Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Зобов, А. С. Ермилов, О реализации стандартных квантовых вычислительных сетей посредством адиабатической эволюции, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 3, 461–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5990>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 10:42:52

© 2007 г.

В. Е. Зобов*, А. С. Ермилов*

О РЕАЛИЗАЦИИ СТАНДАРТНЫХ КВАНТОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СЕТЕЙ ПОСРЕДСТВОМ АДИАБАТИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ

Исследуется адиабатический эквивалент для стандартной квантовой сети из элементарных логических операторов. Предложена схема изменения гамильтониана во времени, допускающая простую реализацию, например, на ядерных спинах, управляемых радиочастотными импульсами. В качестве иллюстрации выполнено численное моделирование адиабатического квантового алгоритма, определяющего порядок подстановки, для системы из пяти спинов (кубитов).

Ключевые слова: квантовые алгоритмы, адиабатическая эволюция, ядерный магнитный резонанс.

1. ВВЕДЕНИЕ

При стандартном квантовом вычислении алгоритмы реализуются в виде последовательности дискретных унитарных преобразований (элементарных квантовых логических операторов, или вентилей, образующих сеть) [1], [2]. Такое представление удобно для сравнения с работой классических компьютеров. Квантовые вычисления можно проводить и иначе, например, посредством адиабатической эволюции [3]. Адиабатический алгоритм осуществляется с помощью зависящего от времени гамильтониана. Этот гамильтониан непрерывно изменяется от начального гамильтониана $H(0)$, у которого легко приготовить основное состояние $|0\rangle$, к конечному гамильтониану $H(1)$, у которого основное состояние $|\Psi\rangle$ кодирует решение поставленной задачи. Если гамильтониан изменяется достаточно медленно, то квантовая адиабатическая теорема гарантирует, что квантовый компьютер будет с большой вероятностью находиться в основном состоянии. С устойчивостью основного состояния к помехам связывают надежды [4] уменьшения вероятности ошибок при адиабатическом квантовом вычислении.

Недавно было доказано [5], [6], что не только алгоритм поиска [3], но и любую стандартную квантовую сеть можно реализовать с помощью адиабатической эволюции. В работах [5] гамильтониан изменяется во времени по линейному закону.

*Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН, Красноярск, Россия.
E-mail: rsa@iph.krasn.ru

В работе [6] предложено более сложное унитарное преобразование гамильтониана, гарантирующее сохранение в процессе эволюции заданной величины щели между основным и ближайшим возбужденным энергетическими уровнями. Этот параметр играет важную роль, поскольку его величиной определяется допустимая скорость изменения гамильтониана, т.е. точность и время эксперимента.

В настоящей работе мы исследуем предложенный в работе [6] вариант адиабатического алгоритма с точки зрения его реализации на ядерных спинах, управляемых радиочастотными (РЧ) импульсами. Такой выбор квантовой системы обусловлен тем, что к настоящему времени с помощью методов ядерного магнитного резонанса (ЯМР) проведено моделирование многих стандартных квантовых алгоритмов, а также адиабатического алгоритма поиска максимального сечения [7] при линейном изменении гамильтониана во времени. Полученные результаты легко могут быть распространены на другие квантовые системы, применяемые для квантовых вычислений [2]. Мы покажем, как следует изменить предложенный в работе [6] вариант, чтобы упростить эксперимент. Взяв в качестве примера алгоритм определения порядка подстановки, квантовая сеть для которого в стандартной форме была реализована в работе [8] на пяти спинах (кубитах), мы выполним моделирование на компьютере адиабатического алгоритма для этой сети при различных вариантах изменения гамильтониана во времени и исследуем зависимость результата от параметров.

2. КВАНТОВАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЕТЬ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОРЯДКА ПОДСТАНОВКИ

Стандартная сеть для квантового алгоритма может быть задана последовательностью некоторого числа n унитарных операторов (одно- или двухкубитных вентилей)

$$|\psi\rangle = U|0\rangle = U_n U_{n-1} \dots U_1 |0\rangle. \quad (1)$$

В качестве примера рассмотрим квантовый алгоритм для определения порядка r подстановки [8]. Не останавливаясь на деталях, которые можно найти в указанной статье, приведем последовательность (1) для этого алгоритма. В случае подстановки порядка $r = 4$

$$U = H_3 B_{23} \left(\frac{\pi}{2} \right) B_{13} \left(\frac{\pi}{4} \right) H_2 B_{12} \left(\frac{\pi}{2} \right) H_1 \text{CNOT}_{24} \text{CNOT}_{35} H_3 H_2 H_1. \quad (2)$$

В случае подстановки порядка $r = 2$ в произведении отсутствует CNOT_{24} . В (2) входят следующие операторы:

H_i – оператор Адамара, действующий на спин (кубит) i ;

$B_{ij}(\theta)$ – оператор контролируемого сдвига фазы на угол $\theta = \pi/2^{i-j}$;

CNOT_{ij} – действующий на спин j и контролируемый спином i оператор “не”, который можно выразить через B_{ij} по следующей формуле [9]: $\text{CNOT}_{ij} = H_j B_{ij}(\pi) H_j$; $i, j = 1, \dots, 5$. Эти операторы можно представить матрицами в стандартном вычислительном базисе собственных состояний оператора проекции каждого спина на

направление постоянного магнитного поля:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_{ij}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матрицы операторов в (2) имеют размер 32×32 и получаются из матриц (3) прямым (тензорным) умножением на единичные (2×2) -матрицы E для не участвующих в данном вентиле кубитов. Например, $H_3 = E \otimes E \otimes H \otimes E \otimes E$.

Кратко поясним назначение операторов в (2). Сначала операторы Адамара готовят из основного состояния состояние, суперпозиционное по первым трем спинам. Затем операторы CNOT совершают над ними преобразования, соответствующие некоторой выбранной оракулом подстановке. Наконец, квантовое фурье-преобразование над спинами 1, 2 и 3 позволяет найти период полученного состояния, совпадающий с искомым порядком подстановки.

Эксперимент, описанный в [10], был выполнен на пятиспиновых молекулах с гамильтонианом

$$H = - \sum_i \omega_i I_i^z + \sum_{i < j} 2\pi J_{ij} I_i^z I_j^z, \quad (4)$$

где ω_i – частота ларморовской прецессии в постоянном магнитном поле B_0 с учетом химсдвига, второй член описывает косвенное спин-спиновое взаимодействие, I_i^z – z -компонента векторного оператора спина i , $i = 1, \dots, 5$. Здесь и далее энергия взята в частотных единицах. Для реализации вентилей к системе прикладывается последовательность импульсов РЧ-поля [2], [8]–[10]

$$H_{\text{rf}} = -2 \sum_i \omega_{1i}(t) I_i^x \cos(\omega_{\text{rf}i} t + \varphi_i(t)), \quad (5)$$

где $\omega_{\text{rf}i}$ – частота РЧ-поля. Амплитуда $\omega_{1i}(t)$ и фаза $\varphi_i(t)$ изменяются во времени в соответствии с (2), т.е. РЧ-поле с такими характеристиками включается в те моменты времени, когда нужно обеспечить результат работы соответствующего вентиля. Во вращающейся с частотой $\omega_{\text{rf}i}$ системе координат (ВСК) [11] в первом члене гамильтониана (4) коэффициент ω_i заменяется на $\omega_i - \omega_{\text{rf}i}$ и обращается в нуль при резонансе.

Вентиль Адамара H_i реализуется посредством последовательных поворотов РЧ-полем сначала на угол $\pi/2$ вокруг оси y , а затем на угол π вокруг оси x ВСК. Для первого поворота РЧ-поле с фазой $\varphi_i = \pi/2$ включается на время τ_i , удовлетворяющее условию $\tau_i \omega_{1i} = \pi/2$, а для второго РЧ-поля с фазой $\varphi_i = 0$ – на время $\tau_i \omega_{1i} = \pi$. Для получения оператора $B_{ij}(\theta)$ следует согласно [9], [10] выдержать (установить) между импульсами промежутков времени τ_i , удовлетворяющий условию $\pi \tau_i J_{ij} = \theta/2$, а затем осуществить добавочный сдвиг фазы с помощью оператора $\exp(-i\theta(I_i^z + I_j^z)/2)$.

На интервале свободной эволюции система развивается под действием оператора эволюции $\exp(itH)$ с гамильтонианом (4). Для обеспечения нужного знака фазы

добавим до и после оператора свободной эволюции по оператору РЧ-импульса, вращающему спин i вокруг оси x на угол π .

Произведение соответствующих матриц

$$\begin{pmatrix} e^{i\pi\tau J_{ij}/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi\tau J_{ij}/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\pi\tau J_{ij}/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\pi\tau J_{ij}/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} = e^{-i\theta/4} B_{ij}(\theta)$$

дает искомый оператор $B_{ij}(\theta)$. Добавочный сдвиг фазы может быть получен, например, сдвигом фазы предыдущих импульсов или с помощью трех РЧ-импульсов. На интервале свободного развития ненужные в данном вентиле взаимодействия остальных спинов устраняются РЧ-импульсами, поворачивающими эти спины на угол π [2], [8]–[10].

Таким способом, управляя с помощью РЧ-поля динамикой системы из пяти спинов, авторы работы [8] реализовали стандартную сеть для квантового алгоритма определения порядка подстановки. Заметим, что в условиях ЯМР-эксперимента оператор U действует на матрицу плотности системы, которая задает состояние системы при высоких температурах [2], [9].

3. АДИАБАТИЧЕСКИЙ КВАНТОВЫЙ АЛГОРИТМ

Перейдем к исследованию адиабатического эквивалента стандартной квантовой сети (1) из элементарных логических операторов. Введем, следуя работе [6], операторы

$$K = -i \ln U, \quad U(s) = e^{isK}, \quad (6)$$

где $s = t/T$ – безразмерное время, T – протяженность эволюции, при этом $U(0) = 1$ и $U(1) = U$. Тогда адиабатическая реализация квантового алгоритма (1)

$$|\Psi(T)\rangle = U_T |0\rangle \quad (7)$$

задается следующим оператором эволюции:

$$U_T = \hat{P} \exp \left(-iT \int_0^1 H(s) ds \right), \quad (8)$$

где $\hat{P}$ – оператор упорядочения во времени [12], при этом

$$H(s) = U(s)H(0)U^\dagger(s). \quad (9)$$

Выполнив тождественные преобразования, описанные в приложении, уравнение (8) перепишем как

$$U_T = U \exp \left\{ -iT \left(H(0) + \frac{K}{T} \right) \right\}. \quad (10)$$

Для этого уравнения условие адиабатичности означает, что разница между энергетическими уровнями $H(0)$ должна превосходить величину соответствующих элементов матрицы K/T :

$$\frac{1}{T} |\langle m|K|n\rangle| \ll |E_n - E_m|. \quad (11)$$

Обратим внимание на аналогию с переходом в ВСК [11], используемым при решении задачи о движении спина в медленно вращающемся сильном магнитном поле. Сильное поле удерживает магнитный момент, который при этом поворачивается вместе с полем. На этом свойстве основано действие применяемых в ЯМР-экспериментах адиабатических РЧ-импульсов (см., например, теоретические результаты и ссылки в [13]). В этом случае в гамильтониане в (10) возникает эффективное поле, перпендикулярное плоскости вращения реального поля. Точно также в случае представления сети вентилей $U_n U_{n-1} \dots U_1$ в (1) в виде (10) возникает эффективный гамильтониан, отличающийся от гамильтонианов, управляющих изменениями системы при действии каждого из элементарных унитарных операторов в (1).

Оператор K в общем виде связывает все участвующие кубиты. Его трудно найти и еще труднее создать в эксперименте, поэтому в работе [6] предложен другой способ изменения гамильтониана во времени,

$$H(s_1, s_2, \dots, s_n) = U_n(s_n) \dots U_2(s_2) U_1(s_1) H(0) U_1^\dagger(s_1) U_2^\dagger(s_2) \dots U_n^\dagger(s_n), \quad (12)$$

где для каждого оператора U_j в (1) выполняются формулы (6) при своем параметре s_j ($j = 1, \dots, n$), изменяющемся от 0 до 1. В выражении (12) все параметры s_j можно положить равными друг другу ($s_j = s$) и увеличивать синхронно при увеличении времени в формуле (8), в которой $H(s)$ заменен на $H(s, s, \dots, s)$. Наряду с этим в работе [6] рассматривается также ступенчатое последовательное изменение гамильтониана (12) операторами $U_j(s_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, т.е. сначала под действием $U_1(s_1)$, затем под действием $U_2(s_2)$ и так далее до $U_n(s_n)$:

$$H(t) = \begin{cases} U_1(t/T_1)H(0)U_1^\dagger(t/T_1) & \text{при } 0 < t < T_1, \\ U_2(t/T_2 - T_1/T_2)U_1(1)H(0)\times \\ \quad \times U_1^\dagger(1)U_2^\dagger(t/T_2 - T_1/T_2) & \text{при } T_1 < t < T_1 + T_2, \\ \\ U_n\left(t/T_n - \sum_{i=1}^{n-1}T_i/T_n\right)\times \\ \quad \times U_{n-1}(1)\dots U_1(1)H(0)U_1^\dagger(1)\dots U_{n-1}^\dagger(1)\times \\ \quad \times U_n^\dagger\left(t/T_n - \sum_{i=1}^{n-1}T_i/T_n\right), & \text{при } \sum_{i=1}^{n-1}T_i < t < T_n, \end{cases}$$

где T_j – протяженность интервала времени, на котором действует оператор U_j , $T = \sum_{j=1}^n T_j$. В этом случае (8) приобретает вид

$$\begin{aligned}
U_T = & \hat{P} \exp \left(-i T_n \int_0^1 H(1, \dots, 1, s_n) ds_n \right) \times \dots \\
& \dots \times \hat{P} \exp \left(-i T_j \int_0^1 H(1, \dots, 1, s_j, 0, \dots, 0) ds_1 \right) \times \dots \\
& \dots \times \hat{P} \exp \left(-i T_1 \int_0^1 H(s_1, 0, \dots, 0) ds_1 \right). \tag{13}
\end{aligned}$$

Изменение гамильтониана в выражении (13) проще и понятнее, чем в общем случае (8), однако пути экспериментальной реализации такого изменения по-прежнему

внутри, то мы можем выполнить дальнейшие преобразования:

$$\begin{aligned}
 \hat{P} \exp\left(-iT_j \int_0^1 H(0, \dots, 0, s_j, 1, \dots, 1) ds_j\right) &= U_n(s_n) \times \dots \\
 &\dots \times U_{j+1}(s_{j+1}) \hat{P} \exp\left(-iT_j \int_0^1 H(0, \dots, 0, s_j, 0, \dots, 0) ds_j\right) U_{j+1}^\dagger(s_{j+1}) \dots U_n^\dagger(s_n), \\
 U_T = U U_1^\dagger \hat{P} \exp\left(-iT_1 \int_0^1 H(s_1, 0, \dots, 0) ds_1\right) &\times \dots \\
 &\dots \times U_j^\dagger \hat{P} \exp\left(-iT_j \int_0^1 H(0, \dots, 0, s_j, 0, \dots, 0) ds_j\right) \times \dots \\
 &\dots \times U_n^\dagger \hat{P} \exp\left(-iT_n \int_0^1 H(0, \dots, 0, s_n) ds_n\right).
 \end{aligned}$$

Отсюда после преобразований экспонент (см. приложение) получаем простое выражение

$$\begin{aligned}
 U_T = U \exp\left\{-iT_1 \left(H(0) + \frac{K_1}{T_1}\right)\right\} \times \\
 \times \exp\left\{-iT_2 \left(H(0) + \frac{K_2}{T_2}\right)\right\} \dots \exp\left\{-iT_n \left(H(0) + \frac{K_n}{T_n}\right)\right\}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Уравнение адиабатичности (11) должно быть выполнено на каждом участке. Мы не стали ограничиваться случаем $T_j = T/n$, поскольку при неизменном T мы можем повысить точность, взяв для большего K_j большее T_j (например, большее T_j для большего угла в случае вентиля сдвига фазы (18), рассмотренных далее).

При выполнении уравнения (11) согласно (10) или (15) на первом этапе эволюции (7) состояние $|0\rangle$ сохраняется с точностью до фазового множителя, а на втором этапе переводится оператором U в $|\Psi(T)\rangle$. В адиабатическом пределе $T \rightarrow \infty$ при любом из способов включения операторов мы должны получить точный результат (1). При конечном T неизбежна ошибка, величина которой может зависеть от способа включения. В следующем разделе мы проведем анализ этой проблемы на конкретном примере. Важность такого анализа состоит в том, что выражение (15) проще для реализации, чем (10), поскольку эффективный гамильтониан K должен содержать взаимодействия многих спинов [6], тогда как гамильтонианы K_j в (15), соответствующие одно- и двухкубитным вентилям, – только одно- и двухспиновые взаимодействия.

Тем не менее, проблема остается, поскольку необходимо изменять эффективный гамильтониан системы во времени в той последовательности, которая получена в формуле (15). Способ такого изменения предложен в работе [7] и основан на формуле Троттера для двух некоммутирующих операторов:

$$\begin{aligned}
 \exp\left\{-iT_j \left(H(0) + \frac{K_j}{T_j}\right)\right\} &= \lim_{N_j \rightarrow \infty} \left\{ \exp(-i\Delta t_j H(0)) \exp\left(-\frac{i\Delta t_j K_j}{T_j}\right) \right\}^{N_j} = \\
 &= \lim_{N_j \rightarrow \infty} \left\{ \exp(-i\Delta t_j H(0)) U_j^\dagger\left(\frac{1}{N_j}\right) \right\}^{N_j}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

где $\Delta t_j = T_j/N_j$. В условиях реального эксперимента величина Δt_j ограничена возможностями аппаратуры. В результате для некоторого конечного $\Delta t_j = \Delta t = T/N$ (где $N = \sum_{j=1}^n N_j$) с учетом (16) получаем для оператора (15) приближенное выражение

$$U_{T,\Delta t} = U \left\{ \exp(-i\Delta t H(0)) U_1^\dagger \left(\frac{1}{N_1} \right) \right\}^{N_1} \left\{ \exp(-i\Delta t H(0)) U_2^\dagger \left(\frac{1}{N_2} \right) \right\}^{N_2} \times \dots \\ \dots \times \left\{ \exp(-i\Delta t H(0)) U_n^\dagger \left(\frac{1}{N_n} \right) \right\}^{N_n}, \quad (17)$$

которое уже можно реализовать экспериментально.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯМР-РЕАЛИЗАЦИИ АДИАБАТИЧЕСКОГО КВАНТОВОГО АЛГОРИТМА

В предыдущем разделе мы оперировали формулами общего вида и не конкретизировали вид квантовой системы и квантового алгоритма. Здесь мы исследуем точность формулы (17) на конкретном примере, рассмотренном в разделе (2).

Для осуществления квантового алгоритма определения порядка подстановки (2) посредством адиабатической эволюции будем изменять гамильтониан по формуле (12) с помощью операторов

$$\prod_j U_j(s_j) = H_3 B_{23} \left(\pi \frac{s_5}{2} \right) H_3 H_3 B_{13} \left(\pi \frac{s_4}{4} \right) H_3 H_2 B_{12} \left(\pi \frac{s_3}{2} \right) H_2 \times \\ \times H_2 H_4 B_{24} (\pi s_2) H_4 H_2 H_3 H_5 B_{35} (\pi s_1) H_5 H_3. \quad (18)$$

Мы не стали вводить параметры s для операторов Адамара, поскольку условие $U_j(0) = 1$ выполнено в силу свойств $H_j H_j = 1$ и $B_{ij}(0) = 1$. Описанным в разделе 2 путем может быть выполнена дальнейшая детализация с составлением нужной последовательности РЧ-импульсов и интервалов свободной эволюции для каждого вентилля контролируемого сдвига фазы в (18). Поскольку нашей целью является исследование ошибки, порожденной конечностью Δt , при разных способах изменения во времени гамильтониана (12) операторами $U_j(s_j)$, то в расчетах мы будем использовать в (18) готовые выражения (3) для этих операторов.

В качестве начального состояния возьмем основное состояние, в котором все пять спинов направлены вдоль оси z . Ему соответствует гамильтониан

$$H(0) = -\omega \sum_{i=1}^5 I_i^z. \quad (19)$$

Экспонента в (17), содержащая $\Delta t H(0)$, есть поворот вокруг оси z , или сдвиг фазы, о способах реализации этого преобразования было сказано выше.

Расчет результатов адиабатического квантового вычисления (7) при трех способах увеличения параметров s_j в (18) был выполнен по формуле

$$U_{T,\Delta t} = \prod_{m=1}^N \exp \left(-i\Delta t H \left(\frac{m}{N} \right) \right) = \prod_{m=1}^N U \left(\frac{m}{N} \right) \exp(-i\Delta t H(0)) U^\dagger \left(\frac{m}{N} \right), \quad (20)$$

которую можно получить из общей формулы (8), если разбить промежуток времени T на N интервалов $\Delta t = T/N$ и пренебречь изменением гамильтониана (12) внутри этих малых интервалов. При синхронном увеличении s_j это приводит к тому, что единичный интервал изменения каждого параметра $s_j = s$ делится на N частей. При последовательном увеличении s_j формула (8) переходит в формулы (13)–(15). На основании отношения углов θ_j в операторах $B_{ij} = B_{ij}(\theta_j)$ в (18) мы выбрали $N_1 = N_2 = 4N_4$, $N_3 = N_5 = 2N_4$ для того, чтобы обеспечить равенство приращений углов, $\Delta s_j \theta_j = 13\pi/(4N)$, где $\Delta s_j = 1/N_j = \Delta t/T_j$. Отметим, что если мы будем действовать последовательностью операторов, начиная с последнего, то формула (20) преобразуется в формулу (17).

Расчет на компьютере был выполнен с использованием пакета MATLAB при разных значениях параметров $\omega\Delta t$ и $N = T/\Delta t$ (ориентируясь на экспериментальные условия [7], полагаем $\Delta t = \text{const}$). Степень согласия между рассчитанным и точным теоретическим векторами состояния $|\psi\rangle$ (1) оценивалась по формуле из работы [9] как $|\langle\Psi(T)|\psi\rangle|$. Найденная ошибка показана на рисунке. Параметр $\omega\Delta t$ задает величину щели, поэтому при его уменьшении точность падает из-за нарушения условия адиабатичности (11). С другой стороны, при приближении $\omega\Delta t$ к π возрастает ошибка, связанная с заменой непрерывного изменения на дискретное. Рассчитанные при оптимальном значении $\omega\Delta t = 1.6$ зависимости ошибки от N показывают, что предложенный нами обратный способ последовательного действия операторов не уступает по точности способу, предложенному в [6]. Одновременное действие операторов (при синхронном увеличении s_j) приводит к меньшей ошибке, поскольку в этом случае меньше приращения углов: $\Delta s_j \theta_j \leq \pi/N$. Дополнительный вклад в ошибку при последовательном действии вносит дискретность изменения гамильтониана в операторе эволюции (15). Величину ступенек можно уменьшить, если разбить интервалы действия операторов на несколько частей. Например, на первом этапе можно последовательно увеличить все s_j до значения 0.5, а на втором этапе – от 0.5 до 1.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный расчет подтвердил допустимость алгоритма, в котором мы действуем последовательностью операторов (12), начиная с последнего, при этом получается формула (17). Руководствуясь этой формулой, мы можем составить необходимую последовательность РЧ-импульсов. Экспонента, содержащая $\Delta t H(0)$ в (17), есть поворот вокруг оси z . Операторы $U_j(1/N_j)$ согласно (18) являются произведением операторов Адамара и операторов контролируемого сдвига фазы на малый угол, способы реализации которых ЯМР-методами для спиновых систем описаны в разделе 2. Здесь следует обратить внимание, что T – формальное время, тогда как реальное время эксперимента определяется временем, необходимым для реализации операторов контролируемого сдвига фазы, т.е. в конечном счете временем, необходимым для поворота спинов в результате спин-спинового взаимодействия на требуемый угол. Времена однокубитных операторов, осуществляющих повороты спинов с помощью импульсов РЧ-поля, как правило, значительно короче. Из (17)

Ошибки результатов квантового адиабатического вычисления а) как функции протяженности эволюции $N = T/\Delta t$ при $\omega\Delta t = 1.6$ для трех способов действия последовательности операторов в (12) (сплошная линия – одновременное действие, треугольники – действие от начала последовательности к концу, точки – действие от конца к началу); б) как функции величины запирающего поля $\omega\Delta t/\pi$ для разных значений параметра N .

следует, что время, необходимое для моделирования адиабатического вычисления, в два раза больше времени стандартного квантового вычисления (1).

Таким образом, проведенное выше преобразование оператора эволюции позволило избежать трудностей, связанных с построением нелокального многочастичного гамильтониана $H(s)$ (9), осуществляющего адиабатический алгоритм (7). Эффективный гамильтониан необходимого вида теперь образуется автоматически в результате воздействия на гамильтониан спин-спинового взаимодействия подобранной в соответствии с алгоритмом последовательностью РЧ-импульсов (17). Это преобразование, тождественное в идеальных условиях, в реальных системах, к сожалению, перестает быть таковым из-за воздействия окружающей среды. Дело в том, что обкладки у $H(s)$ в формуле (12) воспроизводятся в (17) с помощью спин-спинового взаимодействия, взятого в разные (другие) моменты реального времени. Для установления устойчивости предложенной схемы к тем или иным видам помех потребуются дополнительные исследования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

На основании известных свойств экспоненциальных операторов (см., например, § 15 в книге [12]) выведем некоторые формулы, используемые в тексте. Уравнение движения для оператора эволюции квантовой системы, гамильтониан которой состоит из двух частей, зависящей и не зависящей от времени, имеет вид

$$\frac{d}{dt}U(t) = -i\{H_0 + V(t)\}U(t). \quad (\text{П.1})$$

Если выделить в этом операторе в явном виде оператор эволюции под действием зависящей от времени части,

$$U_v(t) = \hat{P} \exp\left(-i \int_0^t V(t_1) dt_1\right)$$

то

$$U(t) = \hat{P} \exp\left(-i \int_0^t (H_0 + V(t_1)) dt_1\right) = U_v(t)U_H(t). \quad (\text{П.2})$$

Для оператора U_H в последней формуле получим из (П.1) уравнение

$$\frac{d}{dt}U_H(t) = -i\{U_v^{-1}(t)H_0U_v(t)\}U_H(t),$$

решение которого имеет вид

$$U_H(t) = \hat{P} \exp\left(-i \int_0^t H_0(t_1) dt_1\right), \quad (\text{П.3})$$

где

$$H_0(t) = U_v^{-1}(t)H_0U_v(t). \quad (\text{П.4})$$

С другой стороны, из (П.2) находим, что

$$U_H(t) = U_v^{-1}(t)U(t) = U_v^{-1}(t)\hat{P} \exp\left(-i \int_0^t (H_0 + V(t_1)) dt_1\right). \quad (\text{П.5})$$

Формулы (П.3)–(П.5) переходят в (8)–(10) при следующем выборе частей гамильтониана:

$$H_0 = H(0), \quad V(t) = \frac{K}{T}, \quad U_V^{-1}(t) = U.$$

Список литературы

- [1] А. Китаев, А. Шень, М. Вялый, *Классические и квантовые вычисления*, МЦНМО, М., 1999.
- [2] К. А. Валиев, А. А. Кокин, *Квантовые компьютеры: надежды и реальность*, НИЦ РХД, Ижевск, 2002.
- [3] E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann, M. Sipser, *Quantum computation by adiabatic evolution*, [quant-ph/0001106](#); J. Roland, N. J. Cerf, *Phys. Rev. A*, **65** (2002), 042308.
- [4] A. M. Childs, E. Farhi, J. Preskill, *Phys. Rev. A*, **65** (2002), 012322.
- [5] D. Aharonov, W. van Dam, J. Kempe et al, *Adiabatic quantum computation is equivalent to standard quantum computation*, [quant-ph/0405098](#); J. Kempe, A. Kitaev, O. Regev, *SIAM J. Comput.*, **35**:5 (2006), 1070; [quant-ph/0406180](#).
- [6] M. S. Siu, *Phys. Rev. A*, **71** (2005), 062314.
- [7] M. Steffen, W. van Dam, T. Hogg et al., *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2003), 067903.
- [8] L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta et al., *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2000), 5452.
- [9] L. M. K. Vandersypen, I. L. Chuang, *Rev. Mod. Phys.*, **76** (2004), 1037.
- [10] Y. S. Weinstein, M. A. Pravia, E. M. Fortunato et al., *Phys. Rev. Lett.*, **86** (2001), 1889.
- [11] Ч. Сликтер, *Основы теории магнитного резонанса*, Мир, М., 1981.
- [12] Д. Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика*, Наука, М., 1971.
- [13] А. А. Лундин, В. Е. Зобов, *ЖЭТФ*, **103** (1993), 1070.

Поступила в редакцию 26.12.2005,
после доработки 25.08.2006