Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ал. Б. Замолодчиков, Гравитационная модель Янга–Ли.
Четырехточечная функция, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 1, 3–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6008>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:58:10

© 2007 г.

Ал. Б. Замолодчиков*

ГРАВИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ЯНГА–ЛИ. ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Численно определяется четырехточечный пертурбативный вклад в статистическую сумму сферы гравитационной модели Янга–Ли. Предложена эффективная процедура вычисления интегралов, основанная на удобной эллиптической параметризации пространства модулей. При определенных значениях “спектаторного” параметра четырехточечная функция Лиувилля содержит ряд “дискретных членов”, которые следует учитывать отдельно. Рассмотрен также классический предел, где выживают только дискретные члены. Кроме того, предложено явное выражение для сферической статсуммы во “второй явно решаемой точке”, где “материя–наблюдатель” представляет собой еще одну минимальную модель $M_{2/5}$ (модель Янга–Ли).

Ключевые слова: квантовые гравитации, теория Лиувилля, конформная теория поля.

Памяти моего Учителя – К. А. Тер-Мартirosяна

“Физик-теоретик – это ответственный работник. Небрежные и неправильные теоретические статьи приносят науке не пользу, а вред. Как подтасовки в эксперименте [1].”

К. А. Тер-Мартirosян

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта статья является непосредственным продолжением предыдущих работ [2], [3], где определенного рода численно-аналитический метод экстраполяции ряда теории возмущений применялся для изучения сферических статсумм возмущенной конформной материи, взаимодействующей с квантованной двумерной гравитацией. В этих работах в качестве примера возмущенной материи взята скейлинговая модель Янга–Ли (дополненная конформно-инвариантной “материей–наблюдателем”).

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия; Laboratoire de Physique Mathématique et Astroparticules, Laboratoire Associé au CNRS UMR 5825, Université Montpellier II, Montpellier, France; Service de Physique Théorique CNRS – URA 2306, C.E.A. – Saclay, Gif-sur-Yvette, France.
E-mail: Aliocha.ZAMOLODCHIKOV@lpta.univ-montp2.fr

Аналогичные вычисления для случая поля свободных массивных майорановских фермионов (скейлинговая модель Изинга) можно найти в статье [4].

Для удобства дальнейшего изложения в этом разделе мы даем краткий обзор основных понятий и идей работы [3]. В основном это сделано для того, чтобы в дальнейшем облегчить ссылки и ввести обозначения. Ни в коем случае не следует считать данную статью самостоятельной, предполагается хотя бы минимальное знакомство с предыдущей работой [3].

Гравитационная модель Янга–Ли (ГМЯЛ) может быть условно определена через плотность лагранжиана

$$\mathcal{L}_{\text{GYL}} = \mathcal{L}_{\text{matter}} + \mathcal{L}_{\text{L}} + \mathcal{L}_{\text{gh}}, \quad (1.1)$$

где $\mathcal{L}_{\text{L}}$ обычно называется “лиувиллиевской” компонентой теории,

$$\mathcal{L}_{\text{L}} = \frac{1}{4\pi}(\partial_a \phi)^2 + \mu e^{2b\phi}, \quad (1.2)$$

а $\mathcal{L}_{\text{gh}}$ представляет собой лагранжиан BC -системы конформных духов с центральным зарядом $c_{\text{gh}} = -26$. Коэффициент μ называется космологической постоянной, а параметр b связан с центральным зарядом теории Лиувилля $c_{\text{L}} = 1 + 6Q^2$ через так называемый “фоновый заряд” $Q = b + b^{-1}$. Компонента материи состоит из невозмущенной конформной теории поля (КТП) “материи–наблюдателя” с центральным зарядом c_{sp} и минимальной модели КТП $\mathcal{M}_{2/5}$ (критической модели Янга–Ли [5] с $c_{\text{YL}} = -22/5$), возмущенной единственным нетривиальным первичным оператором φ из $\mathcal{M}_{2/5}$, т.е. фундаментальным полем модели Янга–Ли размерности $\Delta = -1/5$,

$$\mathcal{L}_{\text{matter}} = \mathcal{L}_{\text{sp}} + \mathcal{L}_{\text{YL}} + \frac{i\lambda}{2\pi} \varphi(x) e^{2g\phi}. \quad (1.3)$$

Параметры b в (1.2) и g в члене взаимодействия в выражении (1.3) подобраны таким образом, чтобы выполнялись “уравнения баланса”

$$\begin{aligned} c_{\text{sp}} + c_{\text{YL}} + c_{\text{L}} + c_{\text{gh}} &= 0, \\ g(Q - g) + \Delta &= 1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В случае топологии сферы, который мы только и рассматриваем в этой работе, никакие конкретные свойства “материи–наблюдателя”, кроме параметра c_{sp} , не играют роли. Эта компонента материи добавлена исключительно для того, чтобы получить возможность произвольно менять параметр b^2 модели и, в частности, иметь связь с классическим пределом. Взаимодействие содержит размерную константу связи $\lambda \sim \mu^{1/\rho}$, где

$$\rho = bg^{-1}. \quad (1.5)$$

Статистическая сумма сферы $Z(\mu, \lambda)$ в рассматриваемой модели разлагается в регулярный ряд теории возмущений по константе связи λ :

$$\frac{Z(\mu, \lambda)}{Z(\mu, 0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{(2\pi)^n n!} \langle \langle (\varphi e^{2g\phi})^n \rangle \rangle_{\text{LG}}, \quad (1.6)$$

где $\langle\langle(\varphi e^{2g\phi})^n\rangle\rangle_{\text{LG}}$ представляют собой (проинтегрированные и нормированные) n -точечные функции в лиувиллиевской гравитации (т.е. при $\lambda = 0$).

Нормированные корреляционные функции имеют следующие масштабные свойства¹⁾:

$$\langle\langle(\varphi e^{2g\phi})^n\rangle\rangle_{\text{LG}} = (\pi\mu)^{-n/\rho} a_n \quad (1.7)$$

с некоторыми числовыми величинами a_n , т.е. ряд теории возмущений в действительности идет по степеням безразмерного масштабного параметра $\lambda\mu^{-1/\rho}$. Удобно также ввести ненормированные корреляционные функции

$$\langle(\varphi e^{2g\phi})^n\rangle_{\text{LG}} = (\pi\mu)^{Q/b-n/\rho} G_n. \quad (1.8)$$

В лиувиллиевской гравитации эти корреляционные функции вычисляются как интегралы от произведений n -точечных функций конформной теории Лиувилля и минимальной модели $\mathcal{M}_{2/5}$:

$$\begin{aligned} \langle(\varphi e^{2g\phi})^n\rangle_{\text{LG}} &= \langle C\bar{C}(x_1)C\bar{C}(x_2)C\bar{C}(x_3)\rangle_{\text{gh}} \times \\ &\times \int \langle\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\rangle_{\text{YL}} \langle V_g(x_1)\dots V_g(x_n)\rangle_{\text{L}} d^2x_4\dots d^2x_n, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\langle\dots\rangle_{\text{gh}}$, $\langle\dots\rangle_{\text{YL}}$ и $\langle\dots\rangle_{\text{L}}$ представляют собой корреляционные функции в теории духов, минимальной модели КТП $\mathcal{M}_{2/5}$ и в теории Лиувилля, соответственно (в последнем случае имеются в виду ненормированные корреляторы). Вдобавок введено обозначение $V_g = \exp(2g\phi)$ для основных (экспоненциальных) полей Лиувилля. С геометрической точки зрения $(n-3)$ -кратный интеграл в (1.9) можно интерпретировать как интеграл по пространству модулей сферы с n проколами.

Как и в [3], в настоящей статье нас интересует главным образом статистическая сумма сферы с фиксированной площадью $Z_A(\lambda)$, связанная с большой статсуммой $Z(\mu, \lambda)$ соотношением

$$Z(\mu, \lambda) = \int_{(0)}^{\infty} Z_A(\lambda) e^{-\mu A} \frac{dA}{A}. \quad (1.10)$$

Нижний предел (0) в этой формуле представляет собой некоторое предписание для регуляризации расходящегося при малых A интеграла [3]. Масштабные свойства статсуммы с фиксированной площадью позволяют представить ее в виде

$$Z_A(\lambda) = Z_A(0)z(h), \quad (1.11)$$

где $Z_A(0)$ пропорционально $A^{-Q/b}$. Функция скейлинга $z(h)$ представляет собой регулярный ряд,

$$z(h) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n (-h)^n, \quad (1.12)$$

по степеням безразмерного параметра скейлинга

$$h = \lambda \left(\frac{A}{\pi} \right)^{1/\rho}. \quad (1.13)$$

¹⁾Обозначения в этой работе несколько отличаются от обозначений в [3], где коэффициенты a_n были выбраны размерными и содержали в себе множитель $(2\pi)^n n!$.

Легко видеть, что коэффициенты z_n связаны с числами a_n в формуле (1.7) соотношением

$$z_n = \frac{a_n \Gamma(-1 - b^{-2})}{(2\pi)^n n! \Gamma(n\rho^{-1} - b^{-2} - 1)}. \quad (1.14)$$

Иногда удобно записать эти коэффициенты как

$$z_n = \frac{\mathcal{I}_n}{(2\pi)^n n! Z_L^{(A)}}, \quad (1.15)$$

т.е. выразить их непосредственно через ненормированные корреляционные функции с фиксированной площадью,

$$\langle (\varphi e^{2g\phi})^n \rangle^{(A)} = \left(\frac{A}{\pi} \right)^{n/\rho - Q/b} \mathcal{I}_n = \frac{(A\pi^{-1})^{n/\rho - Q/b} G_n}{\Gamma(ngb^{-1} - 1 - b^{-2})}, \quad (1.16)$$

и “микрoканоническую” статсумму (т.е. тоже с фиксированной площадью)²⁾,

$$Z_L^{(A)} = \frac{\gamma^{1/b^2}(b^2)}{\pi^3 b \Gamma(b^{-2} - 1)}. \quad (1.17)$$

В [3] было показано, что $z(h)$ является целой функцией h .

Удельная энергия в бесконечном объеме $\mathcal{E}_{\text{vac}}(b^2) = -\mu_c$ появляется в ведущей при $A \rightarrow \infty$ асимптотике $Z_A(\lambda)$:

$$Z_A(\lambda) \sim Z_\infty \left(\frac{A}{\pi} \right)^{-Q_{\text{IR}}/b_{\text{IR}}} \exp(-\mathcal{E}_{\text{vac}}(b)A). \quad (1.18)$$

Эта величина имеет вид

$$\mu_c = f_0(b^2)\lambda^\rho. \quad (1.19)$$

Здесь появилась безразмерная функция $f_0(b^2)$, которая является важной характеристикой ГМЯЛ. Основной темой работы [3], а также настоящей статьи является численное исследование величины $f_0(b^2)$ при различных значениях параметра b^2 “материи–наблюдателя”. Параметры $Q_{\text{IR}} = b_{\text{IR}}^{-1} + b_{\text{IR}}$ и b_{IR} в (1.18) полностью определяются “инфракрасным балансом центральных зарядов” [3]:

$$1 + 6Q_{\text{IR}}^2 + c_{\text{sp}} = 26. \quad (1.20)$$

Для функции скейлинга $z(h)$ формула (1.18) приводит к следующему асимптотическому поведению при $h \rightarrow \infty$:

$$\ln z(h) = \pi f_0(b) h^\rho + \left(\delta + \frac{1}{2} \right) \ln h + O(1), \quad (1.21)$$

где

$$\delta + \frac{1}{2} = \rho(Qb^{-1} - Q_{\text{IR}}b_{\text{IR}}^{-1}). \quad (1.22)$$

²⁾Здесь и в дальнейшем используется обозначение $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$, уже ставшее стандартным в двумерной теории поля.

Все приведенные выше рассуждения имеют либо кинематический характер, либо основаны на естественных физических предположениях. Менее тривиальным является наблюдение, что в ГМЯЛ (а также во многих других важных моделях двумерной гравитации, см., например, [4]) асимптотика (1.21) остается справедливой во всей комплексной плоскости, за исключением отрицательной части мнимой оси, а также что все нули целой функции $z(h)$ вещественны. Это свойство было установлено в результате численного исследования классического предела $b^2 = 0$ [2], а также в специальном случае $b^2 = 0.4$, допускающем точное решение. Как естественное предположение, это свойство можно распространить на всю область параметра b^2 . Совместно с асимптотическим поведением (1.21) это предположение приводит к эффективному численно-аналитическому алгоритму, позволяющему с большой точностью вычислить функцию скейлинга, исходя из нескольких коэффициентов z_n ряда теории возмущений (1.12) (детально это описано в статье [3]).

В предыдущей работе мы использовали эти коэффициенты вплоть до z_3 включительно. В этих порядках вычисление корреляционных функций материи и корреляционных функций Лиувилля не представляет существенных технических трудностей. В этой статье мы предлагаем метод численного интегрирования по модулям, который позволяет вычислить четырехточечную функцию в (1.9) с точностью, достаточной для улучшения результата работы [3].

Для полноты приведем здесь выражения для z_2 и z_3 , использованные в [3]:

$$\begin{aligned} z_2 &= -\frac{\gamma^{1-2g/b}(b^2)\Gamma(b^{-2}-1)\gamma(2gb-b^2)}{8\Gamma(1+b^{-2}-2gb^{-1})}, \\ z_3 &= \kappa \frac{\gamma^{1-3g/b}(b^2)\Gamma(b^{-2}-1)\gamma(3gb-b^2)\Upsilon_b(b)\Upsilon_b^3(2g)}{48b\Gamma(2+b^{-2}-3gb^{-1})\Upsilon_b(3g)\Upsilon_b^3(g)}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где параметр

$$\kappa = \frac{\gamma^{3/2}(1/5)}{5\gamma^{1/2}(3/5)} = 1.91131\dots \quad (1.24)$$

в последней формуле связан с базисной структурной константой $C_{\varphi\varphi\varphi}$ критической модели Янга–Ли [5]. Трансцендентная функция $\Upsilon_b(x)$ является стандартным элементом в конструкции теории Лиувилля (определение и свойства см. в [6] или в [7]).

2. ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ МАТЕРИИ

В четырехточечном случае интеграл (1.9) сводится к интегралу по одной координате:

$$\langle (\varphi e^{2g\phi})^4 \rangle_{\text{LG}} = \int G_{\text{YL}}(x, \bar{x}) G_{\text{L}}(x, \bar{x}) d^2x, \quad (2.1)$$

где как в четырехточечной функции модели Янга–Ли

$$G_{\text{YL}}(x, \bar{x}) = \langle \varphi(0)\varphi(1)\varphi(\infty)\varphi(x) \rangle_{\text{YL}}, \quad (2.2)$$

так и в лиувиллиевской функции

$$G_{\text{L}}(x, \bar{x}) = \langle V_g(0)V_g(1)V_g(\infty)V_g(x) \rangle_{\text{L}} \quad (2.3)$$

мы воспользовались проективной инвариантностью подынтегрального выражения, чтобы поместить точки x_1 , x_2 и x_3 в 0, 1 и ∞ , соответственно.

Четырехточечная функция в модели $\mathcal{M}_{2/5}$ имеет следующий явный вид [5]:

$$G_{\text{YL}}(x, \bar{x}) = \mathcal{F}_I(x) \mathcal{F}_I(\bar{x}) - \kappa^2 \mathcal{F}_\varphi(x) \mathcal{F}_\varphi(\bar{x}), \quad (2.4)$$

где κ задается формулой (1.24), а блоки $\mathcal{F}_{I,\varphi}(x)$ выражаются через гипергеометрические функции:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I(x) &= x^{2/5} (1-x)^{1/5} {}_2F_1(2/5, 3/5, 6/5, x), \\ \mathcal{F}_\varphi(x) &= x^{1/5} (1-x)^{1/5} {}_2F_1(1/5, 2/5, 4/5, x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

3. ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Ненормированную четырехточечную функцию Лиувилля (2.3) можно представить как интеграл по промежуточным импульсам P [6] (см. также [3], откуда взято приведенное ниже выражение). В нашем случае представляется более удобным начать с четырехточечной функции Лиувилля с фиксированной площадью A :

$$G_L^{(A)}(x, \bar{x}) = \left(\frac{A}{\pi} \right)^{(4g-Q)/b} g_L(x, \bar{x}). \quad (3.1)$$

В общем случае функция $g_L(x, \bar{x})$ может быть вычислена с помощью следующего интегрального представления:

$$g_L(x, \bar{x}) = \frac{\mathcal{R}_g}{\Gamma(4gb^{-1} - b^{-2} - 1)} \int' r_g(P) \mathcal{F}_P(x) \mathcal{F}_P(\bar{x}) \frac{dP}{4\pi}. \quad (3.2)$$

Штрих у знака интеграла обозначает возможные дискретные члены (см. ниже), а

$$\mathcal{F}_P(x) = \mathcal{F}_P \left(\begin{matrix} \Delta_g & \Delta_g \\ \Delta_g & \Delta_g \end{matrix} \middle| x \right) \quad (3.3)$$

представляет собой четырехточечный конформный блок общего положения, у которого все четыре внешние размерности одинаковы, $\Delta_g = g(Q-g) = 6/5$, центральный заряд равен c_L , а промежуточная размерность есть $Q^2/4 + P^2$. Определение этой функции дано в [8]. В приложении к данной работе приведены некоторые свойства и явные соотношения для этого объекта. В предыдущей работе [3] использовались такие обозначения:

$$\mathcal{R}_g = (\gamma(b^2)b^{2-2b^2})^{(Q-4g)/b} \frac{\Upsilon_b^4(b) \Upsilon_b^4(2g)}{\pi^2 \Upsilon_b^4(2g - Q/2)} \quad (3.4)$$

и

$$r_g(P) = \frac{\pi^2 \Upsilon_b(2iP) \Upsilon_b(-2iP) \Upsilon_b^4(2g - Q/2)}{\Upsilon_b^2(b) \Upsilon_b^2(2g - Q/2 - iP) \Upsilon_b^2(2g - Q/2 + iP) \Upsilon_b^2(Q/2 - iP) \Upsilon_b^2(Q/2 + iP)}. \quad (3.5)$$

Функция в последней формуле входит в подынтегральное выражение в (3.2), и, следовательно, важно уметь ее быстро вычислять. Она допускает следующее интегральное представление [3]:

$$r_g(P) = \text{sh}(2\pi b^{-1}P) \text{sh}(2\pi bP) \times \\ \times \exp\left(-8 \int_0^\infty \frac{\sin^2(Pt)(\text{ch}^2(Qt - 2gt) - e^{-Qt} \cos^2(Pt))}{\text{sh}(bt) \text{sh}(b^{-1}t)} \frac{dt}{t}\right). \quad (3.6)$$

Интеграл сходится при $g > Q/4$, в нашем примере при $b^2 > b_0^2$ (где $b_0^2 = (11 - 4\sqrt{6})/5 = 0.2404\dots$, см. ниже). При меньших значениях b^2 применимо несколько более сложное выражение

$$r_g(P) = \frac{\text{sh}(2\pi b^{-1}P) \text{sh}(2\pi bP) \gamma^4(3/2 + b^{-2}/2 - 2gb^{-1})}{\gamma^2(3/2 + b^{-2}/2 - 2gb^{-1} + ib^{-1}P) \gamma^2(3/2 - b^{-2}/2 - 2gb^{-1} - ib^{-1}P)} \times \\ \times \exp\left(-8 \int_0^\infty \frac{\sin^2(Pt)(\text{ch}^2(bt - 2gt) - e^{-Qt} \cos^2(Pt))}{\text{sh}(bt) \text{sh}(b^{-1}t)} \frac{dt}{t}\right). \quad (3.7)$$

Это представление сходится в интервале $0 < b^2 < (23 - 4\sqrt{19})/15 = 0.3710\dots$, дополняющем область сходимости (3.6) в том смысле, что для любого b из физически интересной области $0 < b < 1$ можно пользоваться либо представлением (3.6), либо представлением (3.7), причем при $0.2404\dots < b^2 < 0.3710\dots$ можно пользоваться обоими представлениями.

Интеграл в (3.2) можно понимать буквально, т.е. как интеграл вдоль вещественной оси, только если $b^2 > b_0^2 = 0.2404\dots$. При уменьшении b^2 полюсы подынтегрального выражения при $iP = \pm(Q/2 - 2g)$ смещаются и пересекают контур интегрирования, и вычеты в них следует учитывать отдельно, как “дискретные члены”. Затем при $b^2 = b_1^2 = (4\sqrt{139} - 43)/25 \approx 0.1664\dots$ то же самое происходит с полюсами при $iP = \pm(Q/2 - 2g - b)$, и т.д. В общем случае вычеты в двойных полюсах $iP = \pm(Q/2 - 2g - nb)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, появляются как дискретный член (вычеты дают одинаковые вклады, поэтому нет смысла учитывать их отдельно, достаточно поставить множитель 2) при $b^2 < b_n^2$, где

$$b_n^2 = \frac{4\sqrt{25n^2 + 60n + 54} - 10n - 33}{5(4n^2 + 4n - 3)}. \quad (3.8)$$

В дальнейшем мы будем использовать обозначение

$$P_n = i\left(2g + nb - \frac{Q}{2}\right). \quad (3.9)$$

При наличии дискретных членов выражение (3.2) имеет вид

$$g_L(x, \bar{x}) = \sum_{n=0}^{N_d-1} D_n(x, \bar{x}) + \frac{\mathcal{R}_g}{\Gamma(4gb^{-1} - b^{-2} - 1)} \int r_g(P) \mathcal{F}_P(x) \mathcal{F}_P(\bar{x}) \frac{dP}{4\pi}, \quad (3.10)$$

где N_d есть фактическое число дискретных членов,

$$N_d = \text{Floor}\left[\sqrt{1 + b^{-4} - \frac{14b^{-2}}{5}} - \frac{b^{-2}}{2} + \frac{1}{2}\right], \quad (3.11)$$

а во втором члене подразумевается обычное интегрирование по вещественным P . Дискретные члены являются в каком-то смысле “логарифмическими”,

$$D_n(x, \bar{x}) = \mathcal{N}_n \mathcal{F}_{P_n}(x) \mathcal{F}_{P_n}(\bar{x}) (2 \operatorname{Re} f_{P_n}(x) + U_n), \quad (3.12)$$

где, как и ранее в [4], мы ввели обозначение

$$f_P(x) = i \frac{d}{dP} \ln \mathcal{F}_P(x) \quad (3.13)$$

для логарифмической производной общего конформного блока по P . Логарифмы, стоящие под знаком производной, своим появлением обязаны вырождению, возникающему при одинаковых внешних размерностях, когда простые полюсы сливаются в подынтегральном выражении в (3.2) в двойные. Ясно, что этот эффект не содержит в себе ничего качественно нового, и нет смысла говорить по этому поводу о теории Лиувилля как о “логарифмической КТП”³⁾. В четырехточечной функции с различными внешними размерностями нет, конечно, никаких логарифмов. Константы $\mathcal{N}_n$ и U_n в (3.12) имеют следующий явный вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n &= \frac{\gamma^{(Q-4g)/b} (b^2) \gamma(4gb - b^2 + 2nb^2)}{b^2 \Gamma(2 + b^{-2} - 4gb^{-1})} \times \\ &\times \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(4g - b^{-1} - b + kb)^2}{(4g - b^{-1} + (k+n-1)b)^2} \frac{\gamma^2(4gb + (k+n-1)b^2)}{\gamma^4(2gb + kb^2) \gamma^2(1 + (k+1)b^2)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} U_n &= 2v_b(4g - Q + nb) - 2v_b(4g - Q + 2nb) + 4v_b(2g + nb) - 2v_b(4g + 2nb) - \\ &- 2v_b(b) - 4(n+1)b \ln b - 4bC_E + 2b \sum_{k=1}^n (\psi(-kb^2) + \psi(1 + kb^2)). \end{aligned} \quad (3.15)$$

В последнем выражении мы, как и в работе [4], используем обозначение

$$v_b(x) = \frac{d}{dx} \ln \Upsilon_b(x) \quad (3.16)$$

для логарифмической производной функции Υ_b . Эту специальную функцию можно вычислять с помощью интегрального представления

$$v_b(x) = \int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{sh}(Qt - 2xt)}{\operatorname{sh}(bt) \operatorname{sh}(b^{-1}t)} - \frac{(Q - 2x)}{t} e^{-2t} \right) dt, \quad (3.17)$$

сходящегося в полосе $0 < \operatorname{Re} x < Q$. Вне этой полосы можно использовать любое из соотношений

$$\begin{aligned} v_b(x+b) - v_b(x) &= b(-2 \ln b + \psi(bx) + \psi(1 - bx)), \\ v_b(x+b^{-1}) - v_b(x) &= b^{-1}(2 \ln b + \psi(b^{-1}x) + \psi(1 - b^{-1}x)), \end{aligned} \quad (3.18)$$

чтобы сдвинуть аргумент в полосу сходимости представления (3.17).

³⁾Что бы ни означал этот термин.

4. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ МОДУЛЯРНЫЙ ПАРАМЕТР

Закончив это предварительное обсуждение, обратимся непосредственно к интегралу (2.1). Для случая четырехточечной функции с фиксированной площадью он имеет вид

$$\mathcal{I}_4 = \langle (\varphi e^{2g\phi})^4 \rangle_{\text{LG}}^{(A=\pi)} = 6 \int_{\mathbf{G}} G_{\text{YL}}(x, \bar{x}) g_{\text{L}}(x, \bar{x}) d^2 x. \quad (4.1)$$

Как и в работе [3], мы использовали в уравнении (4.1) симметрию интеграла по отношению к шести преобразованиям модулярной подгруппы группы проективных отображений, генерируемой преобразованиями $x \rightarrow 1/x$ и $x \rightarrow 1 - x$. Эта подгруппа делит комплексную плоскость x на шесть областей: фундаментальную область $\mathbf{G} = \{\text{Re } x < 1/2; |1 - x| < 1\}$ и пять ее образов. Интеграл в (4.1) сводится к интегралу по $\mathbf{G}$, а множитель 6 перед знаком интеграла учитывает вклады эквивалентных областей.

Черезвычайно удобным оказывается ввести “эллиптический” модулярный параметр с помощью стандартного отображения

$$\tau = i \frac{K(1 - x)}{K(x)}, \quad (4.2)$$

где

$$K(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{[t(1 - t)(1 - xt)]^{1/2}} \quad (4.3)$$

представляет собой полный эллиптический интеграл первого рода. Интеграл (4.1) принимает вид

$$\mathcal{I}_4 = 6\pi^2 \int_{\mathbf{F}} |x(1 - x)\theta_3^4(q)|^2 G_{\text{YL}}(q, \bar{q}) g_{\text{L}}(q, \bar{q}) d^2 \tau, \quad (4.4)$$

где $\mathbf{F} = \{|\tau| > 1; |\text{Re } \tau| < 1/2\}$ обозначает теперь стандартную фундаментальную область модулярной группы, а

$$\theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \quad (4.5)$$

есть обычный θ -ряд по степеням

$$q = e^{i\pi\tau}. \quad (4.6)$$

Представление (4.4) обладает двумя важными преимуществами. В работах [9] показано, что четырехточечный конформный блок общего положения допускает удобное рекуррентное представление, которое особенно просто выражается через эллиптический параметр q и так называемый “эллиптический” четырехточечный блок. Кроме того, в то время как два блока (2.5) известны в явном виде, лиувиллиевский блок (3.3) при произвольном P вычисляется только как разложение по степеням x или q . Рекуррентный алгоритм в эллиптическом представлении непосредственно дает ряд по степеням q , который, как отмечается в [9], обладает гораздо лучшей сходимостью, чем ряд по x , в частности, в фундаментальной области эллиптического параметра $\max_{\mathbf{F}} |q|^2 = e^{-\pi\sqrt{3}} = 0.00433\dots$. В то же время в соответствующей

области x возле ее “углов” $\max_{\mathbf{G}} |x|^2 = 1$, и сходимость ряда по x представляется более проблематичной.

Краткое описание эллиптического представления для четырехточечного конформного блока приведено в приложении. Там также показано, что произведения блоков модели Янга–Ли и теории Лиувилля имеют в эллиптическом представлении вид (обозначение $\lambda_{m,n}$ объяснено в (П.2))

$$x(1-x)\theta_3^4(q)\mathcal{F}_\alpha(x)\mathcal{F}_P(x) = (16q)^{\Delta_\alpha + P^2 + \lambda_{1,-1}^2} H_\alpha(q)H_P(q)H_{\text{sp}}(q). \quad (4.7)$$

Здесь и в дальнейшем индекс $\alpha = I, \varphi$ указывает на промежуточное представление в блоке модели Янга–Ли, в частности $\Delta_I = 0$ и $\Delta_\varphi = -1/5$. Ряды по q для соответствующих эллиптических блоков $H_\alpha(q)$ могут быть вычислены либо с помощью явных выражений (2.5),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I(x) &= (16q)^{9/40} [x(1-x)]^{7/40} \theta_3^{1/2}(q) H_I(q), \\ \mathcal{F}_\varphi(x) &= (16q)^{1/40} [x(1-x)]^{7/40} \theta_3^{1/2}(q) H_\varphi(q), \end{aligned} \quad (4.8)$$

либо через рекурсивные соотношения (П.8). В обоих случаях мы получаем

$$\begin{aligned} H_I(q) &= 1 - \frac{21}{22}q^2 - \frac{51}{88}q^4 + \frac{1989}{5456}q^6 - \frac{111489}{1789568}q^8 + \frac{1612779}{3579136}q^{10} - \dots, \\ H_\varphi(q) &= 1 - \frac{5}{6}q^2 - \frac{91}{152}q^4 + \frac{1967}{8816}q^6 - \frac{8211}{70528}q^8 + \frac{405647}{987392}q^{10} - \dots. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Множитель “дефицита центрального заряда”

$$H_{\text{sp}}(q) = (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \dots)^{-c_{\text{sp}}/2} \quad (4.10)$$

вычислен в приложении. И наконец, разложение по q эллиптического блока теории Лиувилля легко воспроизвести на основании рекуррентного соотношения (П.8). Хотя вычисления проводятся непосредственно, в высших порядках результат имеет довольно громоздкий вид, и здесь мы приводим явную формулу только до $O(q^2)$:

$$H_P(q) = 1 + \frac{(16p^2 - b^2)^2 q^2}{4(1 - b^{-4})(P^2 + \lambda_{1,2}^2)} + \frac{(16p^2 - b^{-2})^2 q^2}{4(1 - b^4)(P^2 + \lambda_{2,1}^2)} + O(q^4), \quad (4.11)$$

где $p = Q/2 - g$. Для численных расчетов мы использовали разложение $H_P(q)$ вплоть до порядка q^8 . В рассматриваемом симметричном случае (внешние размерности равны между собой) все эллиптические блоки являются рядами по q^2 .

5. МОДУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ

В корреляционной функции Лиувилля можно выделить интегральную часть и (в некоторых случаях) определенное число дискретных членов (3.10). Следовательно,

$$\mathcal{I}_4 = \sum_{n=0}^{N_d-1} \mathcal{I}_{\text{disc},n} + \mathcal{I}_{\text{int}}. \quad (5.1)$$

Для численного интегрирования удобно дополнительно разделить каждый член на две части, соответствующие двум различным блокам материи в (2.4):

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\text{int}} &= J_{\text{int}}^{(I)} - \kappa^2 J_{\text{int}}^{(\varphi)}, \\ \mathcal{I}_{\text{disc},n} &= J_{\text{disc},n}^{(I)} - \kappa^2 J_{\text{disc},n}^{(\varphi)}.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Рассмотрим вначале интегральную часть

$$J_{\text{int}}^{(\alpha)} = \frac{3\pi R_g}{\Gamma(4gb^{-1} - Qb^{-1})} \int_0^\infty r_g(P) dP \int_{\mathbf{F}} |(16q)^{P^2+Q^2/4-1+\Delta_\alpha} H_P^{(\alpha)}(q)|^2 d^2\tau. \quad (5.3)$$

Произведение эллиптических блоков

$$H_P^{(\alpha)}(q) = H_\alpha(q) H_{\text{sp}}(q) H_P(q) \quad (5.4)$$

разлагается в степенной ряд по q ,

$$H_\alpha(q) H_{\text{sp}}(q) H_P(q) = \sum_{r=0}^\infty H_r^{(\alpha)}(P) q^r, \quad (5.5)$$

и подынтегральное выражение в интеграле по $d^2\tau$ в формуле (5.3) представляет собой двойной степенной ряд по q и $\bar{q}$. В каждом слагаемом интегрирование по $\tau_2 = \text{Im } \tau$ выполняется явно. Результат выражается через следующую функцию:

$$\Phi(A, r, l) = \int_{\mathbf{F}} |16q|^{2A} q^r \bar{q}^l d^2\tau = \frac{(16)^{2A}}{\pi(2A + r + l)} \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi(r-l)x) e^{-\pi\sqrt{1-x^2}(2A+r+l)} dx. \quad (5.6)$$

Отметим здесь, что если интеграл расходится при $\tau_2 \rightarrow \infty$, то использование этой явной интегральной формулы автоматически производит его регуляризацию (в смысле аналитического продолжения). Мы приходим к следующему ряду:

$$J_{\text{int}}^{(\alpha)} = \frac{3\pi R_g}{\Gamma(4gb^{-1} - Qb^{-1})} \sum_{L=0}^\infty A_{\text{int},L}^{(\alpha)}, \quad (5.7)$$

где в последней сумме

$$A_L^{(\alpha)} = \int_0^\infty r_g(P) dP \sum_{k=0}^L H_k^{(\alpha)}(P) H_{L-k}^{(\alpha)}(P) \Phi\left(P^2 + \frac{Q^2}{4} + \Delta_\alpha - 1, k, L - k\right). \quad (5.8)$$

В нашем симметричном случае вклад в сумму вносят только четные значения L . Каждый член в (5.8) подавлен множителем $\max_{\mathbf{F}} |q|^{2L}$, и ряд по L сходится очень быстро. В вычислениях для достижения точности в восемь-девять знаков оказалось достаточным суммировать в (5.7) $L = 6$ слагаемых (см. табл. 1).

Если имеются дискретные члены, их можно вычислить аналогичным образом. Вновь удобно выделить “логарифмическую” часть в каждом из интегралов $J_{\text{disc},n}^{(\alpha)}$:

$$J_{\text{disc},n}^{(\alpha)} = 6\pi^2 \mathcal{N}_n(L_n^{(\alpha)} + K_n^{(\alpha)}), \quad (5.9)$$

где (P_n определено в (3.9))

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)} &= 4\pi \left(\frac{Q}{2} - 2g - nb \right) \int_{\mathbf{F}} |(16q)^{P_n^2 + \Delta_\alpha + Q^2/4 - 1} H_{P_n}^{(\alpha)}(q)|^2 \operatorname{Im} \tau d^2\tau, \\ K_n^{(\alpha)} &= \int_{\mathbf{F}} |(16q)^{P_n^2 + \Delta_\alpha + Q^2/4 - 1} H_{P_n}^{(\alpha)}(q)|^2 \left(-i \frac{d}{dP} \ln H_P \overline{H}_P \Big|_{P=P_n} + S_n \right) d^2\tau \end{aligned} \quad (5.10)$$

(только лиувиллиевские эллиптические блоки $H_P(q)$ зависят от P и, следовательно, появляются в логарифмической производной), а

$$S_n = U_n - 4 \left(\frac{Q}{2} - 2g - nb \right) \ln 16. \quad (5.11)$$

Как и при вычислении интегральной части, разложение в двойной ряд по q и $\bar{q}$ приводит к рядам по “уровням”

$$L_n^{(\alpha)} = \sum_{L=0}^{\infty} B_{n,L}^{(\alpha)}, \quad M_n^{(\alpha)} = \sum_{L=0}^{\infty} C_{n,L}^{(\alpha)}. \quad (5.12)$$

Интегралы вычисляются точно также, как и в (5.7):

$$\begin{aligned} B_{n,L}^{(\alpha)} &= 4\pi \left(\frac{Q}{2} - 2g - nb \right) \sum_{k=0}^L H_k^{(\alpha)}(P_n) H_{L-k}^{(\alpha)}(P_n) \Phi' \left(P_n^2 + \frac{Q^2}{4} + \Delta_\alpha - 1, k, L - k \right), \\ C_{n,L}^{(\alpha)} &= \sum_{k=0}^L (S_n H_{L-k}^{(\alpha)}(P_n) - 2H_{L-k}'^{(\alpha)}(P_n)) H_k^{(\alpha)}(P_n) \Phi \left(P_n^2 + \frac{Q^2}{4} + \Delta_\alpha - 1, k, L - k \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где

$$H_k'^{(\alpha)}(P) = i \frac{d}{dP} H_k^{(\alpha)}(P). \quad (5.14)$$

Еще одна функция

$$\begin{aligned} \Phi'(A, r, l) &= \int |16q|^{2A} q^r \bar{q}^l \operatorname{Im} \tau d^2\tau = \frac{(16)^{2A}}{(2A + r + l)^2 \pi^2} \times \\ &\times \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi(r-l)x) e^{-\pi\sqrt{1-x^2}(2A+r+l)} (1 + \pi(2A+r+l)\sqrt{1-x^2}) dx \end{aligned} \quad (5.15)$$

введена для вычисления логарифмических частей. Разложение по “уровням” и в этом случае сходится очень быстро (см. следующий раздел).

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В табл. 1 представлены численные значения четвертого коэффициента ряда теории возмущений

$$z_4 = \frac{\mathcal{I}_4}{24(2\pi)^4 Z_L^{(A)}} \quad (6.1)$$

при различных значениях параметра b^2 , а также второй и третий коэффициенты (1.23), которые уже приводились в [3]. В четвертой колонке помещены предварительные оценки $z_4^{(\text{est})}$ коэффициента z_4 на основе известных z_2 , z_3 и аналитических свойств $z(h)$ (эта экстраполяция объясняется в [3]). Кроме того, в двух частных точно решаемых случаях $b^2 = 0.4$ и $b^2 = 0.3$ приведены значения, взятые из точных решений (некоторые детали можно найти в разделе 8).

Таблица 1. Численные значения второго, третьего и четвертого коэффициентов теории возмущений для функции скейлинга $z(h)$ с фиксированной площадью. В четвертой колонке помещены оценки четвертого коэффициента на основе правил сумм, описанных в [3]. Для сравнения указаны также точные значения в тех случаях, когда они известны.

b^2	$z_2 \times 10^2$	$z_3 \times 10^3$	$z_4 \times 10^4$	$z_4^{(\text{est})} \times 10^4$	$z_4^{(\text{exact})} \times 10^4$
0.00	−8.92857	22.9899	−31.891804	−31.8938	
0.01	−8.83599	22.5977	−31.114313	−31.1164	
0.05	−8.43801	20.9364	−27.881220	−27.8839	
0.10	−7.86500	18.6240	−23.557311	−23.5604	
0.15	−7.18331	16.0092	−18.942809	−18.9461	
0.20	−6.35922	13.0616	−14.131054	−14.1345	
0.25	−5.34942	9.78831	−9.3340267	−9.33745	
0.30	−4.09998	6.28732	−4.94949021	−4.95242	−4.94949020548
0.35	−2.55378	2.87061	−1.61778168	−1.61953	
0.40	−0.71440	0.35675	−0.085061507	−0.085303	−0.08506150735

При $b^2 < b_0^2$ четвертый коэффициент содержит как интегральный вклад, так и вклады дискретных членов в формуле (3.10):

$$z_4 = \sum_{n=0}^{N_d} z_4^{(d)}(n) + z_4^{(\text{int})}. \quad (6.2)$$

В табл. 2 отражены результаты численных расчетов, демонстрирующие структуру четырехточечного коэффициента как суммы интегральной части и дискретных членов. При малых b^2 интегральная часть становится пренебрежимо малой, а дискретных членов появляется все больше и больше. В свою очередь при достаточно малых b^2 только несколько первых дискретных членов дают заметный вклад. Например, при $b^2 = 0.01$ имеется 49 дискретных членов, а при $b^2 = 0$ (см. следующий раздел) их число становится бесконечным. В таблице приведены данные только для тех членов, вклад которых имеет значение при выбранной нами точности вычислений (около девяти десятичных знаков).

В конечном итоге мы использовали численные результаты для z_4 в численно-аналитической процедуре, описанной в статье [3]. Это приводит к уточнению полученных ранее оценок для функции скейлинга $z(h)$. В частности, улучшены численные приближения для параметра $f_0(b^2)$ (см. определение в (1.19) или в работе [3])

Таблица 2. Вклады интегральной части и дискретных членов в сумму (6.2) при различных значениях b^2 .

b^2	0.00	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20
$z_4^{(\text{int})} \times 10^4$	0.00	8.6×10^{-26}	0.006087	1.7311	2.318	0.799
$z_4^{(\text{d})}(0) \times 10^4$	-11.4450	-10.5160	-6.88429	-4.187	-6.397	-14.93
$z_4^{(\text{d})}(1) \times 10^4$	-15.7357	-15.5090	-13.9653	-11.51	-14.864	
$z_4^{(\text{d})}(2) \times 10^4$	-3.94363	-4.16729	-4.97850	-5.770		
$z_4^{(\text{d})}(3) \times 10^4$	-0.662455	-0.77641	-1.43314	-3.829		
$z_4^{(\text{d})}(4) \times 10^4$	-0.092114	-0.12415	-0.41407			
$z_4^{(\text{d})}(5) \times 10^4$	-0.011464	-0.01846	-0.13010			
$z_4^{(\text{d})}(6) \times 10^4$	-0.001324	-0.00265	-0.04666			
$z_4^{(\text{d})}(7) \times 10^4$	-1.44668×10^{-4}	-3.76×10^{-4}	-0.02083			
$z_4^{(\text{d})}(8) \times 10^4$	-1.51392×10^{-5}	-5.34×10^{-5}	-0.01443			
$z_4^{(\text{d})}(9) \times 10^4$	-1.52956×10^{-6}	-7.65×10^{-6}				
$z_4^{(\text{d})}(10) \times 10^4$	-1.50085×10^{-7}	-1.11×10^{-6}				
$z_4^{(\text{d})}(11) \times 10^4$	-1.43677×10^{-8}	-1.66×10^{-7}				
$z_4^{(\text{d})}(12) \times 10^4$	-1.34666×10^{-9}	-2.53×10^{-8}				

удельной энергии вакуума. Новые значения $f_0^{(4)}$, полученные с учетом коэффициентов разложения по теории возмущений вплоть до z_4 , представлены в табл. 3, где их можно сравнить с прежними оценками, а также с точными значениями $f_0^{(\text{exact})}$ в тех случаях, когда таковые имеются.

7. КЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

В работе [2] рассмотрен классический предел четырехточечной корреляционной функции Лиувилля. В частности, установлено, что “симметричная” четырехточечная функция, т.е. функция с четырьмя одинаковыми размерностями σ , допускает следующее интегральное представление:

$$g_{\text{cl}}(x, \bar{x}) = \pi^3 \int_{\uparrow} \frac{\Gamma^2(2\sigma + s - 1)\Gamma^2(2\sigma - s)\Gamma^4(s)}{\Gamma^4(2\sigma)\Gamma^2(2s)} \mathcal{F}^{(\text{cl})}(\sigma, s, y) \mathcal{F}^{(\text{cl})}(\sigma, s, \bar{y}) \frac{(2s - 1) ds}{2\pi i}. \quad (7.1)$$

Классический блок $\mathcal{F}^{(\text{cl})}(\sigma, s, y)$ в этой формуле выражается явно через гипергеометрические функции,

$$\mathcal{F}^{(\text{cl})}(\sigma, s, y) = y^{s-2\sigma} {}_2F_1(s, s, 2s, y), \quad (7.2)$$

а контур интегрирования $\uparrow$ идет снизу вверх параллельно мнимой оси левее полюсов множителя $\Gamma^2(2\sigma - s)$ и правее всех остальных особенностей подынтегрального выражения. Покажем, что это выражение согласуется с классическим пределом четырехточечной функции с фиксированной площадью (3.2), если отождествить Δ_g

Таблица 3. Параметры удельной энергии f_0 , полученные при учете двух, трех и четырех первых коэффициентов теории возмущений. В точнорешаемых случаях для сравнения приведены точные численные значения.

b^2	ρ	δ	$f_0^{(2)}$	$f_0^{(3)}$	$f_0^{(4)}$	$f_0^{(\text{exact})}$
0.00	0.833333	0.111111	0.220407	0.218156	0.218036	0.2179745
0.01	0.831646	0.109935	0.220318	0.218091	0.217959	
0.05	0.824462	0.106179	0.219719	0.217523	0.217353	
0.10	0.814333	0.103698	0.218260	0.215950	0.215742	
0.15	0.802587	0.103880	0.215654	0.213053	0.212805	
0.20	0.788675	0.107063	0.211308	0.208218	0.207920	
0.25	0.771700	0.113797	0.204224	0.200408	0.200042	
0.30	0.75	0.125	0.192522	0.187677	0.187218	0.1870437
0.35	0.719788	0.142247	0.171896	0.165563	0.164980	
0.40	0.666667	0.166667	0.125625	0.116905	0.116151	0.1158596

с σ , а (7.1) – с нормированной корреляционной функцией:

$$\lim_{b^2 \rightarrow 0} \frac{g_L(x, \bar{x})}{Z_L^{(A)}} = g_{\text{cl}}(x, \bar{x}). \quad (7.3)$$

Для этого вычислим интеграл в (7.1) через вычеты в бесконечной последовательности “правых” полюсов в точках $s = s_n$, где

$$s_n = 2\sigma + n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.4)$$

Такое вычисление правомерно, и в этом можно убедиться, оценивая асимптотику подынтегрального выражения при больших s . Получаем

$$g_{\text{cl}}(x, \bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(\text{cl})}(x, \bar{x}), \quad (7.5)$$

где

$$D_n^{(\text{cl})}(x, \bar{x}) = N_n^{(\text{cl})} |\mathcal{F}^{(\text{cl})}(\sigma, s_n, x)|^2 \left(2 \operatorname{Re} \frac{d}{ds} \ln \mathcal{F}^{(\text{cl})}(\sigma, s, x) \Big|_{s=s_n} + U_n^{(\text{cl})} \right). \quad (7.6)$$

Здесь введены обозначения

$$N_n^{(\text{cl})} = \frac{\pi^3}{(4\sigma + 2n - 1)(n!)^2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2\sigma + k)^4}{(4\sigma + n + k - 1)^2}, \quad (7.7)$$

$$U_n^{(\text{cl})} = 4\psi(4\sigma + 2n) - 2\psi(4\sigma + n - 1) - 4\psi(2\sigma + n) + 2\psi(1 + n) - \frac{2}{4\sigma + 2n - 1}. \quad (7.8)$$

Сравнивая выражения (7.7) и (7.8) с формулами (3.14) и (3.15), соответственно, мы можем легко убедиться, что

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}_n}{b Z_L} = N_n^{(\text{cl})}, \quad \lim_{b \rightarrow 0} b U_n = U_n^{(\text{cl})}. \quad (7.9)$$

Кроме того, хорошо известно (см., например, [9]), что

$$\lim_{b^2 \rightarrow 0} \mathcal{F}_P \left(\begin{matrix} \sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma \end{matrix} \middle| x \right) = \mathcal{F}^{(\text{cl})}(\sigma, s, x) \quad (7.10)$$

при условии, что σ и $s = P^2 + Q^{2/4}$ остаются в этом пределе конечными. Таким образом, классический предел нормированного дискретного члена (3.12) совпадает с (7.6):

$$\lim_{b^2 \rightarrow 0} \frac{D_n(x, \bar{x})}{Z_L^{(A)}} = D_n^{(\text{cl})}(x, \bar{x}). \quad (7.11)$$

В классическом пределе в (3.10) интегральная часть обращается в нуль, и интеграл состоит только из бесконечного ряда дискретных членов. Это завершает доказательство соотношения (7.3).

Классический блок можно привести к виду (ср. с формулой (П.16) из приложения)

$$F_\alpha \mathcal{F}^{(\text{cl})}(\sigma, s, x) = \frac{(16q)^{\Delta_\alpha + s - 1} H_\alpha(q) H^{(\text{cl})}(q)}{x(1-x)\theta_3^4}. \quad (7.12)$$

В общей формуле (П.16) только произведение $H^{(\text{cl})}(q) = H_{\text{sp}} H_L$ допускает переход к классическому пределу. Эллиптический вариант классического блока выглядит так:

$$H^{(\text{cl})}(q) = \eta^{\text{cm}/2 - 25/2}(q^2) \theta_0^{16\sigma}(q^2) h_s(q). \quad (7.13)$$

В этом выражении

$$\begin{aligned} h_s(q) &= \left(\frac{x}{16q} \right)^s {}_2F_1(s, s, 2s, x) = \\ &= 1 - \frac{4s(2s-3)}{2s+1} q^2 + \frac{2s(8s^2-14s+9)}{2s+3} q^4 + \dots, \end{aligned} \quad (7.14)$$

в то время как

$$\eta(q^2) = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \dots \quad (7.15)$$

есть не что иное, как обычное произведение Дедекинда (П.18), а

$$\theta_0(q^2) = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{2n^2} \quad (7.16)$$

– стандартный тета-ряд. Кроме того, не составляет большого труда убедиться в том, что $H^{(\text{cl})}(q)$ есть предел $H_{\text{sp}} H_P$ при $b^2 \rightarrow 0$ и $P^2 \rightarrow s - Q^2/4$.

В интересующем нас случае ГМЯЛ эллиптический классический блок может быть получен с помощью формулы

$$H^{(\text{cl})}(q) = \eta^{-147/10}(q^2) \theta_0^{96/5}(q^2) h_s(q), \quad (7.17)$$

а эллиптический блок материи H_α остается тем же самым, что и в (4.9). Как обычно, мы собираемся использовать q -разложения. Положим

$$\begin{aligned} H_\alpha(q)H^{(\text{cl})}(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{(\alpha)} q^k, \\ H_\alpha(q) \frac{d}{ds} H^{(\text{cl})}(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k'^{(\alpha)} q^k. \end{aligned} \quad (7.18)$$

В классическом пределе интеграл (4.1) сводится к бесконечной сумме дискретных членов:

$$\mathcal{I}_4^{(\text{cl})} = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^{(\text{cl})}, \quad (7.19)$$

где

$$I_n^{(\text{cl})} = 6 \int_{\mathbf{G}} D_n^{(\text{cl})}(x, \bar{x}) G_{\text{YL}}(x, \bar{x}) d^2 x = j_n^{(I)} - \kappa^2 j_n^{(\varphi)}. \quad (7.20)$$

Выделим теперь, как и в общем случае, “логарифмический” интеграл

$$j_n^{(\alpha)} = 6\pi^2 N_n^{(\text{cl})} (L_n^{(\alpha)} + M_n^{(\alpha)} + K_n^{(\alpha)}), \quad (7.21)$$

где

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)} &= 2\pi \int_{\mathbf{F}} |(16q)^{\Delta_\alpha + 2\sigma + n - 1} h_\alpha(q)|^2 \text{Im } \tau d^2 \tau, \\ M_n^{(\alpha)} &= \int_{\mathbf{F}} |(16q)^{\Delta_\alpha + 2\sigma + n - 1} h_\alpha(q)|^2 (U_n^{(\text{cl})} - 2 \ln 16) d^2 \tau, \\ K_n^{(\alpha)} &= - \int_{\mathbf{F}} |(16q)^{\Delta_\alpha + 2\sigma + n - 1}|^2 \frac{d}{ds} (h_\alpha(q) h_\alpha(\bar{q})) d^2 \tau. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Вновь каждый член с помощью двойного разложения по q и $\bar{q}$ преобразуется в сумму по “уровням” L :

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)} &= 2\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{k=0}^L h_k^{(\alpha)}(s_n) h_{L-k}^{(\alpha)}(s_n) \Phi'(\Delta_\alpha + s_n - 1, k, L - k), \\ M_n^{(\alpha)} &= (U_n^{(\text{cl})} - 2 \ln 16) \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{k=0}^L h_k^{(\alpha)}(s_n) h_{L-k}^{(\alpha)}(s_n) \Phi(\Delta_\alpha + s_n - 1, k, L - k), \\ K_n^{(\alpha)} &= -2 \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{k=0}^L h_k^{(\alpha)}(s_n) h_{L-k}'^{(\alpha)}(s_n) \Phi(\Delta_\alpha + s_n - 1, k, L - k). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Каждое слагаемое непосредственно вычисляется с помощью интегралов (5.6) и (5.15). На практике оказалось достаточным (при заданной точности в девять десятичных знаков) в равенствах (7.23) суммировать до $L = 10$.

В результате таких вычислений мы получаем n -й дискретный член в четвертом коэффициенте теории возмущений:

$$z_4^{(\text{cl})}(n) = \frac{I_n^{(\text{cl})}}{24(2\pi)^4}. \quad (7.24)$$

Несколько первых членов приведены в табл. 2 для того, чтобы проиллюстрировать сходимость ряда. Сумма сходится к следующему числу:

$$z_4^{(\text{cl})} = \sum_{n=0}^{\infty} z_4^{(\text{cl})}(n) = -31.8918039 \times 10^{-4}, \quad (7.25)$$

которое уже было ранее получено в [2] с помощью другого численного метода. Отметим, что на практике нам пришлось учесть десять дискретных членов, чтобы достичь заданной точности до девятого десятичного знака.

8. ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ ТОЧКИ $b^2 = 0.3$ И $b^2 = 0.4$

В этом разделе приведены сведения о двух специальных точках $b^2 = 0.4$ и $b^2 = 0.3$ в семействе ГМЯЛ, в которых скейлинговая функция сферы, по-видимому, может быть найдена точно. Решение для “чистой модели Янга–Ли” в точке $b^2 = 0.4$, которое выводится из матричной модели, уже обсуждалось в работе [3]. Здесь мы вкратце напомним основные факты. Этот случай “минимальной гравитации” соответствует потоку из трикритической точки в критическую точку одноматричной модели [10]. Функция скейлинга $Z_{\text{YL}}(x, t)$, которую можно интерпретировать (с точностью до общего множителя и выбора единиц измерения) как сферическую статсумму непрерывной гравитации, имеет следующее явное выражение:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_{\text{YL}}(x, t) = u(x, t), \quad (8.1)$$

где $u(x, t)$ – решение простого алгебраического уравнения

$$x = u^3 - tu. \quad (8.2)$$

Параметры t и x представляют собой (вновь с точностью до нормировочных констант) соответственно космологическую постоянную и константу связи возмущения оператором φ . Сравнивая разложение в ряд, полученное с помощью (8.1) и (8.2),

$$Z_{\text{YL}}(x, t) = Z_{\text{YL}}(0, t) \left(1 - \frac{105}{16} \left(\frac{x}{t^{3/2}} \right) + \frac{105}{8} \left(\frac{x}{t^{3/2}} \right)^2 - \frac{35}{16} \left(\frac{x}{t^{3/2}} \right)^3 + \dots \right), \quad (8.3)$$

с разложением, возникающим в теории возмущений в теоретико-полевоом подходе, нетрудно найти соотношение

$$\frac{x}{t^{3/2}} = \frac{\lambda l_{\text{YL}}}{(\pi\mu)^{3/2}}, \quad (8.4)$$

где

$$l_{\text{YL}} = \frac{\gamma^{1/2}(4/5)}{4\gamma(2/5)} = 0.0845223 \dots \quad (8.5)$$

Таким образом, функция скейлинга (1.12) с фиксированной площадью при $b^2 = 0.4$ имеет вид

$$z(h) = -2\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(l_{\text{YL}} h)^n}{n! \Gamma(n/2 - 1/2)}. \quad (8.6)$$

В частности,

$$\begin{aligned} z_2 &= -l_{\text{YL}}^2 = -0.00714401, \\ z_3 &= \frac{\sqrt{\pi}}{3} l_{\text{YL}}^3 = 0.000356752, \\ z_4 &= -\frac{1}{6} l_{\text{YL}}^4 = -8.50615 \dots \times 10^{-6}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (8.7)$$

Значение z^4 , а также

$$f_0(0.4) = \frac{3}{\pi} \left(\frac{l_{\text{YL}}}{2} \right)^{2/3} = 0.11585962159187 \quad (8.8)$$

приведены соответственно в табл. 1, 3 в качестве точных значений в точке $b^2 = 0.4$.

В работе [3] приводятся аргументы в пользу того, что при $b^2 = 0.3$ рассматриваемая здесь ГМЯЛ тоже является частным случаем минимальной гравитации. Она возникает при некотором специальном возмущении минимальной модели $\mathcal{M}_{3/10}$, взаимодействующей с лиувиллиевской гравитацией. Поэтому имеются серьезные причины ожидать, что в этой точке модель тоже является точно решаемой. К сожалению, в настоящий момент точного решения подходящей матричной модели нет. Естественнo, однако, предполагать наличие замкнутого аналитического выражения, например, для функции скейлинга (1.12). Здесь мы предлагаем следующее явное выражение, навеянное более общими структурами, обнаруженными в работе [11] (см. также [7]):

$$z_{3/10}(h) = \Gamma(-1/3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(l_{\text{eg}} h)^n}{n! \Gamma(n/3 - 1/3)}, \quad (8.9)$$

где масштабный фактор l_{eg} легко найти, если сравнить ряд с разложением по теории возмущений из раздела 1:

$$l_{\text{eg}} = \frac{\gamma(1/3)}{2^{1/2} 3 \gamma^{5/6} (3/10)} = 0.23254 \dots \quad (8.10)$$

Это явное выражение дает следующие числовые значения для первых коэффициентов теории возмущений:

$$\begin{aligned} z_2 &= -0.0409998231725, & z_3 &= 0.00628731873887, \\ z_4 &= -0.000494949020548, & z_5 &= 0.0000257778956523. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Эти числа после их сравнения с соответствующей строкой в табл. 1 представляются нам убедительным аргументом в пользу предложенного здесь точного выражения. Рассматривая асимптотику (8.9) можно, кроме того, показать, что при $b^2 = 0.3$

$$f_0 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{l_{\text{eg}}}{3} \right)^{3/4} = 0.187044 \dots \quad (8.12)$$

Это число тоже приводится в табл. 2 как соответствующее “точное” значение.

Рис. 1. Контур интегрирования в формуле (8.17). Заштрихованы сектора, в которых подынтегральное выражение убывает при больших $|u|$.

Полезно также обратить внимание на то, что предложенная точная функция скейлинга (8.9) получается из вполне “матричного” алгебраического уравнения

$$u^4 - xu = -t \quad (8.13)$$

для третьей производной

$$u = \frac{\partial^3}{\partial t^3} Z_{3/10}(x, t) \quad (8.14)$$

“большой” статистической суммы

$$\begin{aligned} Z_{3/10}(x, t) = & -\frac{x^{13/3}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(4n/3 - 13/3)(tx^{-4/3})^n}{n! \Gamma(n/3 - 1/3)} = -\frac{x^{13/3}}{3} \left(\frac{81}{3640} - \frac{tx^{-4/3}}{24} + \right. \\ & \left. + \frac{9(tx^{-4/3})^2}{20} - \frac{(tx^{-4/3})^3}{2} + \frac{(tx^{-4/3})^4}{24} + \frac{(tx^{-4/3})^5}{90} + O(t^6) \right). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Здесь космологическая постоянная x связана с μ соотношением

$$\frac{\lambda_{\text{eg}}}{(\pi\mu)^{4/3}} = \frac{t}{x^{4/3}}. \quad (8.16)$$

В заключение упомянем удобное интегральное представление скейлинговой функции (8.9):

$$z_{3/10}(h) = 3 \int_C \exp(u^3 + h l_{\text{eg}} u^{-1}) u^3 du, \quad (8.17)$$

где контур интегрирования C показан на рис. 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Эллиптический четырехточечный блок

В этом приложении дана краткая сводка результатов работ [9]. Рассмотрим КТП с центральным зарядом c . В дальнейшем окажется удобным ввести “лиувиллиевскую” параметризацию через переменную b :

$$\frac{c-1}{6} = (b^{-1} + b)^2. \quad (\text{П.1})$$

Такая параметризация не приводит к ограничениям на величину c , если при необходимости допускать комплексные значения переменной b . Удобно также использовать следующее обозначение:

$$\lambda_{m,n} = \frac{mb^{-1} + nb}{2}. \quad (\text{П.2})$$

Пусть Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, и Δ есть соответственно внешние и промежуточная размерности в четырехточечном блоке [8]:

$$\mathcal{F}_\Delta \left(\begin{array}{cc} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{array} \middle| x \right) = \begin{array}{c} x_1 (= x) \swarrow \Delta_1 \quad \Delta \quad x_3 (= 1) \searrow \Delta_3 \\ \Delta_2 \swarrow \quad \Delta \quad \searrow \Delta_4 \\ x_2 (= 0) \quad x_4 (= \infty) \end{array} \quad (\text{П.3})$$

Согласно [9] этот блок можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\Delta \left(\begin{array}{cc} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{array} \middle| x \right) &= (16q)^{\Delta - (c-1)/24} x^{(c-1)/24 - \Delta_1 - \Delta_2} \times \\ &\times (1-x)^{(c-1)/24 - \Delta_1 - \Delta_3} \theta_3^{(c-1)/2 - 4 \sum_{i=1}^4 \Delta_i} (q) H_\Delta(q), \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

где соотношение между q и x дается уравнениями (4.2), (4.6), а $\theta_3(q)$ определено в (4.5). В дальнейшем в функции

$$H_\Delta(q) = H_\Delta \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{array} \middle| q \right) \quad (\text{П.5})$$

не указывается явно зависимость от внешних размерностей, которые удобно параметризовать через переменные λ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, следующим образом:

$$\Delta_i = \frac{c-1}{24} + \lambda_i^2. \quad (\text{П.6})$$

Функция H_Δ (эллиптический конформный блок) является степенным рядом по q ,

$$H_\Delta \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{array} \middle| q \right) = \sum_{L=0}^{\infty} H_L \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{array} \middle| \Delta \right) q^L, \quad (\text{П.7})$$

который, по видимому, сходится при всех $|q| < 1$. Эффективным способом его вычисления является рекуррентное соотношение [9]

$$H_\Delta \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{array} \middle| q \right) = 1 + \sum_{(m,n)} \frac{q^{mn}}{\Delta - \Delta_{m,n}} R_{m,n} \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{array} \right) H_{\Delta_{m,n} + mn} \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{array} \middle| q \right). \quad (\text{П.8})$$

Здесь суммирование идет по всем парам положительных целых чисел (m, n) , а

$$\Delta_{m,n} = \lambda_{1,1}^2 - \lambda_{m,n}^2 \quad (\text{П.9})$$

есть не что иное, как размерности вырожденных представлений алгебры Вирасоро с центральным зарядом c . Множители $R_{m,n}$ в (П.8) имеют такой явный вид:

$$R_{m,n}(\lambda_i) = \frac{\prod_{r,s} (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_{r,s})(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_{r,s})(\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_{r,s})(\lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_{r,s})}{\prod'_{k,l} \lambda_{k,l}}. \quad (\text{П.10})$$

Произведения в последнем равенстве вычисляются по следующим наборам пар целых чисел (r, s) и (k, l) :

$$\begin{aligned} r &= -m + 1, -m + 3, \dots, m - 3, m - 1, \\ s &= -n + 1, -n + 3, \dots, n - 3, n - 1 \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

и

$$\begin{aligned} k &= -m + 1, -m + 2, \dots, m - 1, m, \\ l &= -n + 1, -n + 2, \dots, n - 1, n, \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

а штрих в последнем произведении $\prod'_{k,l}$ означает, что пары $(k, l) = (0, 0)$ и $(k, l) = (m, n)$ в произведении пропущены.

Соотношение (П.8) приводит, в частности, к рекуррентному алгоритму для вычисления коэффициентов в разложении по “уровням” (П.7):

$$\begin{aligned} H_0(\Delta) &= 1, \\ H_L(\Delta) &= \sum_{mn < L} \frac{R_{m,n}}{\Delta - \Delta_{m,n}} H_{L-mn}(\Delta_{m,n} + mn) \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

(мы вновь опустили зависимость от λ_i).

Теперь, имея в виду приложения к квантовой гравитации, мы хотим скомбинировать два блока из разных конформных теорий: условно говоря, теории “материи” и теории “Лиувилля” с центральными зарядами c_M и c_L , соответственно. Мы не требуем в качестве обязательного условия “дополнительности” этих величин, вводя “спектаторный” центральный заряд

$$c_{sp} = 26 - c_M - c_L \quad (\text{П.14})$$

для описания дефицита. Однако мы предполагаем дополнительную внешних размерностей в блоках “материи” и “Лиувилля” Δ_i и $\tilde{\Delta}_i$:

$$\Delta_i + \tilde{\Delta}_i = 1 \quad (\text{П.15})$$

для $i = 1, 2, 3, 4$. Блоки “материи” и “Лиувилля” дают такую комбинацию:

$$\mathcal{F}_{\Delta}^{(M)} \left(\begin{matrix} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{matrix} \middle| x \right) \mathcal{F}_{\tilde{\Delta}}^{(L)} \left(\begin{matrix} \tilde{\Delta}_1 & \tilde{\Delta}_3 \\ \tilde{\Delta}_2 & \tilde{\Delta}_4 \end{matrix} \middle| x \right) = (16q)^{\Delta + \tilde{\Delta} - 1} \frac{H_{\Delta}^{(M)}(q) H_{\tilde{\Delta}}^{(L)}(q) H_{sp}(q)}{x(1-x)\theta_3^4(q)}, \quad (\text{П.16})$$

где мы использовали условное обозначение

$$H_{\text{sp}}(q) = \eta^{-c_{\text{sp}}/2}(q^2) \quad (\text{П.17})$$

с функцией Дедекинда

$$\eta(q^2) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)}. \quad (\text{П.18})$$

Хочется подчеркнуть, что мы *не предполагаем*, что промежуточные размерности блоков Δ и $\tilde{\Delta}$ являются дополнительными. Во избежание недоразумений отметим также, что $H_{\text{sp}}(q)$ представляет собой просто удобное обозначение и вряд ли может быть истолковано как вклад “материи–наблюдателя” в комбинированный блок или четырехточечную функцию. Дополнительные упрощения произведения эллиптических блоков в случае, когда теории “материи” и “Лиувилля” в самом деле являются дополнительными (т.е. $c_{\text{sp}} = 0$), автор надеется обсудить в следующей публикации.

Благодарности. Особенная благодарность Галчонку за постоянную моральную поддержку, которая давала мне уверенность в себе, тем более ценную в работе над этим малопопулярным проектом. То же самое касается в значительной степени и разговоров с А. Невё. Я признателен также А. Белавину за интерес к работе и веру в ее важность. Самые трудные вычисления были выполнены во время визитов в лабораторию теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ (Дубна) и в теоретдел ИТЭФ в декабре 2005 г. – январе 2006 г. Большое значение сыграли стимулирующая научная атмосфера этих теоретических групп. Персональная признательность А. Исаеву и А. Лосеву. Этот визит был частично поддержан проектом CNRS UMR 5825. Также мне оказали помощь INTAS (грант № INTAS-OPEN-03-51-3350) и Европейское Сообщество (контракт EUCLID HRPN-CT-2002-00325).

Список литературы

- [1] К. А. Тер-Мартirosян, *Лекции по теоретической физике*, МФТИ, М., 1974–1976.
- [2] Al. Zamolodchikov, *JHEP*, **07** (2002), 029; [hep-th/0109078](#).
- [3] Al. Zamolodchikov, *Perturbed conformal field theory on fluctuating sphere*, [hep-th/0508044](#).
- [4] Ал. Б. Замолодчиков, Ю. Ишимото, *ТМФ*, **147**:3 (2006), 372.
- [5] J. Cardy, *Phys. Rev. Lett.*, **54** (1985), 1354.
- [6] A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **477** (1996), 577; [hep-th/9506136](#).
- [7] Ал. Замолодчиков, *ТМФ*, **142**:2 (2005), 218; [hep-th/0505063](#).
- [8] A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241** (1984), 333.
- [9] Al. Zamolodchikov, *Commun. Math. Phys.*, **96** (1984), 419; Ал. Б. Замолодчиков, *ТМФ*, **73**:1 (1987), 103.
- [10] M. Staudacher, *Nucl. Phys. B*, **336** (1990), 349.
- [11] I. Kostov, “Thermal flow in the gravitational $O(n)$ model”, *Quantum Theory and Symmetries*, Proc. IV Intern. Symp., v. 1 (Varna, Bulgaria, 15–21 August 2005), ed. V. K. Dobrev, Heron Press, Sofia, Bulgaria, 297; [hep-th/0602075](#).

Поступила в редакцию 14.08.2006