены естественным образом. Центральное расширение $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty; R_m)$ определяется теми же формулами.

Рассматривая $s + \varepsilon$ вместо $s \in \mathbb{C}$, получим следующее следствие теоремы 4.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Гомоморфизм $\hat{\phi}: \mathfrak{gl}(\lambda) \rightarrow \widehat{\mathfrak{gl}}(\infty; R_m)$, индуцированный вложением $\phi: \mathfrak{gl}(\lambda) \rightarrow \mathfrak{gl}(\infty; R_m)$, удовлетворяет равенству $\hat{\phi}(\mathfrak{gl}(\lambda)_i) = \phi(\mathfrak{gl}(\lambda)_i)$ при $i \neq 0$ и*

$$\hat{\phi}(e^{tH}) = \phi(e^{tH}) - \left(\frac{e^{st} - e^{-(\lambda+1)t}}{1 - e^{-2t}} + \frac{e^{st}}{1 - e^{-2t}} \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon^j t^j}{j!} \right) z. \quad (4.5)$$

Заметим, что мы “вынуждены” рассматривать центральное расширение $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ для описания квазиконечных модулей над $\mathfrak{gl}(\lambda)$, поскольку $\mathfrak{gl}(\infty)$ имеет большее число квазиконечных представлений, чем $\mathfrak{gl}(\infty)$, и рассмотрение только $\mathfrak{gl}(\infty)$ -модулей оказывается недостаточным.

Следующие утверждения описывают условия на старший вес неприводимого модуля, которые являются необходимыми и достаточными, для того чтобы модуль был квазиконечным.

Обозначим через $\mathfrak{gl}_f(\infty)$ и $\mathfrak{gl}_f^\pm(\infty)$ соответственно подалгебры в $\mathfrak{gl}(\infty)$ и $\mathfrak{gl}^\pm(\infty)$, состоящие из матриц с конечным носителем. Пусть $\mathfrak{h}$ обозначает подалгебру Картана любой из этих алгебр Ли; рассмотрим ее как порожденную диагональными элементами E_{ii} . Заметим, что ограничение вложения $\hat{\phi}: \mathfrak{gl}_f(\infty) \rightarrow \widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ на $\mathfrak{h}$ имеет вид $E_{ii} \mapsto \phi(E_{ii}) + \kappa(i)z$, где ϕ — естественное вложение $\mathfrak{gl}_f(\infty)$ в $\mathfrak{gl}(\infty)$. Если θ — вес модуля (со старшим весом) над одной из указанных алгебр Ли ($\mathfrak{gl}(\infty)$ и ее подалгебры, а также $\mathfrak{gl}_f(\infty)$ и ее подалгебры), мы можем найти координаты $\theta_i = \theta(E_{ii})$ веса θ , рассматривая $\mathfrak{h}$ указанным выше способом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *$\mathfrak{gl}_f(\infty)$ -Модуль со старшим весом Λ является квазиконечным, если и только если существует лишь конечное число различных координат $\lambda_i = \Lambda(E_{ii})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V квазиконечен и генерируется вектором старшего веса v . Поскольку $\dim V_{-1} < \infty$ для конечного множества I $V_{-1} = \text{Span}(E_{i+1,i}v)_{i \in I}$. Пусть $k \notin I$ и $k+1 \notin I$. Тогда

$$E_{k+1,k}v = \sum_{i \in I} \alpha_i E_{i+1,i}v,$$

поэтому $E_{k,k+1}(E_{k+1,k}v) = 0$ или, что эквивалентно, $(E_{k,k} - E_{k+1,k+1})v = 0$, т.е. $\lambda_k = \lambda_{k+1}$.

Обратное утверждение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. $\mathfrak{gl}(\infty)$ -Модуль V со старшим весом Λ , где $\lambda_i = \lambda(E_{ii})$, является квазиконечным, если и только если существует лишь конечное число ненулевых координат λ_i , где $\lambda_i = \Lambda(E_{ii})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая V как $\mathfrak{gl}_f(\infty)$ -модуль, мы видим, что имеется только конечное число различных координат λ_i , откуда следует, что $\lambda_k = \lambda_+$ и $\lambda_{-k} = \lambda_-$ при достаточно больших k . Поэтому $E_{k,k+1}(E_{k+1,k}v) = 0$ и, поскольку V является неприводимым, $E_{k+1,k}v = 0$ для всех, кроме конечного числа, k .

Пусть

$$A = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i,i+1}, \quad B_k = \sum_{i \geq k} E_{i+1,i}.$$

Тогда

$$[A, B_k] = \sum_{i \geq k} E_{i,i} - \sum_{i \geq k} E_{i+1,i+1} = E_{k,k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} [A, B_k]v &= E_{k,k}v = \lambda_k v = AB_kv - B_kAv = AB_kv = A \left(\sum_{i \geq k, i \in I} E_{i+1,i}v \right) = \\ &= \sum_{i \geq k, i \in I} [A, E_{i+1,i}]v = \sum_{i \geq k, i \in I} (E_{i,i} - E_{i+1,i+1})v = \\ &= \left(\sum_{i \geq k, i \in I} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \right) v = (\lambda_k - \lambda_j)v, \end{aligned}$$

где j — наибольший индекс в конечном множестве I . Поэтому $\lambda_k = \lambda_k - \lambda_j$ и $\lambda_j = 0$.

Аналогично, если

$$C_k = \sum_{i \leq k} E_{i+1,i},$$

то

$$[A, C_k] = \sum_{i \leq k} E_{i,i} - \sum_{i \leq k} E_{i+1,i+1} = E_{k+1,k+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} [A, C_k]v &= \lambda_{k+1}v = AC_kv = A \left(\sum_{i \leq k} E_{i+1,i}v \right) = \sum_{i \leq k} [A, E_{i+1,i}]v = \\ &= \sum_{i \leq k} (E_{i,i} - E_{i+1,i+1})v = \sum_{i \leq k} (\lambda_i - \lambda_{i+1})v = (\lambda_j - \lambda_{k+1})v. \end{aligned}$$

Таким образом, $\lambda_j = 0$ для достаточно больших j . Обратное утверждение следует из предложения 4.1, что и требовалось доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ -Модуль V со старшим весом (Λ, c) , где c — значение центрального заряда на z , квазиконечен, если и только если имеется лишь конечное число ненулевых координат λ_i , где $\lambda_i = \Lambda(E_{ii})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве предложения 4.2, покажем, что имеется только конечное число различных координат λ_i и $E_{k+1,k}v \neq 0$ для конечного числа значений k .

Пусть

$$A = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i,i+1}, \quad J = \sum_{i \leq 0} E_{i,i}.$$

Тогда $[A, J] = E_{0,1}$, следовательно, $c(A, B) = \text{tr}(E_{0,1}B)$ для любых $B \in \mathfrak{gl}(\infty)$ и, таким образом, $c(A, B_k) = \kappa(k)$. Имеем

$$\begin{aligned} [A, B_k]v &= E_{k,k}v = (E_{k,k} + \kappa(k)z)v = AB_kv = A \left(\sum_{i \geq k, i \in I} E_{i+1,i}v \right) = \\ &= \sum_{i \geq k, i \in I} [A, E_{i+1,i}]v = \sum_{i \geq k, i \in I} (E_{i,i} - E_{i+1,i+1} + \delta_{i0}z)v = \\ &= \kappa(k)z + \left(\sum_{i \geq k, i \in I} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \right)v = \kappa(k)cv + (\lambda_k - \lambda_+)v = \kappa(k)c + (\lambda_k)v, \end{aligned}$$

поэтому $\lambda_+ = 0$.

Для $C_k = \sum_{i \leq k} E_{i+1,i}$ имеем $c(A, C_k) = \kappa(-k)$, следовательно,

$$\begin{aligned} [A, C_k]v &= (-E_{k+1,k+1} - \kappa(-k))v = (-\lambda_{k+1} - \kappa(-k)c)v = AC_kv = \\ &= A \sum_{i \leq k} E_{i+1,i}v = \sum_{i \leq k} [A, E_{i+1,i}]v = \sum_{i \leq k} (E_{i,i} - E_{i+1,i+1} + \delta_{i0}z)v = \\ &= (\kappa(-k)c + \lambda_- - \lambda_{k+1})v. \end{aligned}$$

Таким образом, $\lambda_- = 0$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\mathfrak{g}$ — одна из алгебр Ли $\mathfrak{gl}(\infty; R_m)$ или $\mathfrak{gl}^\pm(\infty; R_m)$, или их вариантов с крышками; $\mathfrak{g}$ -модуль V со старшим весом θ , заданный своими координатами $\theta_{ij} = (\varepsilon^j E_{ii})$, является квазиконечным, если и только если имеется лишь конечное число ненулевых координат θ_{ij} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательствам предложений 4.1, 4.2 и теоремы 4.1.

Пусть V — один из модулей $M_{R_m}^{\lambda,s}$ или, если $M_{R_m}^{\lambda,s}$ приводим, один из его неприводимых подмодулей. Получаем гомоморфизм алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$ в $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\infty; R_m)$ или $\mathfrak{gl}^\pm(\infty; R_m)$. Пусть θ — линейный функционал, удовлетворяющий условиям теоремы 4.2. Мы можем рассматривать θ как линейный функционал на подалгебре Картана алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$. Вычислим соответствующую производящую функцию.

ТЕОРЕМА 4.3. Производящая функция $F_\theta(t)$ для функционала θ имеет вид:

I. Для $M_{R_m}^{\lambda, s}$

$$F_\theta(t) = \frac{\sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{(s-2i)t} \sum_{j=0}^m \frac{(\theta_{ij} - \theta_{i-1,j})t^j}{j!}}{1 - e^{-2t}} - \left(\frac{e^{st} - e^{-(\lambda+1)t}}{1 - e^{-2t}} c + \frac{e^{st}}{1 - e^{-2t}} \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{j!} \right). \quad (4.6)$$

II. Для модуля со старшим весом $\lambda - 1$

$$F_\theta(t) = \frac{\sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda-2i-1)t} \sum_{j=0}^m \frac{(\theta_{ij} - \theta_{i-1,j})t^j}{j!}}{1 - e^{-2t}}. \quad (4.7)$$

III. Для модуля со старшим весом $-\lambda - 1$

$$F_\theta(t) = \frac{\sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{(-\lambda-2i-1)t} \sum_{j=0}^m \frac{(\theta_{ij} - \theta_{i-1,j})t^j}{j!}}{1 - e^{-2t}}. \quad (4.8)$$

IV. Для модуля с младшим весом $\lambda + 1$

$$F_\theta(t) = \frac{\sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda+2i+1)t} \sum_{j=0}^m \frac{(\theta_{ij} - \theta_{i-1,j})t^j}{j!}}{1 - e^{-2t}}. \quad (4.9)$$

V. Для модуля с младшим весом $1 - \lambda$

$$F_\theta(t) = \frac{\sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{(1-\lambda+2i)t} \sum_{j=0}^m \frac{(\theta_{ij} - \theta_{i-1,j})t^j}{j!}}{1 - e^{-2t}}. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только утверждение I, остальные доказываются аналогично. Пусть ϕ – гомоморфизм, определяющий $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -действие на $M^{\lambda, s}$. Тогда

$$\phi(H) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (s + \varepsilon - 2i) E_{ii},$$

следовательно,

$$\phi(e^{tH}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{(s+\varepsilon-2i)t} E_{ii}$$

и

$$\begin{aligned} \phi((1 - e^{-2t})e^{tH}) &= \phi(e^{tH}) - \phi(e^{t(H-2)}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{(s+\varepsilon-2i)t} (E_{ii} - E_{i-1,i-1}) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{(s-2i)t} \sum_{j=0}^m \varepsilon^j (E_{ii} - E_{i-1,i-1}) \frac{t^j}{j!}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(1 - e^{-2t})F_\theta(t) = \theta(\phi(e^{tH}) - \phi(e^{t(H-2)})) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{(s-2i)t} \sum_{j=0}^m \frac{\theta_{ij} - \theta_{i-1,j}}{j!} t^j.$$

Поскольку только конечное число координат θ_{ij} не равно нулю, все суммы в действительности являются конечными, что и требовалось доказать.

5. КВАЗИКОНЕЧНЫЕ МОДУЛИ НАД АЛГЕБРОЙ $\mathfrak{gl}(\lambda)$

Ниже мы покажем, что не все квазиконечные модули над $\mathfrak{gl}(\lambda)$ могут быть представлены в каноническом виде, как это было сделано для $W_{1+\infty}$ в работе [14].

Пусть $\mathfrak{gl}^{\text{hol}}(\lambda)$ – голоморфное пополнение алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$, т.е. алгебра функций от H , голоморфных на всей комплексной прямой $\mathbb{C}$, и пусть $\mathfrak{gl}_i^{\text{hol}}(\lambda) = \{f(H)X^i\}$ при $i > 0$, $\mathfrak{gl}_i^{\text{hol}}(\lambda) = \{f(H)Y^{-i}\}$ при $i < 0$ и $f \in \mathfrak{gl}_0^{\text{hol}}(\lambda)$. Соотношения в пополненной алгебре следуют из уравнений (1.7) и (1.10):

$$Xf(H) = f(H-2)X, \quad Yf(H) = f(H+2)Y, \quad XY = \frac{1}{4}(\lambda^2 - (H-1)^2).$$

Следующее предложение доказывается аналогично соответствующему утверждению работы [14].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Пусть V – квазиконечный $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модуль. Тогда $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -действие естественно продолжается до $\mathfrak{gl}_i^{\text{hol}}(\lambda)$ -действия при $i \neq 0$.*

Введем на $\mathbb{C}$ соотношение эквивалентности, положив

$$[s] = \begin{cases} s + 2\mathbb{Z}, & \text{если } s + \lambda \notin 2\mathbb{Z} + 1, \\ s - 2\mathbb{Z}_+, & \text{если } s = \pm\lambda + 1, \\ s + 2\mathbb{Z}_+, & \text{если } s = \pm\lambda - 1. \end{cases}$$

Поставим в соответствие каждому классу $[s]$ неприводимый $\mathfrak{sl}(2)$ -модуль M^s с диагональным действием генератора H , множество собственных значений которого совпадает с $[s]$; обозначим через $\mathfrak{gl}_s(\infty)$ алгебру Ли линейных преобразований в M^s с конечным числом ненулевых диагоналей в H -диагональном базисе.

Следующая теорема аналогична и доказывается так же, как соответствующая теорема в работе [14].

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $[s_i]$ – различные, а m_i – неотрицательные целые числа. Пусть*

$$\phi: \mathfrak{gl}(\lambda) \longrightarrow \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{gl}_{s_i}(\infty; R_{m_i})$$

определяется модулем $\bigoplus_{i=1}^k M_{R_{m_i}}^{s_i}$. Тогда для любого квазиконечного $\mathfrak{g}$ -модуля V любой его $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -подмодуль является $\mathfrak{g}$ -подмодулем. В частности, если V неприводим как $\mathfrak{g}$ -модуль, он неприводим и как $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модуль.

Опишем, следуя работе [14], структуру квазиконечных $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модулей. Пусть θ – старший вес квазиконечного $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модуля и

$$F_\theta(t) = \frac{R(t)}{1 - e^{-2t}},$$

где $R(t) = \sum r_i(t)e^{s_i t}$ – соответствующий формальный степенной ряд (см. раздел 3). Многочлены $r_i(t)$ называются *кратностями*.

Для каждого s обозначим через $R_s(t)$ сумму всех квазимногочленов с показателями из класса $[s]$. Тогда $R(t) = \sum R_s(t)$, где сумма идет по представителям различных классов эквивалентности. Пусть $R_s(t) = \sum r_{is}(t)e^{(s-2i)t}$. Из определений легко получить следующие свойства квазимногочленов:

- а) $R(0) = 0$;
- б) сумма всех кратностей $R_{\lambda+1}(t)$, а также сумма всех кратностей $R_{-\lambda+1}(t)$ равны нулю;
- в) сумма всех кратностей $R_{\lambda-1}(t)$, а также сумма всех кратностей $R_{-\lambda-1}(t)$ равны константе.

Введем обозначение $\Lambda = [\lambda - 1] \cap [\lambda + 1] \cap [-\lambda - 1] \cap [-\lambda + 1]$. Квазимногочлену R , удовлетворяющему свойствам “а”–“в”, поставим в соответствие $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модуль $V(s)$ следующим образом:

- 1) если $s \notin \Lambda$, то $V(s)$ – неприводимый $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ -модуль с центральными зарядами

$$c_j = - \sum_{i \in I} r_i^{(j)}(0),$$

где $j = 0, \dots, \max(\deg r_i)$, а остальные координаты старшего веса равны

$$\theta_{ij} = \sum_{l \leq i} (r_l^{(j)}(0) + \delta_{l0} c_j);$$

- 2) если $s \notin [\lambda - 1] \cap [-\lambda - 1]$ и

$$R_s = \sum_i r_i(y) e^{s-2i},$$

положим

$$c = - \sum_{i \in I} r_i(0), \quad \theta_{ij} = \sum_{l \leq i} (r_l^{(j)}(0) + \delta_{l0} \delta_{j0} c_j),$$

тогда $V(s)$ – соответствующий $\mathfrak{gl}^-(\infty)$ -модуль;

- 3) если $s \notin [-\lambda + 1] \cap [\lambda + 1]$, положим

$$\theta_{ij} = \sum_{l \leq i} r_l^{(j)}(0),$$

тогда $V(s)$ – соответствующий $\mathfrak{gl}^+(\infty)$ -модуль.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть квазимногочлен

$$R = \sum_{i=1}^k R_{s_i}(t)$$

разложен по различным классам эквивалентности показателей; пусть R удовлетворяет перечисленным выше свойствам “а”–“в”. Тогда неприводимый квазиконечный модуль со старшим весом $R(t)$ изоморфен модулю

$$V = V(s_1) \otimes \dots \otimes V(s_k) \otimes (\alpha \operatorname{tr}),$$

где $\alpha \operatorname{tr}$ – неприводимый 1-мерный модуль, соответствующий следу на $\mathfrak{gl}(\lambda)$, а модули $V(s_i)$ построены так, как это описано выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4.3 модуль V неприводим как $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модуль. Поэтому достаточно показать, что ограничение старшего веса этого модуля на $\mathfrak{gl}(\lambda)$ равно $R(t)/(1 - e^{-2t})$. Пусть $s = s_i$ — один из показателей такой, что $s \notin \Lambda$. Тогда предложение 5.1 означает, что существует старший вес θ_s для $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty; R_m)$, производящая функция которого равна

$$\frac{R_s(t) + c_s e^{-(\lambda+1)t}}{1 - e^{-2t}},$$

где $c_s = -R_s(0)$.

Если $s \in \Lambda$, то же предложение означает, что производящая функция равна $R_s(t)/(1 - e^{-2t})$, где сумма всех показателей R_s равна нулю.

Наконец, производящая функция следа есть

$$\alpha \frac{e^{(\lambda-1)t} - e^{-(\lambda+1)t}}{1 - e^{-2t}}.$$

Поэтому для нашего модуля V производящая функция имеет вид $R(t)/(1 - e^{-2t})$, где при соответствующем выборе c_s

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{s \notin \Lambda} (R_s(t) + c_s e^{-(\lambda+1)t}) + \\ &\quad + R_{\lambda+1}(t) + R_{-\lambda+1}(t) + R'_{-\lambda-1}(t) + R'_{\lambda-1}(t) + \alpha(e^{(\lambda-1)t} - e^{-(\lambda+1)t}) = \\ &= \sum_{s \notin \Lambda} R_s(t) + R_{\lambda+1}(t) + R_{-\lambda+1}(t) + \\ &\quad + (R'_{-\lambda-1}(t) - \alpha e^{-(\lambda+1)t}) + (R'_{\lambda-1}(t) + \alpha e^{(\lambda-1)t}) = \sum_{s \notin \Lambda} R_s(t), \end{aligned}$$

что требовалось доказать.

6. УНИТАРНЫЕ МОДУЛИ НАД АЛГЕБРОЙ $\mathfrak{gl}(\lambda)$

Напомним, что *антиинволюция* на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ — это $\mathbb{R}$ -линейное отображение $\omega: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ такое, что

$$\omega(\alpha x) = \bar{\alpha} \omega(x), \quad \omega([x, y]) = [\omega(x), \omega(y)], \quad \omega^2 = \text{id}$$

для любых $\alpha \in \mathbb{C}$ и $x, y \in \mathfrak{g}$.

Задав антиинволюцию ω , мы можем снабдить модуль V^* , дуальный к $\mathfrak{g}$ -модулю V , другой структурой $\mathfrak{g}$ -модуля, а именно

$$(xl)(v) = l(\omega(x)v) \quad \text{для любых } l \in V^*, v \in V \text{ и } x \in \mathfrak{g}. \quad (6.1)$$

В частности, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ и ω переставляет $\mathfrak{g}_-$ и $\mathfrak{g}_+$, то $\mathfrak{g}$ -гомоморфизм $M \rightarrow M^*$ является хорошо определенным; здесь M — модуль Верма с вектором старшего веса v , а структура $\mathfrak{g}$ -модуля на M^* задается уравнением (6.1).

Действительно, пусть $v^* \in M^*$, причем $v^*(v) = 1$ и $v^*(u) = 0$ для любых u с весом, меньшим чем вес v . Следовательно, если $x \in \mathfrak{g}_+$, то $(xv^*)(u) = v^*(\omega(x)u) = 0$ и, таким образом, v^* также является вектором старшего веса. Если $\theta(\omega(H)) = \overline{\theta(H)}$, где

θ – вес вектора v , то вес вектора v^* также равен θ . Поэтому существует $\mathfrak{g}$ -изоморфизм $M \rightarrow M^*$ или эрмитова $\mathfrak{g}$ -инвариантная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на M . Если $\langle \cdot, \cdot \rangle$ положительно определена, модуль M называется *унитарным*.

В данном разделе мы укажем условия на старший вес квазиконечного $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модуля, для того чтобы этот модуль был унитарен. Сначала опишем автоморфизмы алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$.

Как хорошо известно, описание автоморфизмов алгебры функций $\mathcal{F}$ (в особенности многочленов) представляет собой сложную задачу. Столь же сложна и задача описания автоморфизмов алгебры Ли $\det(\mathcal{F})$ дифференцирований алгебры $\mathcal{F}$. Для уменьшения числа автоморфизмов до разумного значения представляется естественным рассматривать только *внешние* автоморфизмы, т.е. классы автоморфизмов по модулю группы *внутренних* автоморфизмов. Какие автоморфизмы следует рассматривать как внутренние? Для алгебры $\det(\mathcal{F})$ естественным образом подходят автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами алгебры $\mathcal{F}$. Аналогично можно сказать, что автоморфизм ϕ алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$ является *внутренним*, если он является также автоморфизмом ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}_\lambda$.

Распространим это определение на алгебру $LU_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ и назовем автоморфизм этой алгебры внутренним, если он также является автоморфизмом ассоциативной алгебры $U_{\mathfrak{g}}(\lambda)$.

Напомним, что линейное отображение $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ есть *антиавтоморфизм* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если $\phi([x, y]) = [\phi(y), \phi(x)]$. Для ассоциативных алгебр определение антиавтоморфизма аналогично. Например, отображение t такое, что ${}^t|_{\mathfrak{g}} = -\text{id}$, называется *главным антиавтоморфизмом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Главный антиавтоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ можно продолжить до антиавтоморфизма ассоциативной алгебры $U(\mathfrak{g})$: ${}^t(x \otimes y) = {}^t y \otimes {}^t x$. Ясно, что t сохраняет элементы Казимира.

ТЕОРЕМА 6.1. *Группа внешних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}/2$ и порождена классом элемента $-t$, где $-t: x \mapsto -{}^t x$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in \text{Aut}(\mathfrak{gl}(\lambda))$. Тогда $\psi(Y)$, $\psi(H)$ и $\psi(X)$ порождают алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{sl}(2)$. Более того, они порождают $\mathfrak{A}_\lambda$, потому что вес $\psi(X)^n$ равен $2n$ относительно веса $\psi(H)$. Следовательно, существует сюръективный гомоморфизм

$$\tau: U(\mathfrak{sl}(2)) \rightarrow \mathfrak{A}_\lambda, \quad X \mapsto \psi(X), \quad H \mapsto \psi(H), \quad Y \mapsto \psi(Y).$$

Поскольку $\tau(\Omega) \in \mathbb{C}$, то существует такое $\mu \in \mathbb{C}$, при котором $\tau(\Omega) = (\mu^2 - 1)/2$. Поэтому мы получаем сюръективный гомоморфизм и, следовательно, изоморфизм $\mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{A}_\lambda$. В работе [6] Диксмье доказал, что это возможно, только если $\lambda^2 = \mu^2$. Таким образом, можно считать, что $\lambda = \mu$ и τ является автоморфизмом. Пусть $\psi_1 = \tau^{-1}\psi$, тогда $\psi_1|_{\mathfrak{sl}(2)} = \text{id}$.

Следовательно, ψ_1 является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$, рассматриваемой как $\mathfrak{sl}(2)$ -модуль. Поэтому $\psi_1|_{L^{2i}} = c_i \in \mathbb{C}$. Поскольку L^2 и L^4 порождают алгебру Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$, можно заключить, что $c_i = c_2^{i-1}$ для любых $i \geq 1$. Более того, из условия $[L^4, L^4] \supset L^2$ следует, что $c_2^2 = 1$. Поэтому $c_2 = \pm 1$. Если $c_2 = 1$, то $\psi_1 = \text{id}$, а если $c_2 = -1$, то $\psi_1 = \phi$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.2. Если $\lambda^2 \notin \mathbb{R}$, то $\mathfrak{gl}(\lambda)$ не имеет вещественных форм, т.е. инволютивных антилинейных автоморфизмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω — инволютивный антилинейный автоморфизм алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$. Тогда $\omega(X)$, $\omega(H)$ и $\omega(Y)$ порождают $\mathfrak{A}_\lambda$. Следовательно, существует сюръективный гомоморфизм

$$\tau: U(\mathfrak{sl}(2)) \rightarrow \mathfrak{A}_\lambda, \quad \tau = \text{id} \quad \text{на} \quad X, H, Y,$$

откуда мы получаем изоморфизм $\tau: \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{A}_\lambda$. Согласно работе [6] это возможно, только если $\lambda^2 = \mu^2$. Следовательно, $\lambda = \mu$ и τ является автоморфизмом. Тогда $\omega_1 = \tau^{-1}\omega$ — антилинейный автоморфизм $\mathfrak{gl}(\lambda)$ такой, что

$$\omega_1(X) = X, \quad \omega_1(H) = H, \quad \omega_1(Y) = Y.$$

Положим $z_i = (\text{ad } X)^i(Y^2)$, в частности $z_0 = z$. Тогда $\text{Span}(z_i: i = 1, \dots, 4)$ образует базис L^4 и, если $\omega_1(Y^2) = cY^2$, то очевидно, что $\omega_1(z_i) = cz_i$ при $i = 1, \dots, 4$. Согласно [15] в $\mathfrak{gl}(\lambda)$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} 3[z_1, z_2] - 2[z, z_3] &= 24(\lambda^2 - 4)Y, \\ 4[z_3, [z, z_1]] - 3[z_2, [z, z_2]] &= 576(\lambda^2 - 9)z. \end{aligned}$$

Применив ω_1 к обеим частям этих соотношений, получим

$$\begin{aligned} c^2(\lambda^2 - 4) &= \bar{\lambda}^2 - 4, \\ c^3(\lambda^2 - 9) &= c(\bar{\lambda}^2 - 9), \end{aligned}$$

откуда $c^2 = 1$ и $\lambda^2 = \bar{\lambda}^2$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Если $\lambda^2 \neq \bar{\lambda}^2$, то $\mathfrak{gl}(\lambda)$ не имеет инволютивных антилинейных автоморфизмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω — инволютивный антилинейный автоморфизм; очевидно, что $\tau: X \leftrightarrow Y$ и $\tau(H) = H$ определяет антиавтоморфизм алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$. Тогда $\tau \circ \omega$ — инволютивный антилинейный автоморфизм, что и требовалось доказать.

Если $\lambda^2 = \bar{\lambda}^2$, то $\mathfrak{A}_\lambda$ обладает инволютивным антилинейным автоморфизмом ω :

$$\omega(X) = Y, \quad \omega(Y) = X, \quad \omega(H) = H. \quad (6.2)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать унитарные модули относительно такого автоморфизма.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ и пусть $F_\theta(t) = R(t)/(1 - e^{-2t})$, где $R(t)$ — квазимногочлен, у которого ни одна из экспонент s_i не принадлежит $\Lambda = [\lambda - 1] \cap [\lambda + 1] \cap [-\lambda - 1] \cap [-\lambda + 1]$. $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -Модуль с характером $F_\theta(t)$ унитарен, если и только если

$$F_\theta(t) = \sum n_i \frac{e^{-(\lambda+1)t} - e^{s_i t}}{1 - e^{-2t}}, \quad \text{где} \quad n_i \in \mathbb{Z}_+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V — неприводимый модуль с характером $F_\theta(t)$, а $P(H)$ — аннигилятор Yv , где v — вектор старшего веса. Тогда $P(H)$ — характеристический многочлен оператора H в V_{-1} . Однако поскольку унитарная форма инвариантна и $\omega(H) = H$, H является самосопряженным; следовательно, все корни многочлена P вещественны. Далее, если α — кратный корень кратности $m > 1$, многочлен P имеет вид $P = (H - \alpha)^m Q(H)$. При $u = (H - \alpha)^{m-1} Q(H)v$ имеем

$$\langle u, u \rangle = \langle (H - \alpha)^{m-1} Q(H)v, (H - \alpha)^{m-1} Q(H)v \rangle = \langle Q(H)v, (H - \alpha)^{2m-2} Q(H)v \rangle = 0.$$

Вследствие эрмитовости $u = 0$. Таким образом, $m = 1$.

Согласно теореме 5.2 V имеет вид $V(s_1) \otimes \cdots \otimes V(s_k)$, где $V(s_i)$ — неприводимые $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ -модули. Очевидно, что V унитарен, если и только если каждый $V(s_i)$ унитарен. Далее, согласно работе [14] мы знаем, что $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ -модуль $V(s)$ унитарен, если и только если $\theta_i - \theta_{i+1} + \delta_{i0}c \in \mathbb{Z}_+$ при любых i , где θ_i — координаты старшего веса, а c — значение центрального заряда. Теорема доказана.

7. АЛГЕБРА $\mathfrak{gl}(\lambda)$ И СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА

В данном разделе мы строим явную реализацию некоторых неприводимых $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модулей. А именно мы раскладываем тензорные степени модуля Верма над $\mathfrak{sl}(2)$ и указываем соответствующие характеристические многочлены и q -характеры.

ЛЕММА 7.1. Пусть A — ассоциативная алгебра, пусть $\mathfrak{S}_n$ действует естественным образом на $A^{\otimes n}$. Тогда алгебра $\mathfrak{S}_n$ -инвариантов $(A^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ порождается элементами вида

$$a \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$s(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)}.$$

Пусть B — алгебра, порожденная элементами $s(a, 1, \dots, 1)$ при любых $a \in A$. Пусть $|s(a_1, \dots, a_n)|$ — число элементов a_i , отличных от 1. Докажем, что $B \simeq (A^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$.

Индукцией по $|s(a_1, \dots, a_n)|$ покажем, что $s(a_1, \dots, a_n) \in B$. Действительно, если $|s(a_1, \dots, a_n)| = 1$, то по определению $s(a_1, \dots, a_n) = s(a, 1, \dots, 1) \in B$. Пусть $|s(a_1, \dots, a_n)| = l > 1$. Рассмотрим

$$s(a_1, \dots, a_{l-1}, 1, \dots, 1)s(a_l, 1, \dots, 1) = \alpha s(a_1, \dots, a_l, 1, \dots, 1) + \cdots,$$

где α — отличная от нуля постоянная, а точки означают линейную комбинацию членов $s(b_1, \dots, b_m, 1, \dots, 1)$, в которых $m < l$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $V = M^{\lambda-1}$ – модуль Верма со старшим весом $\lambda - 1$ над $\mathfrak{sl}(2)$ (и $\mathfrak{gl}(\lambda)$). Тогда

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\nu} V^{\nu} \otimes S^{\nu},$$

где V^{ν} – неприводимый $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модуль, S^{ν} – неприводимый $\mathfrak{S}_n$ -модуль, а ν пробегает разбиения n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что V неприводим не только как $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модуль, но и как $\mathfrak{A}_{\lambda}$ -модуль. Тогда очевидно, что $W = V^{\otimes n}$ неприводим как $\mathfrak{A}_{\lambda}^{\otimes n}$ -модуль.

Образ $U(\mathfrak{gl}(\lambda))$ в $\text{End}(W)$ соответствует подалгебре, порожденной элементами $s(a, 1, \dots, 1)$ при $a \in \mathfrak{gl}(\lambda)$, следовательно, согласно лемме 7.1 он изоморфен $(\mathfrak{A}_{\lambda}^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$.

Разложим W на изотопические $\mathfrak{S}_n$ -модули $W = \bigoplus_{\nu} W^{\nu}$ и представим каждый W^{ν} в виде $W^{\nu} = V^{\nu} \otimes S^{\nu}$, где V^{ν} – неприводимый $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модуль. Такое представление не является единственным; мы можем, например, положить $V^{\nu} = e_{\nu}(W)$ для всех минимальных идемпотентов в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, соответствующих разбиению ν .

Чтобы показать, что V^{ν} неприводим как $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модуль, рассмотрим $V_1^{\nu} = \text{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(S^{\nu}, W)$. Как $\mathfrak{gl}(\lambda)$ -модуль V_1^{ν} изоморфен модулю V^{ν} . Пусть $\phi, \psi \in V_1^{\nu}$ и $\phi \neq 0$. Покажем, что существует вектор $u \in U(\mathfrak{gl}(\lambda))$ такой, что $u\phi = \psi$. Действительно, поскольку W неприводим как $\mathfrak{A}_{\lambda}^{\otimes n}$ -модуль, теорема плотности [16, гл. XVII, § 3, теорема 1] утверждает, что существует $w \in \mathfrak{A}_{\lambda}^{\otimes n}$ такой, что $w\phi(v_i) = \psi(v_i)$, где v_i образуют базис в S^{ν} . (Поскольку S^{ν} неприводим и $\phi \neq 0$, векторы $\psi(v_i)$ являются линейно независимыми при $i = 1, \dots, \dim S^{\nu}$.)

Усредним элемент $w\phi$ по $\mathfrak{S}_n$:

$$(w\phi)^{\#} = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum \sigma(w\phi)\sigma^{-1} = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum \sigma(w)\sigma^{-1}(\phi) = w^{\#}\phi.$$

С другой стороны, поскольку $w\phi = \psi$, мы видим, что $(w\phi)^{\#} = (\psi)^{\#} = \psi$, т.е. $w^{\#}\phi = \psi$, и мы можем считать, что $w \in (\mathfrak{A}_{\lambda}^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$. Таким образом, существует вектор $u \in U(\mathfrak{gl}(\lambda))$ такой, что $u\phi = \psi$. Другими словами, V_1^{ν} неприводим, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 7.1.

1. Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$. Производящая функция, соответствующая старшему весу ν , имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \nu_i e^{(\lambda-2i+1)t}. \quad (7.1)$$

2. Представим ν в виде $\nu = (\theta_1^{\alpha_1} \dots \theta_m^{\alpha_m})$, где $\theta_1 > \dots > \theta_m > 0$ и $\alpha_i \neq 0$ для любых i , а θ^{α} обозначает произведение $\theta \dots \theta$ из α элементов. Тогда характеристический многочлен модуля V^{ν} есть

$$P(H) = \prod_{i=1}^m (H - \lambda - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \dots - 2\alpha_i - 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 следует из теоремы 4.3. Для доказательства утверждения 2 умножим (7.1) на $1 - e^{-2t}$ и получим

$$\nu_1 e^{(\lambda-1)t} + \sum_{i=1}^{n-1} (\nu_{i+1} - \nu_i) e^{(\lambda-2i+1)t} - \nu_n e^{(\lambda-2n+1)t}. \quad (7.2)$$

Следовательно сумма (7.2) без первого слагаемого является решением обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, чье характеристическое уравнение имеет в точности указанный вид. Следствие 7.1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Пусть $a = e^\lambda$ и $q = e^{-\alpha}$, где α – положительный корень алгебры $\mathfrak{sl}(2)$. Тогда q -характер модуля V^ν есть

$$\chi_\nu = \frac{a^{|\nu|} q^{n(\nu)}}{\prod_{x \in \nu} (1 - q^{h(x)}),} \quad (7.3)$$

где $|\nu|$ – число клеток в диаграмме Юнга, соответствующей ν ,

$$n(\nu) = \sum_{i \geq 1} \nu_i,$$

а $h(x)$ – длина крюка, соответствующего клетке x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно работе [17, пример 2 в разд. 3] для S -функции s_ν имеем

$$\chi_\nu = s_\nu(a, aq, aq^2, \dots) = a^{|\nu|} s_\nu(1, q, q^2, \dots),$$

что и равно правой части формулы (7.3). Следствие доказано.

8. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДЛЯ АЛГЕБРЫ $\mathfrak{gl}(n)$

ТЕОРЕМА 8.1. В алгебре $\mathfrak{gl}(n)$ имеют место следующие утверждения:

I. Для базиса $e_{kl} = (\text{ad } Y)^{k-l}(X^k)$, где $0 \leq k \leq n-1$ и $-k \leq l \leq k$, имеем

$$\langle e_{kl}, e_{k'l'} \rangle = \delta_{k,k'} \delta_{l+l', 0}.$$

II. Пусть элементы f_{kl} определяются уравнениями ($0 \leq l \leq k$)

$$\begin{aligned} (\text{ad } Y)^{k-l}(X^k) &= X^l f_{kl}, \\ (\text{ad } Y)^{k+l}(X^k) &= f_{k,-l} Y^l. \end{aligned}$$

Положим $T_i(H) = (n^2 - (H + 2i - 1)^2)/4$ и $\alpha_i = n - 2i + 1$ при $i = 1, \dots, n$. При фиксированном $l \geq 0$ и любых $k \geq l$ многочлены f_{kl} образуют базис, ортогональный относительно формы

$$\langle f, g \rangle = \begin{cases} \sum_{i=l+1}^n f(\alpha_i) g(\alpha_i) T_1(\alpha_i) \dots T_l(\alpha_i) & \text{для } l > 0, \\ \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) g(\alpha_i) & \text{для } l = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

III. С точностью до постоянного множителя многочлены f_{kl} соответствуют многочленам Хана одной дискретной переменной

$$f_{kl}(H) = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} l-k, l+k+1, \frac{1}{2}(1-n-H) \\ l+1, l+1-n \end{matrix} \middle| 1 \right) \times T_0(\alpha_{l+1}) \dots T_0(\alpha_k), \quad (8.2)$$

где

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \beta_1, \beta_2 \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_i (\alpha_3)_i}{(\beta_1)_i (\beta_2)_i} \frac{z^i}{i!} \quad (8.3)$$

– обобщенная гипергеометрическая функция, $(\alpha)_0 = 1$ и $(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+i-1)$ при $i > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Заметим, во-первых, что подпространства L^{2k} в разложении $\mathfrak{gl}(n) = L^0 \oplus L^2 \oplus \dots \oplus L^{2n-2}$ попарно ортогональны. Действительно, форма $A, B \mapsto \text{tr} AB$ определяет инвариантное спаривание пространств L^k и L^l и, следовательно, $\mathfrak{sl}(2)$ -гомоморфизм $L^k \rightarrow L^l$, что возможно только при $k = l$. Более того, ясно, что $\langle \mathfrak{gl}(n)_k, \mathfrak{gl}(n)_l \rangle \neq 0$, если и только если $k + l = 0$. Теперь заметим, что $\mathfrak{gl}(n)_l \cap L^{2k} = \text{Span}((\text{ad } Y)^{k-l}(X))$. Это доказывает утверждение I.

II. Пусть $X^l f(H) \in \mathfrak{gl}(n)_l$ и $g(H)Y^l \in \mathfrak{gl}(n)_{-l}$. Тогда

$$\text{tr}(g(H)Y^l X^l f(H)) = \text{tr}(f(H)g(H)T_1(H) \dots T_l(H)).$$

Как легко проверить,

$$\text{tr} f(H) = \sum_{1 \leq i \leq n} f(\alpha_i) \quad \text{для любых} \quad f(H) \in \mathfrak{gl}(n)_0.$$

Отсюда следует (8.1).

Более того, утверждение I означает, что для любого фиксированного l , лежащего между $-k$ и k , многочлены f_{kl} и $f_{k,-l}$ образуют два двойственных базиса, т.е. $\langle f_{kl}, f_{kl'} \rangle = \delta_{l+l',0}$. Однако степени многочленов f_{kl} и $f_{k,-l}$ равны, что означает совпадение этих многочленов с точностью до множителя. Это доказывает утверждение II.

Утверждение III следует из того факта, что ортогональные многочлены однозначно определяются весовой функцией и интервалом, на котором рассматривается скалярное произведение. Уравнение (8.2) следует из сравнения коэффициентов при старших членах. Теорема 8.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Многочлены Хана определены для трех параметров α , β и N следующим образом:

$$h_p^{(\alpha,\beta)}(z, N) = \frac{(-1)^p \Gamma(N)(\beta)_p}{p! \Gamma(N-p)} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -p, \alpha + \beta + p + 1, -z \\ \beta + 1, l - N \end{matrix} \middle| 1 \right). \quad (8.4)$$

Наши многочлены f_{kl} совпадают с точностью до множителя с $h_p^{(\alpha,\beta)}(z, N)$ при $\alpha = \beta = l$, $p = k - l$, $z = (H + n - 1)/2$ и $N = n - 1$.

Теперь покажем, как основные свойства многочленов Хана следуют из теории представлений алгебры $\mathfrak{sl}(2)$. Для любого $f(H) \in \mathbb{C}[H]$ положим

$$\Delta f(H) = f(H+2) - f(H), \quad \nabla f(H) = f(H) - f(H-2). \quad (8.5)$$

ТЕОРЕМА 8.2. Рассмотрим $\mathfrak{gl}(n)$ как $\mathfrak{sl}(2)$ -модуль относительно образа главного вложения, и пусть Ω – квадратичный оператор Казимира (1.8).

I. Оператор Ω является самосопряженным по отношению к форме $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а многочлены $X^l f_{kl}$ – собственные функции Ω , соответствующие собственным значениям $2k(k+1)$. Многочлены f_{kl} удовлетворяют разностному уравнению

$$T_0(H)\nabla\Delta(f) - (l+1)(H+l)\Delta(f) + (k-l)(k+l+1)f = 0. \quad (8.6)$$

II. Имеет место формула

$$f_{kl} = \begin{cases} \frac{\nabla^{k-l}(T_1 \dots T_k)}{T_1 \dots T_l}, & \text{если } l > 0, \\ \nabla^k(T_1 \dots T_k), & \text{если } l = 0. \end{cases} \quad (8.7)$$

III. Имеет место формула

$$\langle f_{kl}, f_{kl} \rangle = \frac{(k-l)!(k!)^2}{(k+l)!(2k+1)} n(n^2-1^2) \dots (n^2-k^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Поскольку форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\mathfrak{sl}(2)$ -инвариантна, $\langle [w, u], v \rangle = -\langle u, [w, v] \rangle$ при любых $u, v \in \mathfrak{gl}(n)$ и $w \in \mathfrak{sl}(2)$. Через $*$ обозначим $U(\mathfrak{sl}(2))$ -действие на $\mathfrak{gl}(n)$; по индукции заключаем, что $\langle w * u, v \rangle = -\langle u, w^t * v \rangle$, где теперь $w \in U(\mathfrak{sl}(2))$, а t – главная антиинволюция. Поскольку, как легко проверить, $\Omega^t = \Omega$, мы имеем $\langle \Omega * u, v \rangle = \langle u, \Omega * v \rangle$, т.е. оператор Ω является самосопряженным. Так как $\mathfrak{gl}(n) = \oplus L^{2i}$ и $X^l f_{kl} = (\text{ad } Y)^{k-l}(X^k) \in L^{2k}$, мы видим, что $X^l f_{kl}$ является собственной функцией оператора Ω с собственным значением $2k(k+1)$. Применяя Ω к $X^l f_{kl}$, получаем уравнение (8.6).

II. Напомним тождество

$$(\text{ad } y)^p(a) = \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} y^{p-j} a y^j.$$

Положим в нем $a = X^k$, $p = k-l$ и умножим на Y^l слева. Получим

$$\begin{aligned} Y^l X^l f_{kl} &= Y^l (\text{ad } Y)^{k-l}(X^k) = Y^l \left(\sum_{j=0}^{k-l} (-1)^j \binom{k-l}{j} Y^{k-l-j} X^k Y^j \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{k-l} (-1)^j \binom{k-l}{j} y^{k-j} X^k Y^j = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} T_{j-1} \dots T_0 T_1 \dots T_{k-j}. \end{aligned}$$

Однако

$$\nabla^{k-l}(f)(H) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f(H-2j)$$

для любой функции f и, следовательно,

$$Y^l X^l f_{kl} = \nabla^{k-l}(T_1 \dots T_k).$$

Поскольку $Y^l X^l = T_1 \dots T_l$, утверждение II доказано.

III. Модуль L^{2k} является линейной оболочкой векторов $v_l = (\text{ad } Y)^{k-l}(X^k)$ при $-k \leq l \leq k$; следовательно,

$$\langle v_l, v_m \rangle = -\langle v_{l-1}, v_{m+1} \rangle = \dots = (-1)^l \langle v_0, v_{l+m} \rangle$$

согласно инвариантности формы. Таким образом, $\langle v_l, v_{-l} \rangle = (-1)^l \langle v_0, v_0 \rangle$. Однако $v_l = X^l f_{kl} = (\text{ad } Y)^{k-l}(X^k)$ и $v_{-l} = f_{k,-l} Y^l = (\text{ad } Y)^{k+l}(X^k)$.

Теперь напомним, что многочлены f_{kl} и $f_{k,-l}$ совпадают с точностью до постоянного множителя, и сравним старшие коэффициенты. Мы видим, что

$$f_{k,-l} = (-1)^l \frac{(k+l)!}{(k-l)!} f_{k,l}.$$

Следовательно,

$$\langle f_{k,l}, f_{k,l} \rangle = \text{tr}(f_{k,l} Y^l \cdot X^l f_{k,l}) = (-1)^l \frac{(k+l)!}{(k-l)!} \langle v_l, v_{-l} \rangle = \frac{(k+l)!}{(k-l)!} \langle v_0, v_0 \rangle.$$

Остается показать, что

$$\langle v_0, v_0 \rangle = \frac{n(n^2-1^2) \dots (n^2-k^2)}{2k+1} (k!)^2.$$

Очевидно, что $f_k = ((\text{ad } Y)^k(X^k))^2 \in U(\mathfrak{sl}(2))$, откуда $\langle v_0, v_0 \rangle = \text{tr}_n \phi_n(f_k)$, где tr_n — след на $\mathfrak{gl}(n)$ и ϕ_n — гомоморфизм из $U(\mathfrak{sl}(2))$ в $\mathfrak{gl}(n)$, индуцированный главным вложением. Теперь ясно, что $P_k(n) = \text{tr}_n(\phi_n(f_k))$ — многочлен степени $2k+1$. Более того, этот многочлен является нечетным. Однако $\phi_n(X^k) = 0$ при $n \leq k$ и $\phi_n(f_k) = 0$. Следовательно, $P_k(n) = 0$, если $n \leq k$, и $P_k(-n) = 0$, потому что P_k — нечетный многочлен. Отсюда имеем

$$P_k(n) = c_k n(n^2-1^2) \dots (n^2-k^2).$$

Чтобы найти постоянную c_k , достаточно вычислить $P_k(k+1) = \text{tr}_{k+1}(\phi_{k+1}(f_k))$. Однако в этом случае $X^k = (k!)^2 e_{1,k+1}$ и

$$(\text{ad } Y)^k(X^k) = (k!)^2 (\text{ad } Y)^k(e_{1,k+1}) = (k!)^2 \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} e_{k+1-j, k+1-j}.$$

Таким образом,

$$\text{tr}_{k+1}(\phi_{k+1}(f_k)) = (k!)^4 \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2 = (k!)^4 \binom{2k}{k},$$

откуда следует, что

$$c_k = \frac{(k!)^2}{2k+1}.$$

Теорема 8.2 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Имеют место соотношения ортогональности:*

$$\sum_i f_{kl}(\alpha_i) f_{k_1, l}(\alpha_i) T_1(\alpha_i) \dots T_l(\alpha_i) = \delta_{k, k_1} c_{k, l}, \quad (8.8)$$

$$2de \ c_{k, l} = \frac{(k-l)! (k!)^2}{(k+l)! (2k+1)} n(n^2 - 1^2) \dots (n^2 - k^2);$$

$$\sum_{k=l}^{n-1} \frac{1}{c_{kl}} f_{kl}(\alpha_i) f_{kl}(\alpha_j) T_1(\alpha_i) \dots T_l(\alpha_i) = \delta_{ij} \quad \text{для любых } i, j > l. \quad (8.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (8.8) следует из теоремы 8.2 (утверждение III). Чтобы доказать формулу (8.9), выразим e_{ij} через $X^l f_{kl}$ и $f_{k, -l} Y^l$. Имеем, в частности,

$$e_{i, i+l} = \sum_{k=l}^{n-1} \alpha_{ik} X^l f_{kl}$$

для любых k между l и $n-1$. Однако, как легко проверить,

$$\begin{aligned} f_{kl} Y^l &= \left(\sum_{i=1}^n f_{kl}(\alpha_i) e_{ii} \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} e_{i+1, i} \right)^l = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n f_{kl}(\alpha_i) e_{ii} \right) \left(\sum_{i=1}^{n-l} e_{i+l, i} \right) = \sum_{i=1}^{n-l} f_{kl}(\alpha_{i+l}) e_{i+l, i}. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно теореме 8.2 имеем

$$f_{kl}(\alpha_{i+l}) = \langle e_{i, i+l}, f_{kl} Y^l \rangle = \alpha_{ik} \langle f_{kl} Y^l, X^l f_{kl} \rangle = \alpha_{ik} c_{kl}.$$

Другими словами,

$$e_{i, i+l} = \sum_{k=l}^{n-1} \frac{f_{kl}(\alpha_{i+l})}{c_{kl}} X^l f_{kl}.$$

Аналогично можно записать

$$e_{i+l, i} = \sum_{k=l}^{n-1} \frac{f_{kl}(\alpha_{i+l}) T_1(\alpha_{i+l}) \dots T_l(\alpha_{i+l-1})}{c_{kl}} f_{kl} Y^l.$$

Поэтому, полагая $i' = i + l$, $j' = j + l$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \langle e_{i+l, i}, e_{j, j+l} \rangle &= \sum_{i=l}^{n-1} \frac{1}{c_{kl}} f_{kl}(\alpha_{i+l}) f_{kl}(\alpha_{j+l}) T_1(\alpha_{i+l}) \dots T_l(\alpha_{i+l-1}) = \\ &= \sum_{i=l}^{n-1} \frac{1}{c_{kl}} f_{kl}(\alpha_{i'}) f_{kl}(\alpha_{j'}) T_1(\alpha_{i'-1}) \dots T_l(\alpha_{i'-l+1}) = \\ &= \sum_{i=l}^{n-1} \frac{1}{c_{kl}} f_{kl}(\alpha_{i'}) f_{kl}(\alpha_{j'}) T_1(\alpha_{i'}) \dots T_l(\alpha_{i'}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Выражая элементы Казимира $\Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n$ алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ через ортогональные многочлены, а не через матричные единицы, мы можем вывести различные тождества, связывающие эти многочлены. Некоторые из этих тождеств могут даже оказаться новыми, по крайней мере для нецелых значений n (см. предположение 9.1 ниже). Например, для Ω_2 имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. В алгебре $\mathfrak{gl}(n)$ имеет место соотношение

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{c_{k0}} f_{k0}^2 + 2 \sum_{l=1}^k \frac{1}{c_{kl}} f_{kl}^2 T_1 \dots T_l - \frac{2k+1}{n} \right) = -H.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем оператор Казимира для алгебры $\mathfrak{gl}(n)$, выраженный в терминах матричных элементов,

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \sum_{k=1}^n e_{kk} \otimes e_{kk} + \sum_{i < j} (e_{ij} \otimes e_{ji} + e_{ji} \otimes e_{ij}) = \\ &= \sum_{k=1}^n e_{kk} \otimes e_{kk} + \sum_{k=1}^n (n-2k+1) e_{kk} + 2 \sum_{i < j} e_{ji} \otimes e_{ij} \end{aligned}$$

через ортогональные многочлены:

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{c_{k0}} f_{k0} \otimes f_{k0} + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=l}^{n-1} \frac{1}{c_{kl}} (X^l f_{kl} \otimes f_{kl} Y^l + f_{kl} Y^l \otimes X^l f_{kl}) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{c_{k0}} f_{k0} \otimes f_{k0} + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=l}^{n-1} \frac{1}{c_{kl}} f_{kl} Y^l \otimes X^l f_{kl} + \sum_{k > l} \frac{1}{c_{kl}} [X^l f_{kl}, f_{kl} Y^l]. \end{aligned}$$

Теперь преобразуем последнюю сумму. Для этого рассмотрим гомоморфизм $\varphi: U(\mathfrak{gl}(n)) \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$, индуцированный тождественным представлением. Поскольку

$$\frac{1}{c_{k0}} f_{k0} \otimes f_{k0} + \sum_{l=1}^k \frac{1}{c_{kl}} (X^l f_{kl} \otimes f_{kl} Y^l + f_{kl} Y^l \otimes X^l f_{kl})$$

представляет собой $\mathfrak{sl}(2)$ -инвариант, его образ в $\mathfrak{gl}(n)$ также является $\mathfrak{sl}(2)$ -инвариантом, т.е. постоянной величиной $D(k)$:

$$\frac{1}{c_{k0}} f_{k0} \cdot f_{k0} + 2 \sum_{l=1}^k \frac{1}{c_{kl}} f_{kl} Y^l \cdot X^l f_{kl} + \sum_{l=1}^k \frac{1}{c_{kl}} [X^l f_{kl}, f_{kl} Y^l] = D(k).$$

Вычисляя следы обеих частей, получаем

$$nD(k) = \frac{1}{c_{k0}} \operatorname{tr}(f_{k0}^2) + 2 \sum_{l=1}^k \frac{1}{c_{kl}} \operatorname{tr}(f_{kl}^2 T_1 \dots T_l) = 2k+1,$$

откуда

$$D(k) = \frac{2k+1}{n}.$$

Поэтому

$$\sum_{l=1}^k \frac{1}{c_{kl}} [X^l f_{kl}, f_{kl} Y^l] = \frac{2k+1}{n} - \left(\frac{1}{c_{k0}} f_{k0} \cdot f_{k0} + 2 \sum_{l=1}^k \frac{1}{c_{kl}} f_{kl} Y^l \cdot X^l f_{kl} \right).$$

Суммируя по k , получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{c_{k0}} f_{k0} \cdot f_{k0} + 2 \sum_{l=1}^k \frac{1}{c_{kl}} f_{kl} Y^l \cdot X^l f_{kl} - \frac{2k+1}{n} \right) = - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=1}^k \frac{1}{c_{kl}} [X^l f_{kl}, f_{kl} Y^l].$$

Линейные части одного и того же оператора Казимира, выраженные в различных базах, совпадают, и, следовательно, последняя сумма равна

$$- \sum_{i=1}^n (n-2i+1) e_{ii} = -H,$$

что и требовалось доказать.

9. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И АЛГЕБРА $\mathfrak{gl}(\lambda)$

Полученные выше результаты для $\mathfrak{gl}(n)$, $n = 1, 2, \dots$, имеют место с необходимыми изменениями и для $\mathfrak{gl}(\lambda)$ при любых комплексных $\lambda \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. В этом разделе будем рассматривать только такие значения λ .

Заметим, что алгебра $\mathfrak{gl}(\lambda)$ в отличие от алгебр $\mathfrak{gl}(\infty)$ или $\mathfrak{gl}^{\pm}(\infty)$ не имеет базиса, состоящего из матричных единиц. Однако мы можем представить эту алгебру в виде

$$\mathfrak{gl}(\lambda) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} L^{2k} \quad \text{и} \quad \mathfrak{gl}(\lambda) = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathfrak{gl}(\lambda)_i,$$

где $\mathfrak{gl}(\lambda)_0 = \mathbb{C}[H]$, в то время как $\mathfrak{gl}(\lambda)_i = X^i \mathfrak{gl}(\lambda)_0$ и $\mathfrak{gl}(\lambda)_{-i} = \mathfrak{gl}(\lambda)_0 Y^i$ при $i > 0$.

Как было показано выше, существует след на алгебре $\mathfrak{gl}(\lambda)$, ограничение которого на $\mathfrak{gl}(\lambda)_0$ имеет производящую функцию

$$\frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{e^t - e^{-t}}, \quad \text{если } \lambda \neq 0, \quad \text{и} \quad \frac{2t}{e^t - e^{-t}}, \quad \text{если } \lambda = 0.$$

В первом случае мы нормировали след так, что $\text{tr}(1) = \lambda$ по аналогии со случаем конечной размерности, когда скаляры естественным образом представлены скалярными матрицами и $\text{tr}(1_n) = n$. Во втором случае, $\lambda = 0$, мы считаем, что $\text{tr}(1) = 1$.

Заметим, что при целых $\lambda = n$

$$\frac{e^{nt} - e^{-nt}}{e^t - e^{-t}} = e^{(1-n)t} + e^{(3-n)t} + \dots + e^{(n-3)t} + e^{(n-1)t}$$

и соответствующий функционал имеет вид

$$\text{tr}(f(H)) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i), \quad \alpha_i = n - 2i + 1.$$

Функционал tr на $\mathfrak{gl}(\lambda)$ порождает невырожденную симметричную инвариантную билинейную форму $\langle u, v \rangle = \text{tr} uv$.

ТЕОРЕМА 9.1. В обозначениях раздела 8 имеем:

$$\text{I. } \langle e_{k,l}, e_{k',l'} \rangle = \delta_{k,k'} \delta_{l+l',0}.$$

II. Многочлены $f_{k,l}$ при фиксированном $l \geq 0$ и $k \geq l$ образуют ортогональный базис относительно скалярного произведения (8.1).

III. Многочлены $f_{k,l}$ совпадают с точностью до постоянного множителя с непрерывными многочленами Хана дискретной переменной, которые определяются уравнениями (8.2) при $n = \lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство утверждений I и II аналогично доказательству соответствующих утверждений теоремы 8.1 при целых λ . Для доказательства утверждения III заметим, что для неотрицательного целого уравнение (8.2) выполняется согласно теореме 8.1. Однако обе части уравнения (8.2) являются многочленами от H , причем их коэффициенты – многочлены по λ . Вследствие непрерывности этих выражений в топологии Зариского наше утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 9.2. Пусть Ω – квадратичный оператор Казимира для $\mathfrak{sl}(2) \subset \mathfrak{gl}(\lambda)$.

I. Ω является самосопряженным относительно формы (8.1), и многочлены $X^l f_{kl}$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ и $l \in [-k, k] \cap \mathbb{Z}$ – собственные функции Ω с собственными значениями $2k(k+1)$. Многочлены f_{kl} удовлетворяют разностному уравнению (8.6) и имеют вид (8.7).

II. Имеет место формула

$$\langle f_{kl}, f_{kl} \rangle = \begin{cases} \frac{(k-l)!}{(k+l)!} \frac{(k!)^2}{2k+1} \lambda(\lambda^2 - 1^2) \dots (\lambda^2 - k^2), & \text{если } \lambda \neq 0, \\ (-1)^k \frac{(k-l)!}{(k+l)!} \frac{(k!)^4}{2k+1}, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство утверждения I аналогично доказательству соответствующих утверждений теоремы 8.2. Если $\lambda \neq 0$, то обе части уравнения (9.1) являются многочленами от λ , которые совпадают при целых λ и, следовательно, равны по непрерывности в топологии Зариского. Чтобы охватить случай $\lambda = 0$, рассмотрим $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\text{tr}/\lambda)$; как и ранее, обе части уравнения становятся многочленами от λ , откуда следует утверждение II, что и требовалось доказать.

Несколько неожиданным является тот факт, что дуальные соотношения ортогональности выполнены при достаточно больших значениях $|\lambda|$. Действительно, положим

$$c_{kl} = \begin{cases} \frac{(k-l)!}{(k+l)!} \frac{(k!)^2}{2k+1} (\lambda^2 - 1^2) \dots (\lambda^2 - k^2), & \text{если } \lambda \neq 0, \\ (-1)^k \frac{(k-l)!}{(k+l)!} \frac{(k!)^4}{2k+1}, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases} \quad (9.2)$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 9.1. При достаточно больших значениях $|\lambda|$ имеем (для $\alpha_i = \lambda - 2i + 1$)

$$\sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{c_{kl}} f_{kl}(\alpha_i) f_{kl}(\alpha_j) T_1(\alpha_i) \dots T_l(\alpha_i) = \delta_{ij} \quad \text{при } i, j > l, \quad (9.3)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{c_{k0}} f_{k0}(\alpha_i)^2 + 2 \sum_{l=1}^k \frac{1}{c_{kl}} f_{kl}(\alpha_i)^2 T_1(\alpha_i) \dots T_l(\alpha_i) - \frac{2k+1}{\lambda} \right) = -\alpha_i \quad (9.4)$$

при $i \in \mathbb{N}$.

Априори $|\lambda|$ зависит от l . Нам не известно единообразного доказательства, мы проверили данное предположение только в некоторых частных случаях.

Из приведенных выше формул становится ясно, что если мы разделим форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на λ и рассмотрим многочлены только четной степени, то получим знакоопределенную форму не только при целых значениях λ , но и при таких вещественных значениях, при которых $0 < |\lambda| < 1$, а также при чисто мнимых λ . Последнее обстоятельство подсказывает деление следа на λ с самого начала.

Благодарности. Мы благодарны NFR за финансовую поддержку, М. Васильеву за стимулирующий вопрос, П. Грозману и особенно В. Гердту (раздел 9), которые помогли нам с численными экспериментами с помощью программ Maple и MATHEMATICA. Представляется, что Maple является программой, более подходящей для наших задач.

Список литературы

- [1] *R. Roy.* The work of Chebyshev on orthogonal polynomials. In: Topics in polynomials of one and several variables and their applications. Eds. Rassias Th. et. al. Singapore: World Scientific, 1993. P. 495–512; *Я. Л. Геронимус.* Теория ортогональных многочленов. Обзор достижений отечественной математики. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1950.
- [2] *А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров.* Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. М.: Наука, 1985.
- [3] *B. Shoikhet.* Certain topics on the Lie algebra $\mathfrak{gl}(\lambda)$ representation theory. q-alg/9703029.
- [4] *А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.
- [5] *Б. Л. Фейзин.* УМН. 1988. Т. 43. № 2. С. 157–158.
- [6] *J. Dixmier.* J. Algebra. 1973. V. 24. P. 551–564.
- [7] *N. Ja. Vilenkin, A. U. Klimyk.* Representation of Lie groups and special functions. Vol. 1–3. Dordrecht: Kluwer, 1991, 1992, 1993; Representation of Lie groups and special functions. Recent advances. Dordrecht: Kluwer, 1995.
- [8] *L. Littlejohn, A. Krall.* Rocky Mt. J. Math. 1986. V. 16. № 3. P. 435–479; Acta Appl. Math. 1989. V. 17. P. 99–170.
- [9] *A. Mingarelli, A. Krall.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1981. V. 90. P. 147–153.
- [10] *В. Деркач.* Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 4. С. 509–521.
- [11] *M. Vasiliev.* Int. J. Mod. Phys. D. 1996. V. 5. P. 763–797.
- [12] *S. Montgomery.* J. Algebra. 1997. V. 195. № 2. P. 558–579.
- [13] *J. Dixmier.* Algèbres enveloppantes. Paris: Gautier-Villars, 1974; Enveloping algebras. Providence, RI: AMS, 1996.
- [14] *V. Kač, A. Radul.* Commun. Math. Phys. 1993. V. 157. P. 429–457.
- [15] *P. Grozman, D. Leites.* Lie superalgebras of supermatrices of complex size and integrable dynamical systems. In: Complex Analysis and Related Topics (Proc. of the International Symposium, Cuernavaca, Mexico, November 18–22, 1996). Eds. N. Vasilevsky et. al. Basel: Birkhauser, 1999. P. 73–105.
- [16] *С. Ленг.* Алгебра. М.: Мир, 1968.
- [17] *I. G. Macdonald.* Symmetric functions and Hall polynomials. Second edition. With contributions by A. Zelevinsky. New York: Clarendon Press, Oxford University Press, 1995.