Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Отражение плазменной волны от плоской границы, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 3, 498–510

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5992>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:37:26

© 2007 г.

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов*

ОТРАЖЕНИЕ ПЛАЗМЕННОЙ ВОЛНЫ ОТ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ

Впервые поставлена и аналитически решена линеаризованная задача об отражении плазменной волны в газовой плазме от границы полупространства. Рассматриваются зеркальные и диффузные граничные условия. Коэффициент отражения найден как функция исходных параметров задачи. Анализируется длинноволновой предел.

Ключевые слова: столкновительная плазма, полупространство, зеркальное отражение, диффузное отражение, длинноволновой предел.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Описание генерации и распространения плазменных волн относится к важнейшим задачам в физике плазмы [1], [2]. В то же время вопрос о взаимодействии плазменных волн с поверхностью плазмы остается до сих пор не проясненным. В настоящей работе проводится анализ взаимодействия нормально падающих на границу плазменных волн с поверхностью плазмы.

Будем считать поле в плазме достаточно слабым, чтобы было применимо линейное приближение [3]. Движением ионов также будем пренебрегать [3]. Для описания поведения электронов будем использовать (см., например, [4]) уравнение Больцмана с интегралом столкновений в форме Бхатнагара–Гросса–Крука

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e_0 \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \nu (f_{\text{eq}} - f) \quad (1.1)$$

и уравнение Максвелла для электрического поля в плазме

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e_0 \int (f - f_0) d^3 v. \quad (1.2)$$

Здесь $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ – функция распределения электронов по скоростям, ν – эффективная частота столкновений электронов с частицами плазмы, f_{eq} – равновесная функция

*Московский государственный областной университет, Москва, Россия.
E-mail: yushkanov@inbox.ru, avlatyshev@mail.ru

распределения,

$$f_{\text{eq}} = n_{\text{eq}} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-mv^2/(2k_B T)}, \quad n_{\text{eq}} = \int f d^3 v,$$

m – масса электрона, T – температура плазмы, $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, e_0 – заряд электрона, $\mathbf{p}$ – импульс электрона, k_B – постоянная Больцмана, f_0 – функция распределения Максвелла,

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-mv^2/(2k_B T)}.$$

Пусть плазма занимает полупространство $x > 0$. Предположим, что электрическое поле в плазме имеет вид $\mathbf{E} = (e(x)e^{-i\omega t}, 0, 0)$. Пусть волна $E_1 e^{-i(kx+\omega t)}$ движется к границе плазмы, от границы отражается волна $E_2 e^{i(kx-\omega t)}$. Требуется найти отношение амплитуд $K = E_2/E_1$, коэффициент отражения $R = |K|^2$ и аргумент отношения амплитуд $\arg K$. Другими словами, нас интересует, какая часть энергии волны диссипирует при отражении от границы и как изменяется фаза волны.

Линеаризуя функцию распределения, представим ее в виде

$$f = f_0(1 + h e^{-i\omega t}), \quad |h| \ll 1, \quad f = f(t, x, v_x), \quad h = h(x, v_x).$$

Выпишем на основании (1.1) и (1.2) линеаризованные уравнения для функции распределения и электрического поля:

$$-i\omega h + \mathbf{v} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} - e_0 E_0 \frac{v_x}{k_B T} + \nu h = \frac{\nu}{n_0} \int f_0 h d^3 v, \quad (1.3)$$

$$e'(x) = 4\pi e_0 \int f_0 h d^3 v. \quad (1.4)$$

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$x' = x \frac{\nu}{v_T}, \quad v_T = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}, \quad \mu = \frac{v_x}{v_T}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m}, \quad \varphi = \frac{\nu}{e_0} \sqrt{\frac{mk_B T}{2}} h.$$

Здесь ω_p – плазменная (ленгмюровская) частота, v_T – тепловая скорость электронов. Введем безразмерное волновое число $k' = kv_T/\omega_p$, где k – размерное волновое число. Тогда

$$kx = k' \frac{\omega_p}{v_T} x' \frac{v_T}{\nu} = \frac{k' x'}{\varepsilon},$$

где $\varepsilon = \nu/\omega_p$. Далее штрих у координаты и волнового числа будем опускать.

С помощью введенных безразмерных величин на основании (1.3) и (1.4) получим систему уравнений, описывающих данную задачу:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + z_0 \varphi(x, \mu) = \mu e(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} \varphi(x, \mu') d\mu', \quad (1.5)$$

$$e'(x) = \frac{2\omega_p^2}{\nu^2 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} \varphi(x, \mu') d\mu', \quad z_0 = 1 - i \frac{\omega}{\nu}. \quad (1.6)$$

Будем полагать, что внешнее электромагнитное поле отсутствует. В объеме плазмы поле ограничено по величине. Поэтому выполняются следующие условия:

$$e(0) = 0, \quad |e(+\infty)| < +\infty. \quad (1.7)$$

Для случая диффузного отражения электронов от поверхности плазмы

$$\varphi(0, \mu) = A, \quad \mu > 0, \quad (1.8)$$

где величина A определяется условием отсутствия тока через границу плазмы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \mu \varphi(0, \mu) d\mu = 0. \quad (1.9)$$

В случае зеркального отражения электронов от поверхности плазмы граничное условие для функции распределения электронов принимает следующий вид:

$$\varphi(0, \mu) = \varphi(0, -\mu), \quad -1 < \mu < 1, \quad (1.10)$$

а условие непротекания (отсутствия тока) выполняется автоматически.

Пусть на границу плазмы приходит волна $E_1 e^{-i(kx/\varepsilon + \omega t)}$, а отражается волна $E_2(k, \varepsilon) e^{i(kx/\varepsilon - \omega t)}$. Частота ω является величиной комплексной: $\omega = \omega_0 + i\omega_1$. Параметр ω_1 отвечает за затухание плазменной волны в объеме плазмы. Введем параметр $\gamma = \gamma_0 + i\gamma_1$, где $\gamma_0 = (\omega_0 - \omega_p)/\omega_p$, $\gamma_1 = \omega_1/\omega_p$.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Будем искать решение системы уравнений (1.5), (1.6) в виде

$$\varphi_\eta(x, \mu) = e^{-z_0 x/\eta} \Phi(\eta, \mu), \quad e_\eta(x) = e^{-z_0 x/\eta} E(\eta). \quad (2.1)$$

Получаем характеристическую систему уравнений

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{z_0} \eta \mu E(\eta) + \frac{\eta}{z_0 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} \Phi(\eta, \mu') d\mu', \quad (2.2)$$

$$E(\eta) = -\frac{\eta}{\eta_1^2 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} \Phi(\eta, \mu') d\mu', \quad \eta_1^2 = \frac{z_0 \varepsilon^2}{2}. \quad (2.3)$$

Исключая интеграл из уравнения (2.2) с помощью (2.3), получаем, что функции $\Phi(\eta, \mu)$ и $E(\eta)$ связаны уравнениями

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \frac{E(\eta)}{z_0} (\mu\eta - \eta_1^2), \quad (2.4)$$

$$\frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} \Phi(\eta, \mu') d\mu' = -\eta_1^2 E(\eta). \quad (2.5)$$

Решение системы уравнений (2.4), (2.5) существенно зависит от того, принадлежит или нет спектральный параметр η действительной оси.

Далее будем рассматривать ограниченные (по переменной x в области $x > 0$) решения исходной системы. Согласно (2.1) решения, отвечающие непрерывному спектру, являются ограниченными тогда и только тогда, когда $\eta \in (0, +\infty)$; таким образом, полуось $0 < \eta < +\infty$ является непрерывным спектром граничной задачи.

Пусть $\eta \in (-\infty, +\infty)$. Тогда из уравнений (2.4) и (2.5) в пространстве обобщенных функций [5] найдем собственные функции характеристической системы: $\Phi(\eta, \mu) = z_0^{-1} F(\eta, \mu) E(\eta)$, где

$$F(\eta, \mu) = P \frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} - \sqrt{\pi} \eta_1^2 z_0 \frac{\lambda(\eta)}{\eta e^{-\eta^2}} \delta(\eta - \mu). \quad (2.6)$$

В равенстве (2.6) $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, функция $\lambda(z)$ называется дисперсионной функцией задачи, Px^{-1} – символ главного значения интеграла от x^{-1} ,

$$\lambda(z) = \lambda_1 + \frac{1}{z_0} \left(1 - \frac{z^2}{\eta_1^2}\right) \lambda_c(z), \quad \lambda_c(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu' e^{-\mu'^2} d\mu'}{\mu' - z}, \quad (2.7)$$

$\lambda_1 = 1 - z_0^{-1}$, $\lambda_c(z)$ – дисперсионная функция Ван Кампена [6]. Функции (2.6) называются собственными функциями непрерывного спектра.

Граничные значения дисперсионной функции, получающиеся при стремлении сверху и снизу к действительной оси,

$$\lambda^{\pm}(\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(\mu \pm i\varepsilon),$$

вычисляются согласно (2.7) по формулам Сохоцкого:

$$\lambda^{\pm}(\mu) = \lambda_1 + \frac{1}{z_0} \left(1 - \frac{\mu^2}{\eta_1^2}\right) (\lambda_c(\mu) \pm i\sqrt{\pi} \mu e^{-\mu^2}),$$

при этом на действительной оси

$$\lambda(\mu) = \lambda_1 + \frac{1}{z_0} \left(1 - \frac{\mu^2}{\eta_1^2}\right) \lambda_c(\mu), \quad \lambda_c(\mu) = 1 - 2\mu^2 e^{-\mu^2} \int_0^1 e^{\mu^2 u^2} du.$$

По определению дискретным спектром характеристического уравнения является множество нулей дисперсионного уравнения $\lambda(z)/z = 0$. Тогда в (2.6) исчезает второе слагаемое.

Разложим дисперсионную функцию в асимптотический ряд в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= \lambda_{\infty} + \frac{\lambda_2}{z^2} + \frac{\lambda_4}{z^4} + \dots, \quad z \rightarrow \infty, \\ \lambda_{\infty} = \lambda(\infty) &= 1 - \frac{1}{z_0} + \frac{\eta_1^2}{2z_0}, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \varepsilon^2 z_0}{4z_0 \eta_1^2}, \quad \lambda_4 = \frac{15 - 3\varepsilon^2 z_0}{8z_0 \eta_1^2}, \quad \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отсюда видно, что решением дисперсионного уравнения является бесконечно удаленная точка $\eta_i = \infty$, которой отвечают дискретные собственные решения исходной системы

$$\varphi_{\infty}(x, \mu) = \frac{E_{\infty} \mu}{z_0}, \quad e_{\infty}(x) = E_{\infty}.$$

Это решение описывает объемную проводимость плазмы, которая впервые была рассмотрена Друде. В связи с этим эту моду называют модой Друде [7].

Вопрос о существовании плазменной моды выяснен в работе авторов [8]. Далее будем рассматривать случай, когда дисперсионная функция имеет два нуля. В силу четности дисперсионной функции ее нули различаются лишь знаком. Обозначим эти нули $\pm\eta_0$, причем за η_0 возьмем такой нуль, у которого $\text{Re } \eta_0 > 0$. Нулям η_0 и $-\eta_0$ отвечают решения $\varphi_{\eta_0}(x, \mu)$, $e_{\eta_0}(x)$ и $\varphi_{-\eta_0}(x, \mu)$, $e_{-\eta_0}(x)$, соответственно. Здесь

$$\begin{aligned}\varphi_{\eta_0}(x, \mu) &= e^{-z_0 x / \eta_0} \frac{E_2}{z_0} \frac{\eta_0 \mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu}, & e_{\eta_0}(x) &= E_2 e^{-z_0 x / \eta_0}, \\ \varphi_{-\eta_0}(x, \mu) &= e^{z_0 x / \eta_0} \frac{E_1}{z_0} \frac{\eta_0 \mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu}, & e_{-\eta_0}(x) &= E_1 e^{z_0 x / \eta_0}.\end{aligned}$$

Эти решения естественно называть плазменными модами. Первая из них описывает плазменные волны, отраженные от границы, а вторая – моды, движущиеся к границе.

Осуществляя замену $\eta_0 = i\varepsilon z_0 / k$, приведем плазменные моды для электрического поля к виду распространяющихся волн:

$$E_2(k, \varepsilon) e^{i(kx/\varepsilon - \omega t)}, \quad E_1 e^{-i(kx/\varepsilon + \omega t)},$$

первая из которых является отраженной от поверхности плазмы (отраженная волна), а вторая движется к поверхности плазмы (падающая волна).

Будем исследовать отражение плазменных волн [1], [3]. Чтобы найти связь между амплитудами E_1 и $E_2(k, \varepsilon)$, необходимо исследовать поведение плазмы вблизи поверхности. Для этого будем решать уравнения (1.5) и (1.6) сначала с зеркальными, а затем с диффузными граничными условиями.

Решение обеих задач будем искать в виде разложения по собственным функциям характеристической системы:

$$\begin{aligned}\varphi(x, \mu) &= \frac{E_1}{z_0} \frac{\eta_0 \mu + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu} e^{-ikx/\varepsilon} + \frac{E_2}{z_0} \frac{\eta_0 \mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu} e^{ikx/\varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{z_0} \int_0^\infty e^{-\frac{z_0 x}{\eta}} F(\eta, \mu) E(\eta) d\eta,\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$e(x) = E_1 e^{-ikx/\varepsilon} + E_2 e^{ikx/\varepsilon} + \int_0^\infty e^{-z_0 x / \eta} E(\eta) d\eta.\tag{2.10}$$

Здесь E_2 – неизвестный коэффициент, $E(\eta)$ – неизвестна функция.

Воспользуемся условием непротекания (1.9). Предварительно вычислим первые моменты собственных функций непрерывного и дискретного спектров. Для собственных функций непрерывного и дискретного спектров имеем

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty e^{-\mu^2} \mu F(\eta, \mu) d\mu &= \sqrt{\pi} \eta_1^2 (1 - z_0) = i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{\nu} \eta_1^2, \\ \int_{-\infty}^\infty e^{-\mu^2} \mu F(\pm\eta_0, \mu) d\mu &= \sqrt{\pi} \eta_1^2 (1 - z_0) = i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{\nu} \eta_1^2.\end{aligned}$$

Теперь воспользуемся условием (1.9). С учетом предыдущих равенств

$$E_1 + E_2 + K_0 = 0, \quad K_0 = \int_0^\infty E(\eta) d\eta. \quad (2.11)$$

Заметим, что в точности к уравнению (2.11) приводит условие (1.7), если в последнее подставить разложение (2.10).

3. ЗЕРКАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ

Будем решать граничную задачу, состоящую из уравнений (1.5), (1.6) и граничных условий (1.7), (1.10). Подставим разложение (2.9) в граничное условие (1.10). Получаем следующее уравнение:

$$(E_1 + E_2)\varphi_0(\mu) + \int_0^\infty [F(\eta, \mu) - F(\eta, -\mu)]E(\eta) d\eta = 0. \quad (3.1)$$

Здесь

$$\varphi_0(\mu) = \frac{\eta_1^2 - \eta_0\mu}{\mu - \eta_0} + \frac{\eta_1^2 + \eta_0\mu}{\mu + \eta_0}.$$

Продолжим функцию $E(\eta)$ на отрицательную полуось четным образом. Вместо уравнения (3.1) получаем

$$(E_1 + E_2)\varphi_0(\mu) + \int_{-\infty}^\infty F(\eta, \mu)E(\eta) d\eta = 0. \quad (3.2)$$

Подставим собственные функции непрерывного спектра в уравнение (3.2). Получим сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$(E_1 + E_2)\varphi_0(\mu) + \int_{-\infty}^\infty \frac{\eta\mu - \eta_1^2}{\eta - \mu} E(\eta) d\eta - \sqrt{\pi}z_0\eta_1^2 \frac{\lambda(\mu)E(\mu)}{\mu e^{-\mu^2}} = 0. \quad (3.3)$$

Введем вспомогательную функцию

$$M(z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\eta z - \eta_1^2}{\eta - z} E(\eta) d\eta, \quad (3.4)$$

граничные значения которой на действительной оси сверху и снизу связаны формулой

$$M^+(\mu) - M^-(\mu) = 2\pi i(\mu^2 - \eta_1^2)E(\mu). \quad (3.5)$$

С помощью равенств (3.4) и (3.5) и таких же равенств для дисперсионной функции сведем уравнение (3.3) к краевому условию на всей действительной оси:

$$\lambda^+(\mu)[M^+(\mu) + (E_1 + E_2)\varphi_0(\mu)] = \lambda^-(\mu)[M^-(\mu) + (E_1 + E_2)\varphi_0(\mu)].$$

Это уравнение имеет следующее решение:

$$M(z) = -(E_1 + E_2) \left(\frac{\eta_1^2 - \eta_0 z}{z - \eta_0} + \frac{\eta_1^2 + \eta_0 z}{z + \eta_0} \right).$$

Исключая его полюсы, получаем

$$E_2 = -E_1. \quad (3.6)$$

Подставляя функцию $M(z)$ в равенство (3.5), находим, что $E(\eta) \equiv 0$, т.е. уравнение (3.3) имеет лишь тривиальное решение.

Это означает, что решение задачи определяется только дискретным спектром и имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(x, \mu) &= \frac{E_1}{z_0} \frac{\eta_0 \mu + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu} e^{-ikx/\varepsilon} - \frac{E_1}{z_0} \frac{\eta_0 \mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu} e^{ikx/\varepsilon}, \\ e(x) &= E_1 e^{-ikx/\varepsilon} - E_1 e^{ikx/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Преобразуем это решение с помощью замены $\eta_0 = iz_0 \varepsilon / k$ и получим, что задача с зеркальным отражением электронов от границы имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \varphi(x, \mu) &= \frac{2iE_1}{z_0 k(\mu^2 - \eta_0^2)} \left[\mu k(\eta_1^2 - \eta_0^2) \sin \frac{kx}{\varepsilon} + iz_0(\eta_1^2 - \mu^2) \cos \frac{kx}{\varepsilon} \right], \\ e(x) &= -2E_1 i \sin \frac{kx}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Это решение мы обсудим ниже.

4. ДИФФУЗНОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ

Будем решать граничную задачу, состоящую из уравнений (1.5), (1.6) и граничных условий (1.7)–(1.9). Подставим разложение (2.9) в граничное условие (1.8). Получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$\varphi_1(\mu) + \int_0^\infty \frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} E(\eta) d\eta - \sqrt{\pi} \eta_1^2 z_0 \frac{\lambda(\mu)E(\mu)}{\mu e^{-\mu^2}} = 0. \quad (4.1)$$

Здесь

$$\varphi_1(\mu) = -Az_0 + E_1 \frac{\eta_0 \mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu} + E_2 \frac{\eta_0 \mu + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu}.$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \int_0^\infty \frac{z\eta - \eta_1^2}{\eta - z} E(\eta) d\eta, \quad (4.2)$$

для которой

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\pi i(\mu^2 - \eta_1^2)E(\eta), \quad \mu > 0. \quad (4.3)$$

С помощью равенств (4.2) и (4.3) сведем уравнение (4.1) к неоднородной краевой задаче Римана

$$\lambda^+(\mu)[N^+(\mu) + \varphi_1(\mu)] = \lambda^-(\mu)[N^-(\mu) + \varphi_1(\mu)], \quad \mu > 0. \quad (4.4)$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу Римана:

$$X^+(\mu) = G(\mu)X^-(\mu), \quad \mu > 0, \quad G(\mu) = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}. \quad (4.5)$$

Каноническим решением, имеющим в бесконечно удаленной точке порядок, равный индексу коэффициента $G(\tau)$, для задачи (4.5) является (см. монографию [9]) функция

$$X(z) = \frac{1}{z} e^{V(z)}, \quad V(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln G(\tau) - 2\pi i}{\tau - z} d\tau.$$

Преобразуем неоднородную задачу (4.4) с помощью однородной к задаче определения аналитической функции по ее нулевому скачку на разрезе:

$$X^+(\mu)[N^+(\mu) + \varphi_1(\mu)] = X^-(\mu)[N^-(\mu) + \varphi_1(\mu)], \quad \mu > 0. \quad (4.6)$$

Общее решение задачи (4.6) содержит две произвольные постоянные C_1 , C_2 и имеет вид

$$N(z) = Az_0 - E_1 \frac{\eta_0 z + \eta_1^2}{\eta_0 + z} - E_2 \frac{\eta_0 z - \eta_1^2}{\eta_0 - z} + \frac{1}{X(z)} \left[\frac{C_1}{z + \eta_0} + \frac{C_2}{z - \eta_0} \right]. \quad (4.7)$$

Устраняя полюсы у решения (4.7), находим

$$C_1 = -E_1(\eta_0^2 - \eta_1^2)X(-\eta_0), \quad C_2 = -E_2(\eta_0^2 - \eta_1^2)X(\eta_0). \quad (4.8)$$

Коэффициент непрерывного спектра $E(\eta)$ найдем в явном виде, если подставим решение (4.7) в формулу Сохоцкого (4.3):

$$E(\eta) = \frac{1}{2\pi i(\eta^2 - \eta_1^2)} \left(\frac{C_1}{\eta + \eta_0} + \frac{C_2}{\eta - \eta_0} \right) \left(\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right).$$

Из уравнения (2.11) найдем линейную связь между константами E_1 и E_2 . Интеграл K_0 можно представить в виде

$$K_0 = C_1 J(\eta_0) + C_2 J(-\eta_0). \quad (4.9)$$

Здесь принято обозначение

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty [\Phi_0^+(\tau, z) - \Phi_0^-(\tau, z)] d\tau,$$

в котором

$$\Phi_0^\pm(\tau, z) = \frac{1}{X^\pm(\tau)(\tau^2 - \eta_1^2)(\tau - z)}.$$

Возьмем замкнутый контур Γ_ε , охватывающий начало координат и действительную положительную полуось (рис. 1). Выполняя контурное интегрирование, получаем

$$\begin{aligned} J(z) &= \operatorname{Res}_{\tau=z} \Phi_0(\tau, z) + \operatorname{Res}_{\tau=\eta_1} \Phi_0(\tau, z) + \operatorname{Res}_{\tau=-\eta_1} \Phi_0(\tau, z) = \\ &= \frac{1}{X(z)(z^2 - \eta_1^2)} + \frac{1}{2\eta_1 X(\eta_1)(\eta_1 - z)} + \frac{1}{2\eta_1 X(-\eta_1)(\eta_1 + z)}. \end{aligned}$$

Рис. 1

Вычисляя $J(\pm\eta_0)$ и используя равенства (2.11), (4.8) и (4.9) получаем

$$E_1 + E_2 + K_0 = C_1 \left[\frac{1}{2\eta_1 X(\eta_1)(\eta_1 - \eta_0)} + \frac{1}{2\eta_1 X(-\eta_1)(\eta_1 + \eta_0)} \right] + \\ + C_2 \left[\frac{1}{2\eta_1 X(\eta_1)(\eta_1 + \eta_0)} + \frac{1}{2\eta_1 X(-\eta_1)(\eta_1 - \eta_0)} \right] = 0,$$

откуда

$$K(\eta_0, \eta_1) = \frac{X(-\eta_0)}{X(\eta_0)} \frac{X(\eta_1)(\eta_0 + \eta_1) - X(-\eta_1)(\eta_0 - \eta_1)}{X(\eta_1)(\eta_0 - \eta_1) - X(-\eta_1)(\eta_0 + \eta_1)}. \quad (4.10)$$

Для завершения решения задачи осталось найти неизвестную константу A . Приравняем пределы в бесконечно удаленной точке в левой и правой частях решения (4.7). Получаем следующее уравнение:

$$Az_0 = -K_1 + \eta_0(E_1 - E_2) - (C_1 - C_2), \quad (4.11)$$

где

$$K_1 = \int_0^\infty \eta E(\eta) d\eta.$$

Интеграл K_1 представим в виде $K_1 = C_1 J_1(\eta_0) + C_2 J_1(-\eta_0)$, где

$$J_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left(\frac{1}{X^+(\tau)} - \frac{1}{X^-(\tau)} \right) \frac{\tau d\tau}{(\tau^2 - \eta_1^2)(\tau - z)}.$$

Введем функцию

$$\Phi_1(\tau, z) = \frac{\tau}{X(\tau)(\tau^2 - \eta_1^2)(\tau - z)} - \frac{1}{\tau},$$

обладающую в окрестности бесконечно удаленной точки асимптотикой $\Phi_1(\tau, z) \sim \tau^{-2}$, $\tau \rightarrow \infty$. При этом

$$J_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty [\Phi_1^+(\tau, z) - \Phi_1^-(\tau, z)] d\tau.$$

Используя контурное интегрирование, получаем, что

$$\begin{aligned} J_1(z) &= \left[\text{Res}_{\tau=0} + \text{Res}_{\tau=\eta_1} + \text{Res}_{\tau=-\eta_1} + \text{Res}_{\tau=z} \right] \Phi_1(\tau, z) = \\ &= -1 + \frac{1}{2X(\eta_1)(\eta_1 - z)} - \frac{1}{2X(-\eta_1)(\eta_1 + z)} + \frac{z}{X(z)(z^2 - \eta_1^2)}. \end{aligned}$$

С помощью этого равенства находим

$$\begin{aligned} K_1 &= -(C_1 + C_2) + \eta_0(E_1 - E_2) + \\ &+ \frac{\lambda_\infty}{2\lambda_1} [\eta_0(C_1 - C_2)[X(\eta_1 + X(-\eta_1))] + \eta_1(C_1 + C_2)[X(\eta_1) - X(-\eta_1)]]. \end{aligned}$$

Теперь константу A можно получить из равенства (4.11).

Задача с диффузным граничным условием решена полностью.

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТРАЖЕНИЯ ПЛАЗМЕННОЙ ВОЛНЫ

В случае зеркального отражения электронов от границы из равенства (3.6) имеем

$$R = 1, \quad \arg K = -\pi. \quad (5.1)$$

Этот результат физически очевиден: падающая на стенку волна не теряет энергию при зеркальном отражении электронов от границы.

Отметим, что формула (4.10) непрерывно переходит в формулу (5.1) в длинноволновом пределе, т.е. когда волновое число стремится к нулю. В самом деле, в этом случае $\eta_0 \rightarrow \infty$, откуда и вытекает равенство (5.1).

Используя разложение (2.8), рассмотрим уравнение $\lambda(i\varepsilon z_0/k) = 0$. При малых волновых числах k дисперсионное уравнение упрощается и принимает вид $\lambda(i\varepsilon z_0/k) = \lambda_\infty - \lambda_2 k^2 / (\varepsilon^2 z_0^2) = 0$. Перепишем его как

$$-[2\gamma + i\varepsilon + \gamma(\gamma + i\varepsilon)][\varepsilon - i(1 + \gamma)]^2 = \frac{k^2}{2}[3 - \varepsilon^2 + i\varepsilon(1 + \gamma)].$$

Это уравнение определяет в неявном виде функцию $\gamma = \gamma(k, \varepsilon)$. Линеаризуя его уравнение по k^2 и ε , находим, что $\gamma_0 = 0.75k^2$, $\gamma_1 = -0.5\varepsilon$. С помощью найденных выражений получаем

$$z_0 = -0.5 - i \frac{1 + 0.75k^2}{\varepsilon}, \quad \eta_0 = i \frac{\varepsilon z_0}{k} = \frac{1 + 0.75k^2 + i0.5\varepsilon}{k}.$$

Преобразуем формулу (4.10) для $K(\eta_0, \eta_1)$. Для этого сначала заметим, что

$$K = -e^{a(\eta_0)} \frac{\eta_0 - \eta_1 + (\eta_0 - \eta_1)e^{a(\eta_1)}}{\eta_0 - \eta_1 + (\eta_0 + \eta_1)e^{a(\eta_1)}}, \quad (5.2)$$

где

$$a(\eta_0) = V(-\eta_0) - V(\eta_0), \quad a(\eta_1) = V(-\eta_1) - V(\eta_1).$$

Заметим, что $\lambda(z) \rightarrow \lambda_0(z) = 1 + 2z^2\lambda_c(z)$ при $k, \varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, в этом пределе $\ln G(\tau) \rightarrow 2i\theta(\tau)$, где $\theta(\tau) = \arg \lambda_0^+(\tau)$, $\theta(0) = 0$; кроме того,

$$\begin{aligned} a(\eta_0) &= -\frac{2V_1}{\eta_0}, & V_1 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty [\theta(\tau) - \pi] d\tau = 1.419957, \\ a(\eta_1) &= i\pi - 2W_1\eta_1, & W_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\theta(\tau) d\tau}{\tau^2} = 1.001342. \end{aligned}$$

Обозначим отношение амплитуд K в длинноволновом пределе через K_0 . Согласно (5.2) для рассматриваемого случая получаем

$$K_0 = -e^{-2V_1/\eta_0} \frac{\eta_0 + \eta_1 - (\eta_0 - \eta_1)e^{-2W_1\eta_1}}{\eta_0 - \eta_1 - (\eta_0 + \eta_1)e^{-2W_1\eta_1}}.$$

Линеаризуя эту формулу, находим, что

$$K_0 = -1 + \frac{2}{\eta_0} \left(V_1 - \frac{1}{W_1} \right) = -1 + 0.842594k. \quad (5.3)$$

При $\varepsilon = 0.001$, $k = 0.001$ из формулы (4.10) имеем $K = -0.99136 - 7.95438 \cdot 10^{-5}i$, а из формулы (5.3) получаем $K_0 = -0.99916$.

Рис. 2

Отметим, что зависимость от ε величины K в линейном приближении по ε и по k отсутствует.

Рис. 3

На рис. 2 изображена зависимость коэффициента отражения R от волнового числа k . Кривые 1, 2 отвечают параметрам $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-3}$, соответственно, кривая 3 – асимптотике $R_{\text{as}}(k) = |K_0(k)|^2$. Зависимости, полученные при величинах $\varepsilon = 10^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-3}$, сливаются в одну линию при $0 \leq k \leq 0.05$. При этом зависимости, полученные с использованием функций K и K_0 , не отличаются.

Отклонение коэффициента отражения от его асимптотики $R_{\text{as}}(k) = |K_0(k)|^2$ начинается при $k > 0.05$. Модуль величины K при всех рассмотренных значениях параметров ε , k близок к единице. При этом $|\text{Im}(K)| \ll |K|$. Поэтому величина $\text{Im}(K)$ близка (а по сути совпадает) с $\arg(K) + \pi$.

На рис. 3 представлена зависимость величины $-\text{Im } K$ от волнового числа k ; кривые 1, 2, 3, 4 отвечают следующим значениям параметра ε : $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые поставлена и аналитически решена задача об отражении плазменных волн от границы полупространства. Рассмотрены случаи зеркального и диффузного отражения электронов от границы плазмы.

Исследован случай длинноволновой асимптотики, когда волновое число $k \rightarrow 0$. Такое исследование оказалось возможным благодаря тому, что в этом случае квадрат модуля корня дисперсионной функции задачи много больше единицы. Это обстоятельство дает возможность провести асимптотический анализ решения.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00642).

Список литературы

- [1] А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, М., 1988.
- [2] В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Госатомиздат, М., 1961.
- [3] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, М., 1979.
- [4] В. В. Веденяпин, *Кинетические уравнения Больцмана и Власова*, Физматлит, М., 2001; А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Граничные задачи для вырожденной электронной плазмы*, МГОУ, М., 2006.
- [5] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Физматлит, М., 2000.
- [6] Н. Г. Ван Кампен, “К теории стационарных волн в плазме”, *Колебания сверхвысоких волн в плазме*, ред. Г. А. Бернашевский, З. С. Чернов, ИЛ, М., 1961, 57.
- [7] J. M. Keller, R. Fuchs, K. L. Kliewer, *Phys. Rev. B*, **12**:6 (1975), 2012.
- [8] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Изв. РАН. Сер. МЖГ*, 2006, № 1, 165.
- [9] И. К. Лифанов, *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн)*, ТОО “Янус”, М., 1995.

Поступила в редакцию 3.05.2005,
После доработки 5.06.2006