Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, Согласованные скобки Ли–Пуассона на алгебрах Ли $e(3)$ и $so(4)$, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 1, 26–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6009>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 18:13:52

© 2007 г.

А. В. Цыганов*

СОГЛАСОВАННЫЕ СКОБКИ ЛИ–ПУАССОНА НА АЛГЕБРАХ ЛИ $e(3)$ И $so(4)$

Проведена полная классификация согласованных скобок Ли–Пуассона на дуальных пространствах алгебр Ли $e(3)$ и $so(4)$. Соответствующие бигамильтоновы системы являются вращающимися волчками, отвечающими классическим случаям интегрируемости уравнений Эйлера, уравнений Кирхгофа и уравнений Пуанкаре–Жуковского.

Ключевые слова: интегрируемые системы, бигамильтоновы многообразия, тензоры Ли–Пуассона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гладкое многообразие $\mathcal{M}$, снабженное парой согласованных скобок Пуассона $\{.,.\}$ и $\{.,.\}'$, или, что то же самое, парой совместных тензоров Пуассона P и P' , называется бигамильтоновым многообразием. Динамические системы на многообразии $\mathcal{M}$, обладающие достаточным для интегрируемости по Лиувиллю количеством функционально независимых интегралов движения $H_0, H_1, \dots, H_n$ в биинволюции относительно скобок Пуассона

$$\{H_i, H_k\} = \{H_i, H_k\}' = 0, \quad (1.1)$$

будем называть для краткости биинтегрируемыми системами или обобщенными бигамильтоновыми системами.

Для того чтобы интегралы движения находились в биинволюции (1.1), достаточно, чтобы соответствующие им векторные поля X_{H_i} были бигамильтоновыми [1], [2]. В этом случае интегралы движения H_i образуют цепочку Ленарда–Магри и удовлетворяют соотношениям

$$P dH_0 = 0, \quad X_{H_i} = P dH_i = P' dH_{i-1}, \quad P' dH_n = 0. \quad (1.2)$$

Подобные динамические системы также называются системами Гельфанда–Захаревича [3], так как уравнения (1.2) можно записать в виде

$$P_\lambda dH(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: tsiganov@mph.phys.spbu.ru

Здесь $P_\lambda = P + \lambda P'$ – пуассонов пучок, а функцию

$$H(\lambda) = H_n \lambda^n + \dots + H_1 \lambda + H_0 \quad (1.4)$$

называют полиномиальной функцией Казимира пуассонова пучка P_λ [2].

Данная работа посвящена классификации линейных пуассоновых пучков на многообразиях, которые можно отождествить с дуальными пространствами 6-мерных алгебр Ли $e(3)$ и $so(4)$, при этом решения H_i уравнений (1.2) являются не более чем квадратичными гамильтонианами, описывающими динамику твердого тела с неподвижной точкой, динамику твердого тела в жидкости, динамику твердого тела с полостями и т.д. (см. книгу [4]).

2. БИГАМИЛЬТОНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Для того чтобы на гладком конечномерном многообразии $\mathcal{M}$ задать структуру пуассонова многообразия, необходимо снабдить его тензором или бивектором Пуассона P , т.е. кососимметричным контравариантным тензорным полем второго ранга, для которого скобка Схоутена равна нулю, т.е. $\llbracket P, P \rrbracket = 0$.

Напомним, что на многообразии $\mathcal{M}$ с координатами $z = (z_1, \dots, z_m)$ скобка Схоутена [5] двух бивекторов A и B является антисимметричным тензором третьего ранга с компонентами

$$\llbracket A, B \rrbracket^{ijk} = - \sum_{n=1}^{\dim \mathcal{M}} \left(A^{nk} \frac{\partial B^{ij}}{\partial z_n} + B^{nk} \frac{\partial A^{ij}}{\partial z_n} + \text{cycle}(i, j, k) \right).$$

Скобка Пуассона, отвечающая бивектору Пуассона P , имеет вид

$$\{f(z), g(z)\} = \langle df, P dg \rangle = \sum_{i,k} P^{ik}(z) \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} \frac{\partial g(z)}{\partial z_k}. \quad (2.1)$$

Здесь df – ковектор с компонентами $\partial f / \partial z_i$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение. Так как тождество Якоби для произвольных функций f, g и $h \in C^\infty(\mathcal{M})$ можно представить в виде

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = \sum_{ijk} \llbracket P, P \rrbracket^{ijk} \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} \frac{\partial g(z)}{\partial z_j} \frac{\partial h(z)}{\partial z_k}, \quad (2.2)$$

то скобка (2.1) удовлетворяет тождеству Якоби при $\llbracket P, P \rrbracket = 0$ [6].

Для того чтобы на многообразии $\mathcal{M}$ задать структуру бигамильтонова многообразия, необходимо определить пару совместных и независимых тензоров Пуассона P и P' .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Тензоры Пуассона P и P' называются совместными, если скобка Схоутена между ними равна нулю, т.е. $\llbracket P, P' \rrbracket = 0$.

Используя свойства скобки Схоутена, можно доказать, что любая линейная комбинация двух совместных тензоров Пуассона $P_\lambda = P + \lambda P'$, $\lambda \in \mathbb{R}$, также является тензором Пуассона и поэтому называется пуассоновым пучком на многообразии $\mathcal{M}$.

В общем случае описание всех пар совместных тензоров Пуассона на многообразии $\mathcal{M}$ является весьма непростой задачей (см., например, работы [2], [7]–[11]). Для многообразий $\mathcal{M}$ малой размерности эта задача может быть решена с помощью современных систем символьных вычислений, которые позволяют достаточно эффективно исследовать переопределенную систему уравнений

$$[P, P] = [P, P'] = [P', P'] = 0. \quad (2.3)$$

Любому решению системы уравнений (2.3) можно сопоставить динамическую систему на многообразии $\mathcal{M}$, для которой интегралы движения H_i образуют цепочку Ленарда–Магри (1.2), (1.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Решение $(H(\lambda), P_\lambda)$ полной системы уравнений (1.3), (2.3) называется нетривиальным, если числа функционально независимых коэффициентов H_i в полиноме $H(\lambda)$ (1.4) достаточно для интегрируемости соответствующей бигамильтоновой системы по Лиувиллю.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением нетривиальных решений данной полной системы уравнений.

3. КАНОНИЧЕСКИЕ ТЕНЗОРЫ ЛИ–ПУАССОНА

В общем случае уравнения (2.3) имеют бесконечно много решений, и поэтому необходимо сразу же ограничить множество решений этой системы. Одним из наиболее изученных классов решений (после симплектических тензоров) являются тензоры Ли–Пуассона, связанные с различными алгебрами Ли.

Напомним, что если c_{ij}^k – структурные константы некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то на любом линейном многообразии $\mathcal{M}$ подходящей размерности с координатами $z = (z_1, \dots, z_m)$ всегда можно определить линейный тензор Ли–Пуассона по правилу

$$P_{ij}(z) = \sum_k^{\dim \mathcal{M}} c_{ij}^k z_k. \quad (3.1)$$

Например, на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли, которое отождествляется с $\mathfrak{g}$ при помощи инвариантного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$, скобка Ли–Пуассона (2.1) имеет вид

$$\{f, g\}(z) = \langle z, [df(z), dg(z)] \rangle, \quad z \in \mathfrak{g}^*, \quad (3.2)$$

где $[\cdot, \cdot]$ – скобка Ли в алгебре $\mathfrak{g}$.

ПРИМЕР 1. Алгебра Ли $e(3) = so(3) \oplus \mathbb{R}^3$ группы движения евклидова пространства $E(3)$ является полупрямой суммой алгебры вращений $so(3)$ и абелевой алгебры

сдвигов в $\mathbb{R}^3$. На многообразии $\mathcal{M} \simeq e^*(3)$ определим координаты $z = (x, J)$, где

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad J = (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 \simeq so(3)$$

– два трехмерных вектора. Здесь и всюду далее мы отождествляем алгебры $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ и $(so(3), [\cdot, \cdot])$, используя изоморфизм алгебр Ли

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \rightarrow z_M = \begin{pmatrix} 0 & z_3 & -z_2 \\ -z_3 & 0 & z_1 \\ z_2 & -z_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где $\wedge$ – векторное произведение, а $[\cdot, \cdot]$ – матричный коммутатор. В этих обозначениях тензор Ли–Пуассона (3.1) имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & -x_2 \\ * & 0 & 0 & -x_3 & 0 & x_1 \\ * & * & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ * & * & * & 0 & J_3 & -J_2 \\ * & * & * & * & 0 & J_1 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & x_M \\ x_M & J_M \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Соответствующая скобка Ли–Пуассона (2.1) для линейных функций на $e^*(3)$, т.е. для элементов алгебры $e(3)$, совпадает со скобкой Ли в $e(3)$

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \quad (3.5)$$

где ε_{ijk} – полностью кососимметричный тензор. На произвольные гладкие функции эта скобка продолжается с помощью тождества Лейбница.

Напомним, что с точностью до изоморфизмов для редуктивных (полупростых) алгебр Ли $\mathfrak{g}$ существует полная классификация линейных тензоров Пуассона (3.1) на двойственных многообразиях. Это означает, что на многообразии $\mathfrak{g}^*$ может быть выделен стандартный, или канонический, тензор P , отвечающий, например, базису Картана–Вейля, а любой другой линейный тензор $\tilde{P}$ на многообразии $\mathfrak{g}^*$ всегда приводим к стандартному с помощью подходящего линейного преобразования.

ПРИМЕР 2. На двойственном пространстве к алгебре Ли $so(4) = so(3) \oplus so(3)$ с координатами $z = (s, t)$, где $s \in so(3) \simeq \mathbb{R}^3$ и $t \in so(3) \simeq \mathbb{R}^3$ – два трехмерных вектора, канонический тензор Ли–Пуассона имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} s_M & 0 \\ 0 & t_M \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Линейное преобразование

$$\tau : \quad y = \varkappa(s - t), \quad J = s + t, \quad \varkappa \in \mathbb{C}, \quad (3.7)$$

отображает тензор (3.6) в другой часто используемый в приложениях тензор Ли–Пуассона на многообразии $so^*(4)$

$$P = \begin{pmatrix} \varkappa^2 J_M & x_M \\ x_M & J_M \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

который при контракции (ретракции) $\varkappa \rightarrow 0$ переходит в тензор Ли–Пуассона (3.4) на многообразии $e^*(3)$.

4. ТЕНЗОРЫ ЛИ–ПУАССОНА НА МНОГООБРАЗИИ $e^*(3)$

В данном разделе мы опишем все нетривиальные решения уравнений (2.3) в классе линейных функций на многообразии $\mathcal{M} \simeq e^*(3)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *С точностью до изоморфизмов на многообразии $e^*(3)$ существуют шесть пуассоновых пучков $P + \lambda P'$, где P – канонический тензор (3.4), а P' – тензор Ли–Пуассона, для которых решения уравнений (1.3) нетривиальны.*

Доказательство основано на непосредственном решении переопределенной системы уравнений (2.3) в классе линейных функций на многообразии $e^*(3)$ и классификации полученных решений с помощью современных компьютерных систем символьных вычислений.

Итак, в данном разделе тензор Пуассона P является каноническим тензором Пуассона (3.4) на многообразии $e^*(3)$, а P' – решением системы уравнений (2.3). Ясно, что тензоры P' и $P' \rightarrow \alpha P' + \beta P$ задают один и тот же пучок тензоров Пуассона. Еще один класс очевидных преобразований определяется линейными преобразованиями, сохраняющими канонический тензор P (3.4):

$$J \rightarrow J' = \mathbf{U}J + w \wedge \mathbf{U}x, \quad x \rightarrow x' = \mathbf{U}x, \quad \mathbf{U} \in SO(3), \quad w \in \mathbb{R}^3. \quad (4.1)$$

Для полного описания пучка тензоров Ли–Пуассона достаточно предъявить один из конкретных тензоров P' , принадлежащих этому пучку.

4.1. Совместные тензоры Ли–Пуассона, обладающие общей функцией Казимира. Каноническая скобка Ли–Пуассона (3.5) вырождена и обладает двумя квадратичными функциями Казимира

$$C_1 = |x|^2 \equiv \sum_{k=1}^{n=3} x_k^2, \quad C_2 = \langle x, J \rangle \equiv \sum_{k=1}^{n=3} x_k J_k, \quad P dC_{1,2} = 0. \quad (4.2)$$

Если к системе (2.3) добавить уравнение

$$P' dC = 0, \quad C = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2, \quad (4.3)$$

в которое входят два неизвестных числа $\gamma_{1,2}$, то легко доказать, что у расширенной системы (2.3), (4.3) существуют всего два нетривиальных решения.

В п. 6.2 мы будем использовать тензоры Ли–Пуассона, обладающие общей невырожденной функцией Казимира, для построения рациональных тензоров Пуассона специального вида. Поэтому мы опишем эти тензоры немного более подробно, чем остальные тензоры Ли–Пуассона. В частности, мы укажем их вид после групповых преобразований.

Первый пучок тензоров Ли–Пуассона. Если (3×3) -матрица $\mathbf{A}$ является симметрической числовой матрицей и a – произвольное число, то совместный с каноническим тензор Ли–Пуассона равен

$$P'_1 = \begin{pmatrix} aJ_M & \mathbf{A}x_M \\ x_M \mathbf{A} & (\mathbf{A}J)_M \end{pmatrix}, \quad P'_1 d\langle x, J \rangle = 0. \quad (4.4)$$

Здесь $\mathbf{A}x_M$ – матричное произведение, а $(\mathbf{A}J)_M$ – матрица, построенная с помощью отображения (3.3) из вектора $\mathbf{A}J$.

Так как тензор P'_1 определен с точностью до преобразований (4.1), то без потери общности можно предположить, что матрица $\mathbf{A}$ в определении (4.4) диагональна. Решения дополнительной системы уравнений (1.3) при $H_0 = |x|^2$ являются интегралами движения для системы Клебша [12]:

$$H_1 = -a\langle J, J \rangle - \langle (\text{tr } \mathbf{A} - \mathbf{A})x, x \rangle, \quad H_2 = a\langle \mathbf{A}J, J \rangle + \langle \mathbf{A}^\vee x, x \rangle, \quad (4.5)$$

где $\mathbf{A}^\vee = \det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}$ – матрица алгебраических дополнений. Если любые два параметра a_i совпадают, например, $a_i = a_j$, то интегралы движения (4.5) находятся в инволюции с функцией $\tilde{H} = J_k$. В этом случае данную интегрируемую систему можно назвать обобщенным волчком Лагранжа.

Групповые преобразования (4.1) с $\mathbf{U} = \mathbf{Id}$ и $w \neq 0$ приводят тензор Ли–Пуассона P'_1 (4.4) к виду

$$\tilde{P}'_1 = P'_1 + a \begin{pmatrix} \mathbf{W}x_M - x_M \mathbf{W} & J_M \mathbf{W} - (w \wedge x)_M \mathbf{W} \\ -\mathbf{W}J_M + \mathbf{W}(w \wedge x)_M & \langle w, J \rangle \mathbf{W} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где $\mathbf{W} = w_M$ – кососимметрическая матрица, отвечающая вектору w . Соответствующая функция Гамильтона равна

$$\tilde{H}_1 = H_1 + 2a\langle w, x \wedge J \rangle - a|w \wedge x|^2.$$

В данном гамильтониане появились слагаемые, пропорциональные компонентам вектора $x \wedge J$; обсуждение подобных систем может быть найдено в работе [13].

Второй пучок тензоров Ли–Пуассона. Определим совместный с каноническим тензор Ли–Пуассона

$$P'_2 = \begin{pmatrix} ax_M & \mathbf{A}x_M \\ x_M \mathbf{A} & (\mathbf{B}J - \mathbf{C}x)_M \end{pmatrix}, \quad P'_2 d|x|^2 = 0, \quad (4.7)$$

где $\mathbf{A}$ – симметрическая числовая матрица и

$$\mathbf{B} = \text{tr } \mathbf{A} - 2\mathbf{A}, \quad \mathbf{C} = a^{-1}(\text{tr } \mathbf{A}^\vee - 2\mathbf{A}^\vee - \mathbf{A}^2).$$

Решения дополнительной системы уравнений (1.3) при $H_0 = \langle x, J \rangle$ являются интегралами движения для системы Стеклова–Ляпунова:

$$\begin{aligned} 2H_1 &= -a\langle J, J \rangle + \langle \mathbf{A}x, J \rangle + a^{-1}(\langle \mathbf{A}^2x, x \rangle + 2\langle \mathbf{A}^\vee x, x \rangle), \\ H_2 &= a\langle \mathbf{A}J, J \rangle - 2\langle \mathbf{A}^\vee x, J \rangle - a^{-1}(\langle \mathbf{A}^3x, x \rangle - \text{tr } \mathbf{A}^2\langle \mathbf{A}x, x \rangle). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Функция H_1 называется гамильтонианом Ляпунова [14], функция H_2 – гамильтонианом Стеклова [15]. Если любые два параметра a_i совпадают, например, $a_i = a_j$, то интегралы движения (4.8) находятся в инволюции с функцией $\tilde{H} = J_k$. В этом случае мы получаем интегрируемую систему, которую также принято называть обобщенным волчком Лагранжа.

Используя групповые преобразования (4.1), можно диагонализировать матрицу $\mathbf{A}$ в P'_2 (4.7) и получить тензор Пуассона

$$\tilde{P}'_2 = P'_2 + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{W}x_M - (\mathbf{W}x)_M \\ x_M \mathbf{W} - (\mathbf{W}x)_M & -(\tilde{\mathbf{C}}x)_M \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{W} = w_M$ – кососимметрическая матрица, отвечающая вектору w , и

$$\tilde{\mathbf{C}} = a^{-1}(\mathbf{W}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{W}) - a^{-1}\left(\mathbf{W}^2 - \frac{1}{2}\text{tr } \mathbf{W}^2\right).$$

В соответствующем гамильтониане также появятся слагаемые, пропорциональные компонентам вектора $x \wedge J$ [13].

4.2. Совместные тензоры Ли–Пуассона, не обладающие общей функцией Казимира. В данном пункте мы будем рассматривать две полиномиальных функции Казимира $H^\alpha(\lambda)$ и $H^\beta(\lambda)$ пуассонова пучка $P + \lambda P'$, которые являются решениями дифференциальных уравнений (1.2), (1.3), отвечающих следующим начальным условиям:

$$H_0^\alpha = |x|^2, \quad H_0^\beta = \langle x, J \rangle.$$

По определению (1.2) все коэффициенты полиномиальных функций Казимира $H^\alpha(\lambda)$ и $H^\beta(\lambda)$ находятся в биинволюции (1.1).

Третий пучок тензоров Ли–Пуассона. Если $\mathbf{A}$ – симметрическая числовая матрица и a – произвольное число, то совместный с каноническим тензор Пуассона равен

$$\begin{aligned} P'_3 &= \begin{pmatrix} (aJ + \mathbf{A}x)_M & (\mathbf{A}J)_M - \mathbf{A}J_M \\ * & -a^{-1}(\mathbf{A}^2J)_M \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & a^{-1}((\mathbf{A}x)_M \mathbf{A} - (\mathbf{A}^2x)_M - \mathbf{A}x_M \mathbf{A}) \\ * & -a^{-2}((\mathbf{A}^3x)_M + \mathbf{A}(\mathbf{A}x)_M \mathbf{A} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^2x)_M - (\mathbf{A}^2x)_M \mathbf{A}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Соответствующие первые коэффициенты функций Казимира $H^\alpha(\lambda)$ и $H^\beta(\lambda)$

$$H_1^\alpha = -H_1, \quad H_1^\beta = -a^{-1} \left(\frac{\text{tr } \mathbf{A}}{2} H_1^\alpha + H_2 \right) \quad (4.10)$$

выражаются через гамильтонианы Ляпунова и Стеклова $H_{1,2}$ (4.8). Если положить $H_0 = \gamma_1 \mathcal{C}_1 + \gamma_2 \mathcal{C}_2$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, то решения уравнений (1.3) для данного пучка тензоров Ли–Пуассона совпадут с интегралами Колосова [16].

Таким образом, система Стеклова–Ляпунова может быть связана с двумя различными пучками скобок Ли–Пуассона (4.7) и (4.9). Можно предположить, что именно этот факт приводит к существованию двух “естественных” (2×2) -представлений Лакса для этой интегрируемой системы – с эллиптической зависимостью и с рациональной зависимостью от спектрального параметра [11], [17].

Четвертый пучок тензоров Ли–Пуассона. Определим диагональные матрицы специального вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \text{diag}(0, 0, a_1), & \mathbf{A}_2 &= \text{diag}(b_1, b_1, b_2), & \mathbf{A}_3 &= \text{diag}(c_1, c_1, -c_1), \\ \mathbf{B}_1 &= 2\mathbf{A}_1 - \text{tr } \mathbf{A}_1, & \mathbf{B}_2 &= \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2, \end{aligned}$$

и второй тензор Пуассона

$$P'_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 x_M + x_M \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 J_M + J_M \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 x_M \\ \mathbf{A}_1 J_M + J_M \mathbf{B}_1 + x_M \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 J_M + J_M \mathbf{B}_2 + (\mathbf{A}_3 x)_M \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

для которого

$$H_1^\alpha = 2\langle \mathbf{A}_1 x, J \rangle + \langle (\mathbf{A}_2 - b_1)x, x \rangle, \quad H_1^\beta = \langle \mathbf{A}_1 J, J \rangle - \frac{1}{2} \langle (\mathbf{A}_3 - c_1)x, x \rangle.$$

Легко проверить, что эти интегралы движения находятся в инволюции с функцией $\tilde{H} = J_3$. Таким образом, с четвертым пучком тензоров Пуассона связана интегрируемая система на многообразии $e^*(3)$, обладающая дополнительным линейным интегралом движения.

Пятый пучок тензоров Ли–Пуассона. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – две матрицы, которые можно одновременно привести к диагональному виду:

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3),$$

и определяющий пуассонов пучок второй тензор Пуассона равен

$$P'_5 = \begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{A}x)_M \\ (\mathbf{A}x)_M & (\mathbf{A}J + \mathbf{B}x)_M \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

то решения дополнительной системы уравнений (1.3) имеют вид

$$H_1^\alpha = -\langle \mathbf{A}x, x \rangle, \quad H_1^\beta = -\langle \mathbf{A}x, J \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathbf{B}x, x \rangle.$$

Подчеркнем, что в данном случае не существует линейного интеграла движения, который находится в инволюции с гамильтонианом H_1^β .

Шестой пучок тензоров Ли–Пуассона. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – две матрицы, которые можно одновременно привести к диагональному виду:

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3),$$

то совместный с каноническим тензор Пуассона имеет вид

$$P'_6 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}x_{\mathbf{M}} \\ x_{\mathbf{M}}\mathbf{A} & (\mathbf{A}J + \mathbf{B}x)_{\mathbf{M}} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Коэффициенты функций Казимира зависят только от переменных x_i :

$$H_1^\alpha = \langle \mathbf{A}x, x \rangle, \quad H_1^\beta = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{B}x, x \rangle,$$

и находятся в инволюции с линейной функцией $\tilde{H} = \langle c, x \rangle$, где c – произвольный вектор.

5. ТЕНЗОРЫ ЛИ–ПУАССОНА НА МНОГООБРАЗИИ $so^*(4)$

В данном разделе мы опишем все нетривиальные решения уравнений (2.3) в классе линейных функций на многообразии $\mathcal{M} \simeq so^*(4)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *С точностью до изоморфизмов на многообразии $so^*(4)$ существуют восемь пуассоновых пучков $P + \lambda P'$, где P – канонический тензор (3.6), а P' – тензор Ли–Пуассона, для которых решения уравнений (1.3) нетривиальны.*

Доказательство основано на решении переопределенной системы уравнений (2.3) в классе линейных функций на многообразии $so^*(4)$ и классификации всех полученных решений с помощью компьютерных систем символьных вычислений.

Заметим, что после замены переменных (3.7) и контракции $\varkappa \rightarrow 0$ данные восемь пучков переходят в рассмотренные ранее шесть пучков тензоров Ли–Пуассона на многообразии $e^*(3)$. Однако нумерация пучков в предыдущем разделе и данном разделе различна, так как несколько пучков на $so^*(4)$ переходят в один пучок на многообразии $e^*(3)$.

Итак, в данном разделе тензор Пуассона P является каноническим тензором Пуассона (3.6), а P' – решением системы уравнений (2.3). Эти тензоры определены с точностью до перестановки $s \leftrightarrow t$ и вращений

$$s \rightarrow s' = \mathbf{U}_1 s, \quad t \rightarrow t' = \mathbf{U}_2 t, \quad (5.1)$$

где $\mathbf{U}_{1,2}$ – ортогональные числовые матрицы.

5.1. Совместные тензоры Ли–Пуассона, обладающие общей функцией Казимира. Тензор Ли–Пуассона (3.6) вырожден и обладает двумя функциями Казимира

$$\mathcal{C}_1 = |s|^2, \quad \mathcal{C}_2 = |t|^2, \quad P d\mathcal{C}_{1,2} = 0. \quad (5.2)$$

Добавляя к системе (2.3) уравнение (4.3) и решая полученную систему, можно получить три нетривиальных пучка тензоров Ли–Пуассона.

Первый пучок тензоров Ли–Пуассона. Если (3×3) -матрица $\mathbf{A}$ является симметрической числовой матрицей, то совместный с каноническим тензор Ли–Пуассона имеет вид

$$P'_1 = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}t)_M & -s_M \mathbf{A} - \mathbf{A}t_M \\ -\mathbf{A}s_M - t_M \mathbf{A} & (\mathbf{A}s)_M \end{pmatrix}, \quad P'_1 d(|s|^2 - |t|^2) = 0. \quad (5.3)$$

В переменных x, J (3.7) данный пуассонов пучок определяется тензором

$$P'_1 = \begin{pmatrix} aJ_M & \mathbf{A}x_M \\ x_M \mathbf{A} & (\mathbf{A}J)_M \end{pmatrix}, \quad P'_1 d\langle x, J \rangle = 0. \quad (5.4)$$

Решения дополнительной системы уравнений (1.3) при условии

$$H_0 = \varkappa^2(|s|^2 + |t|^2) = |x|^2 + \varkappa^2|J|^2$$

являются интегралами движения для системы Шоттки [18]:

$$H_1 = -\langle (a + \varkappa \mathbf{A})J, J \rangle - \langle (\operatorname{tr} \mathbf{A} - \mathbf{A})x, x \rangle, \quad H_2 = a\langle \mathbf{A}J, J \rangle + \langle \mathbf{A}^\vee x, x \rangle.$$

При контракции $\varkappa \rightarrow 0$ данная система переходит в систему Клебша (4.5). Кроме этого, если матрица $\mathbf{A}$ невырождена, то существует скрученное пуассоново отображение, которое связывает соответствующие пуассоновы пучки на многообразиях $e^*(3)$ и $so^*(4)$ [19], [20].

Второй пучок тензоров Ли–Пуассона. Определим совместный с каноническим тензор Ли–Пуассона

$$P'_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}(\mathbf{A}s)_M \\ (\mathbf{A}s)_M \mathbf{A} & (\mathbf{A}^2 t)_M - \mathbf{A}s_M \mathbf{A} \end{pmatrix}, \quad P'_2 d|s|^2 = 0, \quad (5.5)$$

где $\mathbf{A}$ – произвольная симметрическая матрица. Решения дополнительной системы уравнений (1.3) при $H_0 = |t|^2$ являются интегралами движения для интегрируемой системы Стеклова [21]:

$$H_1 = -\langle \mathbf{A}t, \mathbf{A}t \rangle - 2\langle \mathbf{A}^\vee s, t \rangle, \quad H_2 = \langle \mathbf{A}^\vee s, \mathbf{A}^\vee s \rangle - 2\det \mathbf{A} \langle \mathbf{A}s, t \rangle. \quad (5.6)$$

При контракции $\varkappa \rightarrow 0$ система Стеклова переходит в систему Стеклова–Ляпунова (4.10). Кроме этого, существует скрученное пуассоново отображение, которое связывает пуассоновы пучки на $e^*(3)$ и $so^*(4)$, определяемые тензорами (4.7) и (5.5) [19].

Третий пучок тензоров Ли–Пуассона. При дополнительном условии $P' d(|s|^2 + |t|^2) = 0$ система уравнений (2.3) имеет еще одно нетривиальное решение

$$P'_3 = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}t)_M & s_M \mathbf{A} - \mathbf{A}t_M \\ \mathbf{A}s_M - t_M \mathbf{A} & -(\mathbf{A}s)_M \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

где $\mathbf{A} = \text{diag}(0, 0, 1)$, которому отвечают следующие интегралы движения:

$$H_1 = s_3 t_3, \quad H_2 = t_3^2 - s_3^2.$$

Данная система принадлежит семейству систем Пуанкаре [22], обладающих линейным интегралом движения $\tilde{H} = \gamma_1 s_3 + \gamma_2 t_3$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$.

ПРИМЕР 3. В качестве примера приведем несколько тривиальных решений полной системы уравнений (2.3), (4.3). Например, для удовлетворяющих условию $P' d(|s|^2 + |t|^2) = 0$ бивекторов Ли–Пуассона

$$P'_{\text{triv}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_M \end{pmatrix}, \quad P'_{\text{triv}} = \begin{pmatrix} t_M & s_M - t_M \\ s_M - t_M & 2t_M - s_M \end{pmatrix}$$

решения уравнений (1.3) либо тривиальны: $H_{1,2} = 0$, либо функционально зависимы: $H_{1,2} = \gamma_{1,2} \langle s, t \rangle$, $\gamma_{1,2} \in \mathbb{R}$, соответственно.

5.2. Совместные тензоры Ли–Пуассона, не обладающие общей функцией Казимира. В данном пункте мы будем рассматривать две полиномиальные функции Казимира $H^\alpha(\lambda)$ и $H^\beta(\lambda)$ пуассонова пучка $P + \lambda P'$, которые являются решениями дифференциальных уравнений (1.2), (1.3), отвечающих следующим начальным условиям:

$$H_0^\alpha = |s|^2, \quad H_0^\beta = |t|^2.$$

Четвертый пучок тензоров Ли–Пуассона. Если $\mathbf{A}$ – симметрическая числовая матрица и a – произвольное число, то определяющий пуассонов пучок второй тензор Пуассона равен

$$P'_4 = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}t - \det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-2}s)_M & a\mathbf{A}(\mathbf{A}s)_M - \mathbf{A}t_M \\ a(\mathbf{A}s)_M\mathbf{A} - t_M\mathbf{A} & a(\mathbf{A}^2t)_M - a\mathbf{A}s_M\mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Соответствующие коэффициенты функций Казимира $H^\alpha(\lambda)$ и $H^\beta(\lambda)$ выражаются через гамильтонианы Стеклова $H_{1,2}$ (5.6):

$$H_1^\alpha = -aH_1, \quad H_1^\beta = (\det \mathbf{A})^{-1}H_2.$$

Таким образом, система Стеклова на многообразии $so^*(4)$ может быть связана с двумя различными пучками скобок Ли–Пуассона (5.5) и (5.8).

Пятый пучок тензоров Ли–Пуассона. Две диагональные матрицы

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$$

задают совместный с каноническим тензор Пуассона

$$P'_5 = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}s)_M & 0 \\ 0 & (\mathbf{B}t)_M \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Для этого пучка не существует дополнительного линейного интеграла движения, который бы находился в инволюции с обоими гамильтонианами

$$H_1^\alpha = -\langle \mathbf{A}s, s \rangle, \quad H_1^\beta = -\langle \mathbf{B}t, t \rangle.$$

Шестой пучок тензоров Ли–Пуассона. Определим две диагональные матрицы специального вида:

$$\mathbf{A} = \text{diag}(0, 0, a), \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3), \quad b_1 = \pm b_2,$$

и совместный с каноническим тензор Пуассона

$$P'_6 = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}s + \mathbf{B}t)_M & -s_M(\mathbf{B} \mp \mathbf{A}) - \mathbf{B}t_M \\ -(\mathbf{B} \mp \mathbf{A})s_M - t_M \mathbf{B} & ((\mathbf{B} \mp \mathbf{A})s)_M + t_M \mathbf{A} + \mathbf{A}t_M \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

для которого

$$H_1^\alpha = -\langle \mathbf{A}s, s \rangle - 2\langle \mathbf{B}s, t \rangle, \quad H_1^\beta = \langle \mathbf{A}t, t \rangle - 2\langle (\mathbf{B} \mp \mathbf{A})s, t \rangle.$$

Данная система принадлежит семейству систем Пуанкаре [22], обладающих линейным интегралом движения $\tilde{H} = s_3 + t_3$.

Седьмой пучок тензоров Ли–Пуассона. Определим три матрицы

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, 0), \quad \mathbf{B} = \text{diag}(0, 0, b), \quad \mathbf{C} = \text{diag}(0, 0, c)$$

и тензор Пуассона

$$P'_7 = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}s + \mathbf{B}t)_M & -\mathbf{B}t_M \\ t_M \mathbf{B} & (\mathbf{C}t)_M \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

для которого решения дополнительной системы уравнений (1.3)

$$H_1^\alpha = -\langle \mathbf{A}s, s \rangle - 2\langle \mathbf{B}t, s \rangle, \quad H_1^\beta = \langle \mathbf{C}t, t \rangle = ct_3^2$$

находятся в инволюции с линейным интегралом движения $\tilde{H} = t_3$.

Восьмой пучок тензоров Ли–Пуассона. Определим три матрицы

$$\mathbf{A} = \text{diag}(0, 0, a), \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\det \mathbf{B} = 0, \quad b_i c_i = 0, \quad i = 1, \dots, 3.$$

Эти матрицы позволяют определить тензор Пуассона

$$P'_8 = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}s)_M & -s_M \mathbf{C}^T \\ -\mathbf{C}s_M & (\mathbf{B}t + \mathbf{C}s)_M \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

для которого решения дополнительной системы уравнений (1.3)

$$H_1^\alpha = -\langle \mathbf{A}s, s \rangle = -as_3^2, \quad H_1^\beta = -\langle \mathbf{B}t, t \rangle - 2a^{-1}\langle \mathbf{A}s, \mathbf{C}t \rangle$$

находятся в инволюции с линейным интегралом движения $\tilde{H} = s_3$.

6. ТЕНЗОРЫ ПУАССОНА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В физических приложениях особый интерес представляют квадратичные или квадратично-линейные функции Гамильтона, которым отвечают пучки тензоров Пуассона специального вида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Совместный с каноническим тензор Пуассона P' будем называть тензором специального вида, если существует функция решений H_i уравнений (1.3), которая является квадратично-линейной функцией исходных координат на многообразии $\mathcal{M}$.

Тензоры Пуассона специального вида встречаются достаточно редко. Например, если рассматривать тензоры Пуассона P' , которые совместны с каноническим тензором и являются полиномами старших степеней от координат (x, J) или (s, t) , то производящие функции интегралов движения $H^\alpha(\lambda)$ и $H^\beta(\lambda)$ также будут полиномами старших степеней. Выделить среди них квадратично-линейные интегралы довольно сложно.

ПРИМЕР 4. На многообразии $e^*(3)$ для квадратичного тензора Пуассона

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 x_3^2 & -a_2 x_2^2 \\ * & 0 & 0 & -a_3 x_3^2 & 0 & a_1 x_1^2 \\ * & * & 0 & a_2 x_2^2 & -a_1 x_1^2 & 0 \\ * & * & * & 0 & b_3 x_3^2 + 2a_3 x_3 J_3 & -b_2 x_2^2 - 2a_2 x_2 J_2 \\ * & * & * & * & 0 & b_1 x_1^2 + 2a_1 x_1 J_1 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

решения уравнений (1.3) являются кубическими интегралами движения:

$$H_1^\alpha = -\frac{2}{3} \sum a_i x_i^3, \quad H_1^\beta = -\frac{1}{3} \sum b_i x_i^3 - \sum a_i x_i^2 J_i.$$

Далее в данном разделе мы приведем полный список постоянно-линейных тензоров Пуассона и несколько примеров рациональных тензоров Пуассона специального вида.

6.1. Постоянно-линейные тензоры Пуассона. В настоящей работе мы ограничимся классификацией постоянно-линейных пучков тензоров Пуассона вида

$$P_{\lambda, \mu} = P_\lambda + \mu P'' = P + \lambda P' + \mu P'', \quad (6.1)$$

где P – канонический тензор, P' – один из линейных тензоров Ли–Пуассона, рассмотренных в предыдущих разделах, P'' – постоянный тензор, удовлетворяющий условиям совместности

$$[P, P''] = [P', P''] = 0. \quad (6.2)$$

Решая первое из этих уравнений на пуассоновом многообразии $\mathcal{M} \simeq e^*(3)$, мы получим, что постоянный тензор Пуассона

$$P''_{\text{const}} = \begin{pmatrix} 0 & d_M \\ d_M & e_M \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

ТАБЛИЦА 1. Многообразие $e^*(3)$

	Тензор P'	Вектор d	Вектор e
1	P'_1 (4.4)	$d = 0$	$e = 0$
2	P'_2 (4.7)	$d = 0$	$e = (e_1, e_2, e_3)$
3	P'_3 (4.9)	$d = (d_1, d_2, d_3)$	$e = -a^{-1}d$
4	P'_4 (4.11)	$d = (0, 0, d_3)$	$e = (0, 0, e_3)$
5	P'_5 (4.12)	$d = (d_1, d_2, d_3)$	$e = (e_1, e_2, e_3)$
6	P'_6 (4.13)	$d = 0$	$e = (e_1, e_2, e_3)$

совместный с каноническим тензором P (3.4), параметризуется двумя векторами $d = (d_1, d_2, d_3)$ и $e = (e_1, e_2, e_3)$. Решение P'' полной системы уравнений (6.2) будет частным случаем совместного с каноническим постоянного тензора P''_{const} (6.3). Результаты решения уравнений (6.2) в общем случае, т.е. когда все параметры a_i , b_i и c_i в тензорах Ли–Пуассона, рассмотренных в разделе 4, не равны нулю и не совпадают, представлены в табл. 1.

Согласно определению функции Казимира $H(\lambda)$ (1.3) добавление постоянного тензора P'' к пучку $P(\lambda)$ (6.1) приводит к добавлению дополнительных линейных слагаемых к приведенным в предыдущих разделах коэффициентам H_1^α и H_1^β :

$$H_1^\alpha \rightarrow H_1^\alpha + 2\langle d, x \rangle, \quad H_1^\beta \rightarrow H_1^\beta + \langle d, J \rangle + \langle e, x \rangle.$$

Таким образом, к квадратичным интегралам движения в случае Клебша в общем случае нельзя добавить линейные слагаемые ($d = e = 0$). Для системы Стеклова–Ляпунова можно добавить линейные слагаемые, которые зависят от трех дополнительных параметров. Соответствующую интегрируемую систему принято называть системой Рубановского [4], [23]. Остальные три интегрируемые системы также допускают добавление линейных слагаемых к квадратичным интегралам движения.

ПРИМЕР 5. Предположим, что в P'_1 (4.4) матрица $\mathbf{A}$ равна нулю. Соответствующий линейный тензор Пуассона

$$P'_1 = \begin{pmatrix} aJ_M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & aJ_3 & -aJ_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & aJ_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

отвечает волчку Эйлера с гамильтонианом

$$H_1^\alpha = -a\langle J, J \rangle = -a(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2).$$

Добавляя к этому тензору постоянное слагаемое, мы получим постоянно-линейный тензор Пуассона

$$\hat{P}'_1 = \begin{pmatrix} aJ_M & d_M \\ d_M & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & aJ_3 & -aJ_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & aJ_1 & 0 & 0 & d_1 \\ * & * & 0 & 0 & -d_1 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

отвечающий волчку Лагранжа [24], с интегралами движения

$$\hat{H}_1^\alpha = -a(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) + 2d_1x_1, \quad \hat{H}_1^\beta = d_1J_1.$$

Если же в (4.6) положить $\mathbf{A} = -\text{diag}(a^{-1}b^2, 0, 0)$ и $w = (a^{-1}b, 0, 0)$ и добавить постоянное слагаемое с $d = (d_1, 0, 0)$, то мы получим тензор Пуассона

$$\tilde{P}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & aJ_3 - bx_2 & -aJ_2 - bx_3 & 0 & bJ_2 & bJ_3 \\ * & 0 & aJ_1 & 0 & -bJ_1 & d_1 \\ * & * & 0 & 0 & -d_1 & -bJ_1 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

для обобщенного волчка Лагранжа с гамильтонианом [14]

$$\tilde{H}_1^\alpha = -a(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) + 2b(x_2J_3 - x_3J_2) + 2d_1x_1.$$

Рассмотрим теперь постоянно-линейные тензоры Пуассона на многообразии $\mathcal{M} \simeq so^*(4)$. Решая первое из уравнений (6.2), легко доказать, что на $so^*(4)$ существует единственный постоянный тензор Пуассона

$$P''_{\text{const}} = \begin{pmatrix} d_M & 0 \\ 0 & e_M \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

совместный с каноническим тензором Пуассона P (3.6), который параметризуется двумя векторами $d = (d_1, d_2, d_3)$ и $e = (e_1, e_2, e_3)$.

Результаты решения уравнений (6.2) в общем случае, т.е. когда все параметры a_i , b_i и c_i в тензорах Ли-Пуассона, рассмотренных в разделе 5, не равны нулю, представлены в табл. 2.

Добавление постоянного тензора P'' к рассмотренным в предыдущих разделах пучкам тензоров Ли-Пуассона $P(\lambda)$ (6.1) приводит к изменению квадратичных интегралов движения H_1^α и H_1^β :

$$H_1^\alpha \rightarrow H_1^\alpha - 2\langle d, s \rangle, \quad H_1^\beta \rightarrow H_1^\beta - 2\langle e, t \rangle.$$

ТАБЛИЦА 2. Многообразие $so^*(4)$

	Тензор P'	Вектор d	Вектор e
1	P'_1 (5.3)	$d = 0$	$e = 0$
2	P'_2 (5.5)	$d = 0$	$e = (e_1, e_2, e_3)$
3	P'_3 (5.7)	$d = (0, 0, d_3)$	$e = (0, 0, e_3)$
4	P'_4 (5.8)	$d = (d_1, d_2, d_3)$	$e = a\mathbf{A}d$
5	P'_5 (5.9)	$d = (d_1, d_2, d_3)$	$e = (e_1, e_2, e_3)$
6	P'_6 (5.10)	$d = (0, 0, d_3)$	$e = d$
7	P'_7 (5.11)	$d = (d_1, d_2, d_3)$	$e = (0, 0, e_3)$
8	P'_8 (5.12)	$d = (0, 0, d_3)$	$e = (e_1, e_2, e_3)$

Таким образом, к квадратичным интегралам движения в случае Шоттки в общем случае нельзя добавить линейные слагаемые ($d = e = 0$). Для системы Стеклова можно добавить линейные слагаемые, которые зависят от трех дополнительных параметров. Остальные системы также допускают добавление линейных слагаемых к квадратичным интегралам движения.

6.2. Рациональные тензоры Пуассона. В данном пункте мы кратко рассмотрим одно замечательное свойство совместных тензоров Ли–Пуассона P и P' , обладающих общей невырожденной функцией Казимира $\mathcal{C}$ (4.2), (5.2). Оказывается, для таких тензоров можно построить специальное семейство рациональных тензоров Пуассона вида

$$P'_{\text{ration}} = P' + \mathcal{C}^{-1} P'_{\text{polinom}}. \quad (6.8)$$

Здесь P' – один из рассмотренных нами линейных тензоров Ли–Пуассона, а тензор P'_{polinom} является полиномом, который находится из уравнений (2.3).

Например, подставим в определение (6.8) линейный тензор P'_1 (6.4), отвечающий волчку Эйлера. В этом случае $\mathcal{C} = \langle x, J \rangle$, и общее решение уравнений (2.3) вида (6.8) в классе кубических полиномов P'_{polinom}

$$P'_{\text{ration}} = \begin{pmatrix} J_M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Delta P'_1(c),$$

параметризуется произвольным числовым вектором $c = (c_1, c_2, c_3)$:

$$\Delta P'_1(c) = \langle c, J \rangle \begin{pmatrix} -c_M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\langle c, J \rangle}{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 2(J \wedge (c \wedge x))_M & J \otimes (c \wedge J) \\ (J \wedge c) \otimes J & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

где $(u \otimes v)_{ij} = u_i v_j$. Соответствующие интегралы движения

$$I_1 = H_1^\alpha = -(1 + \langle c, c \rangle) \langle J, J \rangle + \langle c \wedge J, c \wedge J \rangle, \quad I_2 = -2\mathcal{C} H_1^\beta = \langle J, J \rangle \langle c, J \rangle^2$$

являются полиномами второй и четвертой степеней по моментам.

Подставляя в определение (6.8) линейный тензор $\hat{P}'_1$ (6.5), отвечающий волчку Лагранжа, и решая уравнения (2.3), мы получим частное решение вида

$$\hat{P}'_{\text{ration}} = \begin{pmatrix} J_M & d_M \\ d_M & 0 \end{pmatrix} + \Delta P'_1(c) + \Delta \hat{P}'_1(c, d). \quad (6.10)$$

Здесь c и d — два ортогональных числовых вектора, $\Delta P'_1(c)$ дается формулой (6.9), а третье слагаемое равно

$$\Delta \hat{P}'_1(c, d) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & (c \wedge x) \otimes (J \wedge (c \wedge d)) - \langle c, J \rangle ((c \wedge x) \otimes d - (d \wedge x) \otimes c) \\ * & \langle d, J \rangle J_M - \langle c \wedge d, x \rangle (c \wedge d)_M \end{pmatrix}.$$

Используя преобразования (4.1), всегда можно положить $c = (0, 0, 1)$ и $d = (d_1, 0, 0)$. В этом случае первые коэффициенты функций Казимира $\hat{H}_1^\alpha$ и $\hat{H}_1^\beta$ порождают гамильтониан для волчка Ковалевской:

$$\hat{H}_1^\alpha = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2d_1x_1,$$

и второй интеграл движения четвертой степени по моментам

$$-2\mathcal{C}\hat{H}_1^\beta = (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)J_3^2 + 2d_1(x_1(J_1^2 + J_3^2) + x_2J_1J_2) - d_1^2x_2^2.$$

Тензор Пуассона $\hat{P}'_{\text{ration}}$ (6.10) был неявно построен с помощью классической r -матрицы на вспомогательном пространстве $so^*(3, 2)$ в работе [25].

Подставляя в определение (6.8) линейный тензор Пуассона $\tilde{P}'_1$ (6.6), отвечающий обобщенному волчку Лагранжа, и решая уравнения (2.3), мы получим рациональный тензор Пуассона для обобщенного волчка Ковалевской с гамильтонианом

$$\tilde{H}_1^\alpha = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2b(x_2J_3 - x_3J_2) + 2d_1x_1.$$

Согласно работам [13], [26] данная система изоморфна волчку Ковалевской на многообразии $so^*(4)$. Эта и другие системы на алгебре $so(4)$ будут более подробно рассмотрены в рамках предложенного подхода в последующих публикациях.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена полная классификация скобок Ли–Пуассона, согласованных с каноническими скобками на многообразиях $e^*(3)$ и $so^*(4)$. Доказано, что эти линейные скобки можно использовать для построения более сложных постоянно-линейных и рациональных скобок Пуассона, отвечающих различным классическим волчкам.

Заметим, что все построенные в данной работе тензоры Пуассона являются вырожденными. В силу этого для интегрирования уравнений движения соответствующих бигамильтоновых систем стандартными методами бигамильтоновой геометрии необходимо дополнительно определить специальные редукции данных тензоров, сохраняющие бигамильтонову структуру исходных уравнений движения. Эта задача является достаточно сложной и в данный момент решена только для волчка Лагранжа [27].

Благодарности. Автору приятно поблагодарить И. В. Комарова за многочисленные полезные обсуждения и интерес к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00140).

Список литературы

- [1] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **53** (1990), 35–81.
- [2] F. Magri, “Eight lectures on integrable systems”, *Integrability of nonlinear systems*, Proc. of the CIMPA school (Pondicherry, 1996), Lecture Notes in Phys., **495**, Springer, Berlin, 1997, 256–296.
- [3] I. M. Gelfand, I. Zakharevich, “On the local geometry of a bi-Hamiltonian structure”, *The Gelfand mathematical seminars*, 1990–1992, eds. L. Corwin et al., Birkhäuser, Boston, 1993, 51–112.
- [4] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*, ИКС, М.–Ижевск, 2005.
- [5] J. A. Schouten, “On the differential operators of first order in tensor calculus”, *Convegno internazionale di geometria differenziale* (Italia, 1953), Edizioni cremonese, Roma, 1954, 1–7.
- [6] A. Lichnerowicz, *J. Diff. Geom.*, **12** (1977), 253–300.
- [7] А. В. Болсинов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:1 (1991), 68–92.
- [8] А. В. Болсинов, А. В. Борисов, *Матем. заметки*, **72** (2002), 11–34.
- [9] A. P. Fordy, O. I. Mokhov, *Physica D*, **152–153** (2001), 475–490.
- [10] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*, Факториал, М.; Изд-во УдГУ, Ижевск, 1995.
- [11] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, *Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход*, РХД, М.–Ижевск, 2003.
- [12] A. Clebsch, *Math. Annal.*, **3** (1870), 238–262.
- [13] V. V. Sokolov, T. Wolf, *J. Phys. A*, **39** (2006), 1915–1926.
- [14] А. М. Ляпунов, *Сообщ. Харьк. матем. об-ва. Сер. 2*, **4** (1893), 81–85.
- [15] V. A. Steklov, *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Ser. 3*, **1** (1909), 145–256.
- [16] Г. В. Колосов, *Изв. РАН*, **13** (1919), 711–716.
- [17] A. V. Tsiganov, *Regul. Chaotic Dyn.*, **9**:2 (2004), 77–89.
- [18] F. Schottky, “Ueber das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimsionen”, *Sitzungsberichte drer Königlich preussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin*, **13**, 1891, 227–232.
- [19] А. И. Бобенко, *Функц. анализ и его прилож.*, **20** (1986), 64–66.
- [20] А. В. Цыганов, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **317** (2004), 200–212.
- [21] В. А. Стеклов, *О движении твердого тела в жидкости*, Изд-во Харьковского ун-та, Харьков, 1893.
- [22] H. Poincaré, *Bull. Astr.*, **27** (1910), 321–356.
- [23] В. Н. Рубановский, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, **23**:2 (1968), 99–106.
- [24] T. Ratiu, *Amer. J. Math.*, **104** (1982), 409–448.
- [25] I. D. Marshall, *Comm. Math. Phys.*, **191** (1998), 723–734.
- [26] I. V. Komarov, V. V. Sokolov, A. V. Tsiganov, *J. Phys. A*, **36** (2003), 8035–8048.
- [27] C. Morosi, G. Tondo, *J. Phys. A*, **35** (2002), 1741–1750.

Поступила в редакцию 03.07.2006,
после доработки 12.10.2006