Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Лезнов, Новый подход к теории представлений полупростых алгебр Ли и квантовых алгебр, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 2, 264–284

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf601>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:20:48

НОВЫЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ И КВАНТОВЫХ АЛГЕБР

Предложен метод явного построения генераторов простых корней в произвольном конечномерном представлении полупростой квантовой алгебры или алгебры Ли. Метод основан на общих результатах глобальной теории представлений полупростых групп. В качестве примеров рассмотрены алгебры ранга два A_2 , $B_2 = C_2$, D_2 и G_2 . Генераторы простых корней представлены как решения системы конечно-разностных уравнений и даются $(N_l \times N_l)$ -матрицами, где N_l – размерность представления.

1. ВВЕДЕНИЕ

Базисные векторы неприводимого конечномерного представления полупростой алгебры с весом $l = (l_1, l_2, \dots, l_r)$ обычно строятся с помощью многократного применения понижающих генераторов X_i^- к старшему вектору $|l\rangle$, обладающему свойствами

$$X_s^+ |l\rangle = 0, \quad h_s |l\rangle = l_s |l\rangle,$$

где $X_s^\pm$ – генераторы, соответствующие простым корням, а h_s – элементы Картана. Очевидная проблема, связанная с таким построением, заключается в том, что не все векторы состояния, появляющиеся таким образом, линейно независимы, и поэтому требуются дополнительная процедура исключения линейно зависимых компонент и дальнейшая ортогонализация базиса. Обычно сделать это не просто. Тем не менее значения, принимаемые групповым элементом $\exp \tau \equiv \exp \sum h_i \tau_i$ на базисных векторах, можно получить из инвариантной формулы Вейля для характеров неприводимого представления с весом $l = \sum h_i l_i$:

$$\pi^l(\exp \tau) = \frac{\sum_W \delta_W \exp(\tau W, l + \frac{1}{2}\rho)}{\sum_W \delta_W \exp(\tau W, \frac{1}{2}\rho)}. \quad (1.1)$$

Представив это выражение как сумму экспонент

$$\pi^l(\exp \tau) = \sum_{n^k}^{N_l} C_{n^k} \exp(\tau, n^k) = \sum_{n^k}^{N_l} C_{n^k} \exp \sum_i^r (\tau_i n_i^k), \quad (1.1')$$

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия; Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: leznov@ce.ifisicam.unam.mx

можно получить ответы на многие вопросы о структуре базиса соответствующего представления. В формуле (1.1) W – элемент дискретной группы Вейля, δ_W – его сигнатура, τ_W – результат действия W на τ , C_{n^k} – кратность соответствующей экспоненты, ρ – сумма положительных корней соответствующей алгебры.

Пусть K – матрица Картана рассматриваемой алгебры Ли и X_j^- – понижающие генераторы. Тогда имеет место соотношение

$$e^\tau (X_1^-)^{m_1} \dots (X_r^-)^{m_r} |l\rangle = e^{\sum \tau_i l_i} e^{-\sum_{p,s} m_p K_{p,s} \tau_s} (X_1^-)^{m_1} \dots (X_r^-)^{m_r} |l\rangle \quad (1.2)$$

(конечно, порядок понижающих операторов в этом выражении не важен). Приравнявая каждую экспоненту в формуле Вейля к соответствующей экспоненте в (1.2), мы легко находим индексы m_i . Единственное, чего нельзя сделать с помощью формулы Вейля, – это различить базисные векторы, появляющиеся из одинаковых наборов понижающих операторов, взятых в различном порядке. Однако число таких состояний определяется кратностью соответствующих экспонент в формуле для характера.

В этой работе приведенные выше замечания играют ключевую роль. Мы предлагаем альтернативный подход к явному построению генераторов простых корней. Вместо процедуры исключения линейно зависимых компонент и последующей ортогонализации нам требуется решить систему конечно-разностных уравнений, разрешимость которой гарантируется глобальной теорией представлений полупростых алгебр. В принципе эти условия можно найти независимо (как условия разрешимости такой системы с “фиксированной” границей), но можно и убедиться в их эквивалентности известным результатам глобальной теории представлений.

Вкратце мы предлагаем следующую программу. Начальные данные – это известные размерности и характеры неприводимых представлений полупростых групп, задаваемые знаменитой формулой Вейля [1]. Конечные данные – это явный вид генераторов простых корней как квантовых полупростых алгебр, так и полупростых алгебр Ли. Мы не делаем различия между базисами для квантовых полупростых алгебр и полупростых алгебр Ли и представляем в явной форме генераторы простых корней в виде $(N_l \times N_l)$ -матриц (N_l – размерность соответствующего представления, задаваемая формулой размерностей Вейля).

В разделе 2 мы переписываем определяющие квантовую алгебру соотношения в терминах только $2r$ генераторов вместо $3r$ генераторов, используемых в традиционном подходе. Эта конструкция конкретизируется в разделе 3 для алгебр ранга 2. В разделах 4, 5, 6 представлены детальные вычисления для алгебр A_2 , $B_2 = C_2$ и G_2 . В разделе 7 содержатся заключительные замечания и обсуждаются перспективы дальнейших исследований.

Ниже мы не собираемся строить теорию квантовых алгебр каким-то новым способом. Мы только используем многие результаты стандартной теории с целью получить явный вид генераторов простых корней в данном конечномерном представлении. Мы выбираем только те факты, которые важны для нашей цели. По этой причине не упоминаются соотношения Серра (в связи с уравнениями (2.1) (см. ниже) важные для определения явного вида матриц Картана), а непосредственно рассматриваем (2.1) как коммутационные соотношения для данной полупростой серии (с данной матрицей Картана), которые

мы хотим разрешить. Будем считать известным, что базис конечномерного неприводимого представления в квантовом случае можно выбрать таким же, как и в полупростой алгебре Ли. В этом базисе генераторы можно выбрать так, что они будут удовлетворять дополнительным условиям $X_i^+ = (X_i^-)^T$, $h_i = (h_i)^T$ с диагональными h_i . В этом базисе операторы $Q = \exp(h_1 + ph_2)$ также диагональны, а из соотношений (3.6) (см. ниже) следуют обычные правила отбора для ненулевых матричных элементов матриц s^1 и s^2 .

2. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КВАНТОВЫХ АЛГЕБР

В обычной форме $3r^2$ коммутационных соотношений между $3r$ генераторами квантовой алгебры (генераторами $X_i^\pm$, соответствующими простым корням, и элементами Картана h_i) имеют вид

$$[h_i, X_j^\pm] = \pm K_{j,i} X_j^\pm, \quad [X_i^+, X_j^-] = \delta_{j,i} \frac{\text{sh}(tw_i h_i)}{\text{sh}(tw_i)}, \quad (2.1)$$

где K – матрица Картана, $K_{j,i} w_i = w_j K_{j,i} \equiv \tilde{K}_{j,i}$, t – параметр деформации. Матрицы Картана серий A_n , D_n и $E_{6,7,8}$ являются априори симметричными, при этом $\tilde{K}_{i,j} = K_{i,j}$, а $w_i = 1$.

Введем множество $3r$ генераторов, альтернативное (2.1):

$$T_i^\pm = e^{\frac{tw_i h_i}{4}} X_i^\pm e^{\frac{tw_i h_i}{4}}, \quad R_i = e^{tw_i h_i}.$$

В терминах этих генераторов искомые соотношения, определяющие квантовую алгебру (2.1), можно переписать в виде

$$R_i T_j^\pm = e^{\pm \tilde{K}_{j,i} t} T_j^\pm R_i, \quad e^{\frac{\tilde{K}_{j,i} t}{2}} T_i^+ T_j^- - e^{\frac{-\tilde{K}_{j,i} t}{2}} T_j^- T_i^+ = \delta_{i,j} \frac{R_i^2 - 1}{2 \text{sh}(tw_i)}. \quad (2.2)$$

Вводя $2r$ генераторов

$$Q_i^\pm = T_i^\pm \pm \frac{R_i}{2 \text{sh}(tw_i)},$$

перепишем систему (2.2) в виде

$$\begin{aligned} e^{tw_i} Q_i^+ Q_i^- - e^{-tw_i} Q_i^- Q_i^+ &= -\frac{1}{2 \text{sh}(tw_i)}, \\ e^{\frac{\tilde{K}_{j,i} t}{2}} (Q_i^+ Q_j^- - Q_j^+ Q_i^-) - e^{\frac{-\tilde{K}_{j,i} t}{2}} (Q_j^- Q_i^+ - Q_i^- Q_j^+) &= 0, \quad \tilde{K}_{i,j} \neq 0, \\ [Q_i^+, Q_j^-] &= [Q_j^+, Q_i^-] = 0, \quad \tilde{K}_{i,j} = 0, \\ e^{\frac{\tilde{K}_{j,i} t}{2}} (Q_i^+ Q_j^- + Q_j^+ Q_i^-) - e^{\frac{-\tilde{K}_{j,i} t}{2}} (Q_j^- Q_i^+ + Q_i^- Q_j^+) &= \\ &= -\frac{\text{sh}\left(\frac{\tilde{K}_{j,i} t}{2}\right)}{\text{sh}(tw_i) \text{sh}(tw_j)} R_i R_j, \quad \tilde{K}_{i,j} \neq 0, \quad i \neq j, \\ R_i Q_j^\pm &= e^{\pm \tilde{K}_{j,i} t} Q_j^\pm R_i \mp (e^{\pm \tilde{K}_{j,i} t} - 1) \frac{R_j R_i}{2 \text{sh}(tw_j)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Заметим, что первые три строки связывают генераторы $Q_i^\pm$ между собой. Следовательно, можно рассматривать эти соотношения как относящиеся к некоторой подалгебре универсальной обертывающей алгебры (2.1)¹⁾.

Покажем, что, как прямо следует из уравнений (2.3), все генераторы R_i можно алгебраически выразить через генераторы $Q_s^\pm$ (при таких действиях возникает только оператор Q_{ij}^{-1} , обратный к оператору $Q_{ij} = \exp(w_i h_i + w_j h_j)$, который обратим в каждом конечномерном неприводимом представлении). Для этой цели умножим уравнение из последней строки формулы (2.3) (заменив индексы $i \rightarrow j$) на R_i слева. Получим

$$\begin{aligned} R_i R_j Q_i^\pm &= e^{\pm \tilde{K}_{i,j} t} R_i Q_i^\pm R_j \mp (e^{\pm \tilde{K}_{ij} t} - 1) \frac{R_i^2 R_j}{2 \operatorname{sh}(t w_i)} = \\ &= e^{\pm (\tilde{K}_{ii} + \tilde{K}_{i,j} t)} Q_i^\pm R_i R_j \mp (e^{\pm (\tilde{K}_{ii} + \tilde{K}_{ij} t)} - 1) \frac{R_i R_j R_i}{2 \operatorname{sh}(t w_i)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вводя оператор

$$Q_{i,j} \equiv e^{\frac{\tilde{K}_{ij} t}{2}} (Q_i^+ Q_j^- + Q_j^+ Q_i^-) - e^{-\frac{\tilde{K}_{ij} t}{2}} (Q_j^- Q_i^+ + Q_i^- Q_j^+) = Q_{j,i},$$

который в силу (2.3) пропорционален $R_i R_j$, мы можем переписать соотношение (2.4) в виде

$$Q_{ij} Q_i^\pm Q_{ij}^{-1} = e^{\pm (\tilde{K}_{ii} + \tilde{K}_{ij} t)} Q_i^\pm \mp (e^{\pm (\tilde{K}_{ii} + \tilde{K}_{ij} t)} - 1) \frac{R_i}{2 \operatorname{sh}(t w_i)}. \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.5) можно заключить, что при $\tilde{K}_{ii} + \tilde{K}_{ij} \neq 0$ приведенное выше утверждение верно и генератор R_i можно алгебраически выразить через генераторы $Q^\pm$. Если $\tilde{K}_{ii} + \tilde{K}_{ij} = 0$, то, несомненно, $\tilde{K}_{jj} + \tilde{K}_{ij} \neq 0$ и генератор R_j можно выразить в терминах Q -генераторов. Тогда R_i можно найти из уравнения, связывающего $Q_{i,j}$ с произведением $R_i R_j$. Таким образом, приведенное выше утверждение верно во всех случаях.

В следующем разделе внимание будет сосредоточено на случае ранга два. Случай ранга один хорошо известен, и мы только приведем основные относящиеся к нему факты для последующего использования. Неприводимые представления алгебры A_1^q нумеруются натуральным или полунатуральным числом l , при этом размерность представления равна $2l + 1$. Собственные значения генератора H равны всем нечетным или четным числам между $2l$ и $-2l$; $H_k = 2l - 2k \equiv 2m$, $0 \leq k \leq 2l$. Ненулевые матричные элементы генераторов $X^\pm$ имеют вид

$$X_{m,m\pm 1}^\pm = \left(\frac{\operatorname{sh}[(l \mp m)t]}{\operatorname{sh} t} \frac{\operatorname{sh}[(l \pm m + 1)t]}{\operatorname{sh} t} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $m = l - k$ и выполнено условие $X^+ = (X^-)^T$. Генераторы $Q^\pm$ имеют диагональные элементы

$$Q_{m,m}^\pm = \frac{e^{\pm 2(l-k)t}}{2 \operatorname{sh} t}$$

¹⁾ Для алгебры A_1^q два генератора $Q^\pm$ удовлетворяют одному соотношению $e^t Q^+ Q^- - e^{-t} \times Q^- Q^+ = -(2 \operatorname{sh} t)^{-1}$, которое можно рассматривать как некоторую квантовую алгебру со своей собственной теорией представлений.

и ненулевые недиагональные элементы

$$Q_{m,m\pm 1}^{\pm} = e^{(m\pm\frac{1}{2})t} \left(\frac{\operatorname{sh}[(l\mp m)t]}{\operatorname{sh} t} \frac{\operatorname{sh}[(l\pm m+1)t]}{\operatorname{sh} t} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. АЛГЕБРЫ РАНГА ДВА

В этом разделе мы ограничимся только двумя значениями индексов $i = 1, 2$ в общей системе (2.3) или алгебрами ранга два A_2 , $B_2 = C_2$ и G_2 . Симметричная матрица Картана для этих алгебр имеет вид

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 2 & -p \\ -p & 2p \end{pmatrix}, \quad w_1 = 1, \quad w_2 = p,$$

где $p = 1, 2, 3$ для A_2 , B_2 , G_2 соответственно. Введем обозначения

$$Q_1^{\pm} = \frac{s^1 \pm r^1}{2 \operatorname{sh} t}, \quad Q_2^{\pm} = \frac{s^2 \pm r^2}{2 \operatorname{sh}(pt)}.$$

Первые две строки в системе (2.3) принимают вид

$$\begin{aligned} [s^1, r^1] &= \operatorname{th} t ((s^1)^2 - (r^1)^2 + 1), \\ [s^2, r^2] &= \operatorname{th}(pt) ((s^2)^2 - (r^2)^2 + 1), \\ [s^1, s^2] - [r^1, r^2] &= \operatorname{th}\left(\frac{pt}{2}\right) (\{r^1, s^2\} - \{s^1, r^2\}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\{, \}$ – антикоммутатор.

Оператор $Q_{1,2} \equiv Q$ задается формулой (мы используем перенормированный вариант общего определения из предыдущего раздела)

$$Q = \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(pt)}{\operatorname{sh}(\frac{pt}{2})} (e^{\frac{-pt}{2}} (Q_1^+ Q_2^- + Q_2^+ Q_1^-) - e^{\frac{pt}{2}} (Q_1^- Q_2^+ + Q_2^- Q_1^+)) = R_1 R_2. \quad (3.2)$$

Операторы R_1 и R_2 выражаются через операторы Q , $Q_1^{\pm}$, $Q_2^{\pm}$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} Q Q_1^{\pm} Q^{-1} &= e^{\mp(p-2)t} Q_1^{\pm} \mp (e^{\mp(p-2)t} - 1) \frac{R_1}{2 \operatorname{sh} t}, \\ Q Q_2^{\pm} Q^{-1} &= e^{\pm pt} Q_2^{\pm} \mp (e^{\pm pt} - 1) \frac{R_2}{\operatorname{sh}(pt)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В терминах s^1 , s^2 и r^1 , r^2 эти соотношения можно переписать в более подходящем для наших целей виде

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}[(p-2)t] R_1 &= \operatorname{sh}[(p-2)t] r^1 + Q s^1 Q^{-1} - \operatorname{ch}[(p-2)t] s^1, \\ -\operatorname{sh}(pt) R_2 &= -\operatorname{sh}(pt) r^2 + Q s^2 Q^{-1} - \operatorname{ch}(pt) s^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Заметим, что для алгебры $B_2 = C_2$ ($p = 2$) оператор R_1 нельзя определить из соотношений (3.3). Однако корректно определен оператор R_2 , после чего оператор R_1 можно алгебраически выразить из уравнения для Q . Исключая R_1 и R_2 из четырех уравнений (3.3), получаем

$$\begin{aligned} Q \left(e^{\frac{(p-2)t}{2}} Q_1^+ - e^{-\frac{(p-2)t}{2}} Q_1^- \right) Q^{-1} &= \frac{(p-2)t}{2} Q_1^+ - e^{\frac{(p-2)t}{2}} Q_1^-, \\ Q \left(e^{-\frac{pt}{2}} Q_2^+ - e^{\frac{pt}{2}} Q_2^- \right) Q^{-1} &= e^{\frac{pt}{2}} Q_2^+ - e^{-\frac{pt}{2}} Q_2^-. \end{aligned}$$

Эти уравнения эквивалентны уравнениям

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \left[\frac{(p-2)t}{2} \right] (r^1 - Q r^1 Q^{-1}) &= \operatorname{sh} \left[\frac{(p-2)t}{2} \right] (s^1 + Q s^1 Q^{-1}), \\ \operatorname{ch} \left(\frac{pt}{2} \right) (r^2 - Q r^2 Q^{-1}) &= -\operatorname{sh} \left(\frac{pt}{2} \right) (s^2 + Q s^2 Q^{-1}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Прямое следствие уравнений (2.3) является взаимная коммутативность операторов R_1 , R_2 и Q . Отсюда следуют соотношения

$$Q s^1 Q^{-1} + Q^{-1} s^1 Q = 2 \operatorname{ch}[(p-2)t] s^1, \quad Q s^2 Q^{-1} + Q^{-1} s^2 Q = 2 \operatorname{ch}(pt) s^2, \quad (3.6)$$

из которых вытекает, что в представлениях с диагональным Q -оператором матричные элементы генераторов матриц s^1 и s^2 удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} - e^{(p-2)t} - e^{-(p-2)t} \right) s_{i,j}^1 = 0, \quad \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} - e^{pt} - e^{-pt} \right) s_{i,j}^2 = 0, \quad (3.7)$$

где λ_i – собственные значения матрицы Q . Другими словами, матричные элементы $s_{i,j}^1$ отличны от нуля только в случае, если $\lambda_i/\lambda_j = e^{\pm(p-2)t}$, и аналогично матричные элементы $s_{i,j}^2$ отличны от нуля, если $\lambda_i/\lambda_j = e^{\pm pt}$. В последующих разделах мы конкретизируем эти соотношения для трех отдельных случаев алгебр A_2 , $B_2 = C_2$ и G_2 .

4. АЛГЕБРА A_2

Рассматривается базис с диагональным Q -генератором. Из уравнения (3.7) (при $p = 1$) получаем, что $\lambda_i/\lambda_{i+1} = e^t$ (учитывая неприводимость матриц s^1 и r^1). Однако ничего нельзя сказать по поводу кратности каждого λ_i . Будем полагать ее произвольной и равной N_i . Из уравнения (3.6) следует, что генераторы матриц s^1 и s^2 имеют блочную структуру

$$s^1 = (\dots \ a_{i,i-1} \ 0 \ a_{i,i+1} \ \dots), \quad s^2 = (\dots \ b_{i,i-1} \ 0 \ b_{i,i+1} \ \dots),$$

где $a_{i,i-1}$ и $b_{i,i-1}$ – прямоугольные матрицы размером $N_{i-1} \times N_i$, а $a_{i,i+1}$, $b_{i,i+1}$ – прямоугольные матрицы размером $N_i \times N_{i+1}$ (нуль в центре – это нулевая $(N_i \times N_i)$ -матрица). Из уравнений (3.5) (при $p = 1$) можно получить блочную структуру матриц r^1 и r^2 :

$$r^1 = (\dots \ -a_{i,i-1} \ \alpha_i \ a_{i,i+1} \ \dots), \quad r^2 = (\dots \ -b_{i,i-1} \ \beta_i \ b_{i,i+1} \ \dots),$$

где α_i и $\beta_i - (N_i \times N_i)$ -матрицы. Система уравнений, которым удовлетворяют матрицы a , b , α , β , возникает после подстановки анзацев для s и r в уравнения (3.1) и (3.2). Уравнение, связывающее s^1 и r^1 , эквивалентно матричной системе

$$\begin{aligned} e^{-t} a_{n,n-1} \alpha_{n-1} &= e^t \alpha_n a_{n,n-1}, & e^t a_{n,n+1} \alpha_{n+1} &= e^{-t} \alpha_n a_{n,n+1}, \\ 2e^{-t} a_{n,n-1} a_{n-1,n} - 2e^t a_{n,n+1} a_{n+1,n} &= \operatorname{sh} t (I_n - \alpha_n^2). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Аналогичные рассуждения для s^2 и r^2 приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} e^{-t} b_{n,n-1} \beta_{n-1} &= e^t \beta_n b_{n,n-1}, & e^t b_{n,n+1} \beta_{n+1} &= e^{-t} \beta_n b_{n,n+1}, \\ 2e^{-t} b_{n,n-1} b_{n-1,n} - 2e^t b_{n,n+1} b_{n+1,n} &= \operatorname{sh} t (I_n - \beta_n^2), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где I_n обозначает единичную $(N_n \times N_n)$ -матрицу. Из последнего из уравнений (3.1) и определения Q (3.2) следует система

$$\begin{aligned} e^{\frac{t}{2}} b_{n,n-1} \alpha_{n-1} &= e^{-\frac{t}{2}} \alpha_n b_{n,n-1}, & e^{-\frac{t}{2}} a_{n,n+1} \beta_{n+1} &= e^{\frac{t}{2}} \beta_n a_{n,n+1}, \\ e^{\frac{t}{2}} a_{n,n-1} \beta_{n-1} &= e^{-\frac{t}{2}} \beta_n a_{n,n-1}, & e^{-\frac{t}{2}} b_{n,n+1} \beta_{n+1} &= e^{\frac{t}{2}} \alpha_n b_{n,n+1}, \\ 2e^{-\frac{t}{2}} \left(\frac{\alpha_n \beta_n}{4} + b_{n,n+1} a_{n+1,n} \right) - 2e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{\beta_n \alpha_n}{4} + a_{n,n-1} b_{n-1,n} \right) &= \operatorname{sh} \frac{t}{2} \lambda_n I_n. \end{aligned} \quad (4.3)$$

С первого взгляда система (4.1)–(4.3) производит впечатление настолько сложной, что кажется, что все попытки ее решить имеют мало шансов на успех. Однако, как мы покажем ниже, это не так. Прежде всего подставим анзац для s^1 , r^1 , s^2 и r^2 в уравнение (3.4) (при $p = 1$). Прямые вычисления показывают, что R_1 и R_2 представляют собой блочно-диагональные матрицы с блочными матрицами α_n и β_n соответственно. Более того, из взаимной коммутативности R_1 и R_2 следует, что $[\alpha_n, \beta_n] = 0$. Уравнение (3.2), связывающее Q с R_1 и R_2 , можно переписать в виде $\lambda_n I_n = \alpha_n \beta_n$. Принимая все это во внимание, исключим матрицы β_n из системы (4.1)–(4.3) и перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} e^{-t} a_{n,n-1} \alpha_{n-1} &= e^t \alpha_n a_{n,n-1}, & e^t a_{n,n+1} \alpha_{n+1} &= e^{-t} \alpha_n a_{n,n+1}, \\ e^{\frac{t}{2}} b_{n,n-1} \alpha_{n-1} &= e^{-\frac{t}{2}} \alpha_n b_{n,n-1}, & e^{-\frac{t}{2}} b_{n,n+1} \alpha_{n+1} &= e^{\frac{t}{2}} \alpha_n b_{n,n+1}, \\ 2e^{-t} a_{n,n-1} a_{n-1,n} - 2e^t a_{n,n+1} a_{n+1,n} &= \operatorname{sh} t (I_n - \alpha_n^2), \\ 2e^{-t} b_{n,n-1} b_{n-1,n} - 2e^t b_{n,n+1} b_{n+1,n} &= \operatorname{sh} t (I_n - \lambda_n^2 \alpha_n^{-2}), \\ e^{-\frac{t}{2}} b_{n,n+1} a_{n+1,n} - e^{\frac{t}{2}} a_{n,n-1} b_{n-1,n} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Как было отмечено выше, матрица α_n коммутирует с β_n , так что обе они могут быть одновременно приведены к диагональному виду. Диагональные элементы матриц α_n и β_n обозначим двойными индексами α_n^s , β_n^s , $1 \leq s \leq N_n$. Очевидно, что $\alpha_n^s \beta_n^s = \lambda_n$.

Система (4.4) в представленном виде неограничена, и для ее решения необходимы некоторые дополнительные “граничные” условия. Чтобы получить решение в виде конечномерных матриц, примем, что на “левом конце” $a_{1,0} = b_{1,0} = 0$, а на “правом конце”

$a_{N,N+1} = b_{N,N+1} = 0$. Числа N_n и диагональные элементы λ_n, α_n^s должны быть найдены из условия разрешимости системы (4.4) при этих граничных условиях. Мы будем использовать известные результаты глобальной теории представлений алгебры A_2 , для того чтобы явно решить систему (4.4) и, таким образом, получить явный вид генераторов простых корней для неприводимых представлений (p, q) алгебры A_2 .

Как было упомянуто во введении, базисные векторы неприводимого представления полупростых алгебр строятся из одного старшего вектора путем действия понижающих операторов. Из определения старшего вектора следует, что $\lambda_1 = e^{(p+q)t}$, $\alpha_1^1 = e^{pt}$ и $N_1 = 1$. Напомним, что $\alpha = \exp(h_1 t)$ и $\lambda = \exp[(h_1 + h_2)t]$. Рассмотрим базисные векторы, возникающие после действия генераторов матриц X_1^- и X_2^- на старший вектор. Очевидно, что

$$N_2 = 2, \quad q \neq 0, \quad \lambda_2 = e^{(p+q-1)t}, \quad \alpha_2^1 = e^{(p-2)t}, \quad \alpha_2^2 = e^{(p+1)t}.$$

Временно оставим в стороне задачу о линейно независимых компонентах. Тогда на каждом шаге после применения двух генераторов матриц X_1^- и X_2^- к каждому базисному вектору, полученному на предыдущем шаге, число базисных векторов удваивается по сравнению с предыдущим шагом, и становятся очевидными соотношения

$$N_s = 2^{s-1}, \quad \lambda_s = e^{(p+q-s+1)t}, \quad \alpha_s^k = e^{(p-2(s-1)+3k)t}, \quad (C_{s-1}^k), \quad 0 \leq k \leq (s-1).$$

Кратности C_r^k представляют собой биномиальные коэффициенты.

Характер неприводимого представления (p, q) алгебры A_2 дается формулой Вейля

$$\pi^{(p,q)}(\exp(\tau_1 h_1 + \tau_2 h_2)) = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} e^{\tau_1 l_1} & e^{\tau_1 l_2} & e^{\tau_1 l_3} \\ e^{(\tau_2 - \tau_1) l_1} & e^{(\tau_2 - \tau_1) l_2} & e^{(\tau_2 - \tau_1) l_3} \\ e^{-\tau_2 l_1} & e^{-\tau_2 l_2} & e^{-\tau_2 l_3} \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} e^{\tau_1} & 1 & e^{-\tau_1} \\ e^{(\tau_2 - \tau_1)} & 1 & e^{-(\tau_2 - \tau_1)} \\ e^{-\tau_2} & 1 & e^{\tau_2} \end{pmatrix}}, \quad (4.5)$$

где $l_1 - l_2 = p + 1$, $l_2 - l_3 = q + 1$, $l_1 + l_2 + l_3 = 0$. Вычисление определителей приводит к формуле

$$\pi^{(p,q)} = \frac{1}{1 - e^{-(\tau_2 + \tau_1)}} [e^{(\tau_2 - \tau_1)(p+q)} (e^{px} + \dots + 1)(e^{qy} + \dots + 1) - e^{-\tau_1(q+1)} e^{-\tau_2(p+1)} (e^{qx} + \dots + 1)(e^{py} + \dots + 1)], \quad (4.6)$$

где $x = 2\tau_1 - \tau_2$, $y = 2\tau_2 - \tau_1$, $x + y = \tau_2 + \tau_1$. Очевидно, что при условиях $\tau_2 + \tau_1 = 0$, $x + y = 0$ последнее выражение переходит в сумму экспонент, аргументы которых представляют собой различные линейные комбинации τ с определенными коэффициентами.

Редукция формулы (4.5) или (4.6) к подгруппам A_1 с инфинитезимальными генераторами $X^+ = [X_1^+, X_2^+]$, $X^- = [X_1^-, X_2^-]$, $H = h_1 + h_2$ эквивалентна подстановке $\tau_1 = \tau_2 = t$, что приводит к окончательному результату

$$\begin{aligned} \pi^{(p,q)}(\exp(h_1 + h_2)t) &= e^{-(p+q)t} \frac{\sum_{k=0}^{p+q+1} e^{(p+q+1-k)t} \sum_{r=0}^q e^{(q-r)t} \sum_{s=0}^p e^{(p-s)t}}{(e^t + 1)} = \\ &= \sum_{m=0}^{2(p+q)} e^{(p+q-m)t} c_m(p, q). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Редукция к подгруппам A_1 , соответствующим генераторам матриц $X_1^\pm$, $X_2^\pm$ первого и второго простых корней и генераторам матриц h_1 и h_2 , приводит к таким же выражениям. Этот результат является очевидным и без всяких вычислений, поскольку элементы Картана всех корней алгебры A_2 связаны дискретными преобразованиями Вейля. До общего рассмотрения мы приведем конкретный пример $(2, 1)$ -представления алгебры A_2 . Этот пример отражает основные моменты всего построения.

4.1. $(2, 1)$ -представление алгебры A_2 . Прямое вычисление характера $(2, 1)$ -представления приводит (в соответствии с уравнением (4.6)) к сумме экспонент, которые мы записываем в определенном порядке, смысл которого скоро станет ясен:

$$\begin{aligned} \pi^{(2,1)}(\tau) &= e^{(2\tau_1+\tau_2)} + e^{2\tau_2} + e^{(3\tau_1-\tau_2)} + e^{(-2\tau_1+3\tau_2)} + 2e^{\tau_1} + 2e^{(-\tau_1+\tau_2)} + e^{(2\tau_1-2\tau_2)} + \\ &+ e^{-(3\tau_1-2\tau_2)} + 2e^{-\tau_2} + e^{-2\tau_1} + e^{(\tau_1-3\tau_2)} + e^{-(\tau_1+2\tau_2)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим редукцию этого выражения к $SL(2, R)$ -подгруппе, связанной с составным корнем алгебры A_2 . Записывая $\tau_1 = \tau_2 = t$, получаем

$$\pi = e^{3t} + 2e^{2t} + 3e^t + 3 + 3e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t}.$$

Поскольку генератор $h_1 + h_2$ принимает равные единице значения на каждом из простых корней алгебры A_2 , состояния старших (младших) векторов являются синглетными, а подпространства с двумя или пятью понижающими операторами – двумерными и т. д. Значения, принимаемые оператором $R_1 R_2 \equiv \exp[(h_1 + h_2)t]$ на базисных векторах $(2, 1)$ -представления, в точности являются экспонентами из записанной выше суммы. Используя те же аргументы, мы находим значения, принимаемые генераторами R_1 и R_2 на этом базисе. Представим их в виде строк, придерживаясь необходимого порядка,

$$\begin{aligned} R_1 &= (e^{2t}, 1, e^{3t}, e^{-2t}, e^t, e^t, e^{-t}, e^{-t}, e^{2t}, e^{-3t}, 1, 1, e^{-2t}, e^t, e^{-t}), \\ R_2 &= (e^t, e^{2t}, e^{-t}, e^{3t}, 1, 1, e^t, e^t, e^{-2t}, e^{2t}, e^{-t}, e^{-t}, 1, e^{-3t}, e^{-2t}). \end{aligned}$$

Данное представление определяет размеры матриц α и β и явные выражения для них в диагональном виде. Матрицы α_i имеют следующий явный вид (скобки обозначают диагональные элементы):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e^{2t}, & \alpha_2 &= (1, e^{3t}), & \alpha_3 &= (e^{-2t}e^t, e^t), & \alpha_4 &= (e^{-t}, e^{-t}, e^{2t}), \\ \alpha_5 &= (e^{-3t}, 1, 1), & \alpha_6 &= (e^{-2t}, e^t), & \alpha_7 &= e^{-t}. \end{aligned}$$

Знание явных выражений для матриц α позволяет без труда разрешить первую строчку системы (3.5) и представить матрицу r^1 в виде

$$r^1 = \begin{pmatrix} e^{2t} & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -X & 1 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 & B & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 & e^{-2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 & e^t & 0 & D & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C & 0 & 0 & e^t & F & G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D & -F & e^{-t} & 0 & 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E & -G & 0 & e^{-t} & 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 0 & L & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H & -K & 0 & e^{-3t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L & 0 & 1 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M & 0 & 0 & 1 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N & -P & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^t & Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Матрица s^1 получается из r^1 путем удаления диагональных элементов и такого изменения оставшейся матрицы, чтобы она стала симметричной, а не антисимметричной. Здесь мы предполагаем, что s^1 можно выбрать в виде симметричной матрицы. По тем же причинам r^2 имеет вид

$$r^2 = \begin{pmatrix} e^t & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 & n & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & e^{-t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} & 0 & 0 & h & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & l & l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h & 0 & 0 & e^t & 0 & 0 & 0 & d & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 & 0 & e^t & 0 & 0 & e & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l & -m & 0 & 0 & e^{-2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & -e & 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -f & -g & 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & -c & 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Пока мы решили первые две строки уравнений системы (4.4). Теперь можно решить систему (4.4) в целом. Из первых строк второй части уравнений (4.4) получается (при $a_{1,0} = b_{1,0} = 0$)

$$X^2 = e^t \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t), \quad y^2 = \operatorname{sh}^2 t.$$

Решение двух следующих строк имеет вид

$$\begin{aligned} A^2 &= e^{-t} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t), & B^2 + C^2 &= e^{2t} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(3t), \\ nB + pC &= e^t yX, & n^2 + p^2 &= e^t \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t). \end{aligned}$$

Эти уравнения определяют два двумерных вектора с заданным углом между ними:

$$\begin{aligned}(B, C) &= e^t (\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(3t))^{\frac{1}{2}} t (\cos \phi_1, \sin \phi_1), \\ (n, p) &= e^{\frac{t}{2}} (\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t))^{\frac{1}{2}} (\cos \phi_2, \sin \phi_2), \\ \cos(\phi_1 - \phi_2) &= \left(\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh}(3t)} \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ниже будет использована калибровка $\phi_2 = 0$ ($p = 0$) (однако такой выбор калибровки абсолютно несуществен). На третьем шаге система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}DF + EG &= e^{-2t} BC = \operatorname{sh}^2 t (2 \operatorname{ch}(2t))^{\frac{1}{2}}, \\ D^2 + E^2 &= e^{-2t} B^2 + \operatorname{sh}^2 t = 2 \operatorname{sh}^2 t, \\ F^2 + G^2 &= e^{-2t} C^2 + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(3t), \\ l^2 &= e^{-2t} n^2, \quad m^2 = e^{-2t} p^2 = 0, \quad ml = e^{-2t} np = 0, \\ h^2 + k^2 &= e^{2t} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(3t), \quad m = 0, \\ Dh + Ek &= e^t An = e^t \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t), \quad Fh + Gk = e^t Ap = 0.\end{aligned}$$

Очевидно, что матрицы s^1, s^2 и r^1, r^2 инвариантны относительно двумерных вращений в плоскостях (5,6), (7,8) и (11,12) (в результате чего оказалось возможным выбрать $p = 0$ на втором шаге вычислений с помощью поворотов в плоскости (5,6)). Теперь мы можем использовать эту инвариантность, выбирая в уравнениях на четвертом шаге $E = 0$. Тогда все приведенные выше уравнения легко решаются. В результате получаем

$$\begin{aligned}D &= \pm(2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} t, \quad F = \pm \operatorname{sh} t (\operatorname{ch}(2t))^{\frac{1}{2}}, \quad G^2 = \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2(2t), \\ l^2 &= e^{-t} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t), \quad m = 0, \quad h = \pm(2)^{-\frac{1}{2}} e^t \operatorname{sh}(2t), \quad k = \pm e^t \operatorname{sh} t (\operatorname{ch}(2t))^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

На пятом шаге используем в полученных уравнениях (11,12)-инвариантность, чтобы фиксировать $M = 0$. Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned}HK &= e^{-2t} FG = \pm 2^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t) (\operatorname{ch}(2t))^{\frac{1}{2}}, \\ H^2 &= e^{-2t} (D^2 + F^2 - \operatorname{sh}^2 t) = \frac{1}{2} e^{-2t} \operatorname{sh}^2(2t), \\ K^2 &= e^{-2t} (G^2 - \operatorname{sh}^2 t) = e^{-2t} \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}(2t), \\ L^2 &= e^2 \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t), \quad 2tdL + fM = e^t (Dl + Fm), \\ eL + gM &= e^t (El + Gm), \quad d = D, \quad e = E = 0, \\ e^2 + g^2 &= e^{-2t} k^2 + \operatorname{sh}^2 t = \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2(2t), \\ de + fg &= e^{-2t} hk = 2^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t) (\operatorname{ch}(2t))^{\frac{1}{2}}, \\ d^2 + f^2 &= e^{-2t} h^2 + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{sh}^2 t (\operatorname{ch}(2t) + 2), \quad l^2 = e^{-t} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t).\end{aligned}$$

Решение этой системы элементарно. Приведем окончательный результат:

$$d = D, \quad e = E = 0, \quad f = F, \quad g = G.$$

Явный вид H и K дан выше. Мы не будем воспроизводить здесь два оставшихся шага вычислений, потому что они просты и не содержат ничего нового.

Отметим, что на каждом последующем шаге мы всегда имеем систему квадратных уравнений только для неизвестных матричных элементов матриц $a_{n+1,n}$, $a_{n,n+1}$, $b_{n+1,n}$ и $b_{n,n+1}$, правая часть которых была получена на предыдущем шаге. Вследствие условий инвариантности число уравнений точно равно числу неизвестных переменных. Самосогласованность всей конструкции есть только следствие глобальной теории представлений.

4.2. Общий случай (p, q) -представления. Чтобы обобщить результаты раздела 4.1 на случай произвольного (p, q) -представления алгебры A_2 , необходима более подробная информация о структуре матриц $a_{n,n\pm 1}$ и $b_{n,n\pm 1}$. Первые две строки системы (4.4) накладывают на них дополнительные ограничения. А именно отличными от нуля являются только те матричные элементы $(a_{n,n\pm 1})_{s,s'}$ и $(b_{n,n\pm 1})_{s,s'}$, для которых (s, s') удовлетворяют условиям

$$\frac{\alpha_n^s}{\alpha_{n\pm 1}^{s'}} = e^{\pm 2t}, \quad \frac{\beta_n^s}{\beta_{n\pm 1}^{s'}} = e^{\pm 2t}.$$

В свою очередь, диагональные элементы матриц α и β связаны соотношениями

$$\frac{\alpha_n^s}{\alpha_{n+1}^{s+1}} = e^{-3t}, \quad \frac{\beta_n^s}{\beta_{n+1}^{s+1}} = e^{3t}.$$

Обозначим кратности диагональных элементов α_n^s и β_n^s через N_n^s . Очевидно, что $N_n = \sum_s N_n^s$. Кратность N_n^s в точности равна целому числу в соответствующей экспоненте в формуле Вейля для характеров (1.1'). После редукции к A_1 -подгруппе, определяемой первым (вторым) простым корнем, она в точности равна коэффициенту при α_n^s (соответственно β_n^s).

Каждая матрица $a_{n,n+1}$ (для определенности выберем знак плюс) разбивается на прямоугольные блочные $(N_n^s \times N_{n+1}^{s'})$ -матрицы $a_{n,n+1}^{s,s'}$, где (s, s') — индексы диагональных матричных элементов α_n^s и $\alpha_{n+1}^{s'}$ соответственно. Отличны от нуля только те блочные матрицы, для которых $\alpha_n^s / \alpha_{n+1}^{s'} = e^{\pm 2t}$. Это обстоятельство имеет два важных следствия. Во-первых, в строке (с “широким” N_n^s) и в столбце (с “широким” $N_{n+1}^{s'}$) может быть только одна отличная от нуля блочная матрица. Во-вторых, все матрицы $a_{n,n+1}^{s\pm k, s'\pm k}$ с индексами, сдвинутыми на целое положительное число k , отличны от нуля одновременно с $a_{n,n+1}^{s,s'}$ (конечно, при условии, что индексы $s \pm k$, $s' \pm k$ находятся внутри области их определения).

Из явного вида анзаца для генераторов s^1, s^2 и r^1, r^2 в начале данного раздела следует их форм-инвариантность при всех не меняющих диагональные матричные элементы канонических $SL(N_n^s, R)$ -преобразованиях, изменяющих матрицы a по закону

$$a \rightarrow G(N_n^s, R)aG(N_{n+1}^{s'}, R).$$

Если мы хотим сохранить симметрию матриц s^1 и s^2 (до настоящего момента мы считали их симметричными), необходимо редуцировать это преобразование до прямого произведения ортогональных $O_{N_n^s}$ -преобразований. Поскольку к матрицам b применимы те же соображения, мы можем переписать остающиеся уравнения системы (4.4) (три последние строки) в терминах только “примитивных” блочных матриц:

$$\begin{aligned} e^{-t} a_{n,n-1}^{s,s+2} a_{n-1,n}^{s+2,s} - e^t a_{n,n+1}^{s,s-2} a_{n+1,n}^{s-2,s} &= \alpha_n^s \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(\ln \alpha_n^s) I_{N_n^s}, \\ e^{-\frac{t}{2}} b_{n,n+1}^{s,s+1} a_{n+1,n}^{s+1,s+3} &= e^{\frac{t}{2}} a_{n,n-1}^{s,s+2} b_{n-1,n}^{s+2,s+3}, \\ e^{-t} b_{n,n-1}^{s,s-1} b_{n-1,n}^{s-1,s} - e^t b_{n,n+1}^{s,s+1} b_{n+1,n}^{s+1,s} &= -\operatorname{sh} t (\lambda_n (\alpha_n^s)^{-1}) \operatorname{sh}(\ln(\lambda_n (\alpha_n^s)^{-1})) I_{N_n^s}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $I_{N_n^s}$ — единичная $(N_n^s \times N_n^s)$ -матрица и индекс s пробегает все возможные значения. Исходная система (4.4), таким образом, распадается в систему уравнений типа цепочки для блочных матриц, и каждая цепочка остается абсолютно не зависимой от других. На каждом шаге вычислений требуется найти прямоугольные матрицы a и b заданного размера, удовлетворяющие системе алгебраических уравнений

$$aa^T = A, \quad bb^T = B, \quad ba^T = C, \quad ab^T = C^T, \quad (4.9)$$

где A, B и C — известные матрицы. В соответствии с (4.8) они определены на предыдущем шаге вычислений (в точности из системы (4.9)) вместе с α_n^s и β_n^s , известными из формулы Вейля, что гарантирует согласованность всего построения.

Проиллюстрируем проведенное выше рассмотрение на примере из предыдущего раздела. Анзацы для s^1, s^2 и r^1, r^2 имеют блочную структуру

$$\begin{aligned} a_{1,2}^{2,0} &= X, \quad a_{2,3}^{0,-2} = A, \quad a_{2,3}^{3,1} = (B \ C), \quad a_{3,4}^{1,-1} = \begin{pmatrix} D & E \\ F & G \end{pmatrix}, \\ a_{4,5}^{-1,-3} &= \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix}, \quad a_{4,5}^{2,0} = (L \ M), \quad a_{5,6}^{0,-2} = \begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix}, \quad a_{6,7}^{1,-1} = Y, \\ b_{1,2}^{2,3} &= y, \quad b_{2,3}^{0,1} = (n \ p), \quad b_{3,4}^{-2,-1} = (h \ k), \quad b_{3,4}^{1,2} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}, \\ b_{4,5}^{-1,0} &= \begin{pmatrix} d & f \\ e & g \end{pmatrix}, \quad b_{5,6}^{0,1} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, \quad b_{5,6}^{-3,-2} = a, \quad b_{6,7}^{-2,-1} = x. \end{aligned}$$

Продemonстрируем структуру типа цепочки на примере уравнений, связывающих примитивные матрицы a :

$$\begin{aligned}
 -e^t a_{1,2}^{2,0} a_{2,1}^{0,2} &= -e^{2t} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t), & e^{-t} a_{2,1}^{0,2} a_{1,2}^{2,0} - e^t a_{2,3}^{0,-2} a_{3,2}^{-2,0} &= 0, \\
 e^{-t} a_{3,2}^{-2,0} a_{2,3}^{0,-2} &= e^{-2t} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t), & -e^t a_{2,3}^{3,1} a_{3,2}^{1,3} &= -e^{3t} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(3t), \\
 e^{-t} a_{3,2}^{1,3} a_{2,3}^{3,1} - e^t a_{3,4}^{1,-1} a_{4,3}^{-1,1} &= -e^t \operatorname{sh}^2 t, \\
 e^{-t} a_{4,3}^{-1,1} a_{3,4}^{1,-1} - e^t a_{4,5}^{-1,-3} a_{5,4}^{-3,-1} &= -e^t \operatorname{sh}^2 t, \\
 e^{-t} a_{5,4}^{-3,-1} a_{4,5}^{-1,-3} &= e^{-3t} \operatorname{sh}^2 t, & -e^t a_{4,5}^{2,0} a_{5,4}^{0,2} &= -e^{2t} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t), \\
 e^{-t} a_{5,4}^{0,2} a_{4,5}^{2,0} - e^t a_{5,6}^{0,-2} a_{6,5}^{-2,0} &= 0, & e^t a_{5,6}^{-2,0} a_{6,5}^{0,-2} &= e^{2t} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t), \\
 e^t a_{6,7}^{1,-1} a_{7,6}^{-1,1} &= e^t \operatorname{sh}^2 t.
 \end{aligned}$$

Здесь мы имеем две цепочки с тремя элементами (спина 1), одну цепочку с четырьмя элементами (спина $3/2$) и одну скалярную цепочку.

5. АЛГЕБРА B_2

В этом случае $p = 2$. Мы опять используем представление, где оператор Q имеет диагональный вид. Из уравнения (3.7) следует, что его диагональные матричные элементы связаны условием $\lambda_i / \lambda_{i+1} = e^{2t}$. Кроме того, генераторы $Q_1^\pm$ коммутируют с Q , следовательно, s^1 и r^1 имеют блочный вид

$$s^1 = (\dots \ a_i \ \dots), \quad r^1 = (\dots \ b_i \ \dots),$$

а s^2 и r^2 сохраняют свой прежний вид

$$s^2 = (\dots \ a_{i,i-1} \ 0 \ a_{i,i+1} \ \dots), \quad r^2 = (\dots \ -a_{i,i-1} \ \alpha_i \ a_{i,i+1} \ \dots).$$

Первое из уравнений (3.1) сохраняет свой вид для блоков матриц (s^1, r^1) :

$$[a_i, b_i] = \operatorname{th} t (a_i^2 - b_i^2 + 1). \quad (5.1)$$

Второе из уравнений (3.1) эквивалентно уравнению (4.1) с заменой $t \rightarrow 2t$:

$$\begin{aligned}
 e^{-2t} a_{n,n-1} \alpha_{n-1} &= e^{2t} \alpha_n a_{n,n-1}, & e^{2t} a_{n,n+1} \alpha_{n+1} &= e^{-2t} \alpha_n a_{n,n+1}, \\
 2e^{-2t} a_{n,n-1} a_{n-1,n} - 2e^{2t} a_{n,n+1} a_{n+1,n} &= \operatorname{sh} t (I_n - \alpha_n^2).
 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
 e^{-t} (a_i + b_i) a_{i,i-1} &= e^t a_{i,i-1} (a_{i-1} + b_{i-1}), \\
 e^t (a_i - b_i) a_{i,i+1} &= e^{-t} a_{i,i+1} (a_{i+1} - b_{i+1}), \\
 e^t \alpha_i (a_i + b_i) - e^{-t} (a_i + b_i) \alpha_i &= 2 \operatorname{sh} t \lambda_i I_i, \\
 e^{-t} \alpha_i (a_i - b_i) - e^t (a_i - b_i) \alpha_i &= 2 \operatorname{sh} t \lambda_i I_i.
 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Группа Вейля алгебры B_2 состоит из восьми элементов. Характер ее (p, q) -представления, вычисленный с помощью (1.1'), записывается как

$$\pi^{(p,q)}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\text{sh}(l_1 \tilde{\tau}_2) \text{sh}(l_2 \tilde{\tau}_2) - \text{sh}(l_1 \tilde{\tau}_2) \text{sh}(l_2 \tilde{\tau}_1)}{\text{sh}(2\tilde{\tau}_1) \text{sh}(\tilde{\tau}_2) - \text{sh}(\tilde{\tau}_1) \text{sh}(2\tilde{\tau}_2)}, \quad (5.4)$$

где $l_1 - l_2 = p + 1$, $l_2 = q + 1$, $l_1 = p + q + 2$, $l_1 + l_2 = p + q + 3$, $\tilde{\tau}_1 = \tau_1$, $\tilde{\tau}_2 = \tau_2 - \tau_1$.

Все диагональные элементы матриц R_1, R_2 и $Q = R_1 R_2$, необходимые для дальнейших вычислений, следует получить из уравнений (5.4).

Теперь подробно рассмотрим конкретный случай 16-мерного $(1, 1)$ -представления алгебры B_2 . В этом случае $l_1 = 4$ и $l_2 = 2$, а характер $(1, 1)$ -представления в соответствии с уравнением (5.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \pi^{(1,1)}(\tau_1, \tau_2) &= (e^{\tilde{\tau}_1} + e^{-\tilde{\tau}_1})(e^{\tilde{\tau}_2} + e^{-\tilde{\tau}_2})(e^{\tilde{\tau}_1} + e^{\tilde{\tau}_2})(1 + e^{-(\tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2)}) = \\ &= e^{2\tau_2 - \tau_1} + e^{\tau_2 + \tau_1} + e^{2\tau_2 - 3\tau_1} + 2e^{\tau_2 - \tau_1} + 2e^{\tau_1} + e^{-\tau_2 + 3\tau_1} + \\ &+ e^{\tau_2 - 3\tau_1} + 2e^{-\tau_1} + 2e^{-\tau_2 + \tau_1} + e^{-2\tau_2 + 3\tau_1} + e^{-\tau_2 - \tau_1} + e^{-2\tau_2 + \tau_1}. \end{aligned}$$

После приведения к A_1 -подгруппе, соответствующей генератору первого сложного корня алгебры B_2 ($X_{1,2}^\pm, H = h_1 + 2h_2$), что эквивалентно подстановке $\tau_1 = t, \tau_2 = 2t$ в выражение для характера, получаем

$$\pi^{(1,1)}(t, 2t) = 2e^{3t} + 6e^t + 6e^{-t} + 2e^{-3t}.$$

Приведение к A_1 -подгруппе, соответствующей генератору первого простого корня ($X_1^\pm, H = h_1, \tau_1 = t, \tau_2 = 0$), дает

$$\pi^{(1,1)}(t, 0) = e^{-t} + e^t + e^{-3t} + 2e^{-t} + 2e^t + e^{3t} + e^{-3t} + 2e^{-t} + 2e^t + e^{3t} + e^{-t} + e^t.$$

Таким образом, получаем матрицы α в явном виде:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (e^{4t}, e^{2t}), & \alpha_2 &= (e^{4t}, e^{2t}, e^{2t}, 1, 1, e^{-2t}), \\ \alpha_3 &= (e^{2t}, 1, 1, e^{-2t}, e^{-2t}, e^{-4t}), & \alpha_4 &= (e^{-2t}, e^{-4t}) \end{aligned}$$

(как и раньше, в скобках заключены диагональные элементы матриц α).

Прямоугольные матрицы из анзацев для (s^2, r^2) имеют размеры

$$a_{1,2} \rightarrow 2 \times 6, \quad a_{2,3} \rightarrow 6 \times 6, \quad a_{3,4} \rightarrow 6 \times 2,$$

а размерности матриц a_i и b_i из анзацев для (s^1, r^1) равны

$$a_1, b_1 \rightarrow 2 \times 2, \quad a_2, b_2 \rightarrow 6 \times 6, \quad a_3, b_3 \rightarrow 6 \times 6, \quad a_4, b_4 \rightarrow 2 \times 2.$$

Первая строка уравнений системы (5.2) имеет решение

$$a_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad a_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & D & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{3,4} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & P \\ 0 & R \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

или в обозначениях с использованием примитивных прямоугольных матриц, введенных в предыдущем разделе,

$$a_{1,2}^{2,-2} = C, \quad a_{1,2}^{4,0} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}, \quad a_{2,3}^{4,0} = \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix}, \quad a_{2,3}^{2,-2} = \begin{pmatrix} F & G \\ H & K \end{pmatrix},$$

$$a_{2,3}^{0,-4} = \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix}, \quad a_{3,4}^{0,-4} = \begin{pmatrix} P \\ R \end{pmatrix}, \quad a_{3,4}^{2,-2} = N.$$

Отметим, что обозначения с использованием примитивных прямоугольных матриц не зависят от выбора порядка экспонент в формуле Вейля для характеров.

Вторая строка системы (5.2) записывается как

$$\begin{aligned} -e^{2t} a_{1,2}^{2,-2} a_{2,1}^{-2,2} &= -e^{2t} \operatorname{sh}^2(2t), & -e^{2t} a_{1,2}^{4,0} a_{2,1}^{0,4} &= -e^{4t} \operatorname{sh}(2t) \operatorname{sh}(4t), \\ e^{-2t} a_{2,1}^{-2,2} a_{1,2}^{2,-2} &= e^{-2t} \operatorname{sh}^2(2t), & e^{-2t} a_{2,1}^{0,4} a_{1,2}^{4,0} - e^{2t} a_{2,3}^{0,-4} a_{3,2}^{-4,0} &= 0, \\ -e^{2t} a_{2,3}^{2,-2} a_{3,2}^{-2,2} &= -e^{2t} \operatorname{sh}^2(2t) I_2, & e^{-2t} a_{3,2}^{-4,0} a_{2,3}^{0,-4} &= e^{-4t} \operatorname{sh}(2t) \operatorname{sh}(4t), \\ e^{-2t} a_{3,2}^{-2,2} a_{2,3}^{2,-2} &= e^{-2t} \operatorname{sh}^2(2t) I_2, & e^{-2t} a_{3,2}^{0,4} a_{2,3}^{4,0} - e^{2t} a_{3,4}^{0,-4} a_{4,3}^{-4,0} &= 0, \\ e^{-2t} a_{4,3}^{-4,0} a_{3,4}^{0,-4} &= e^{-4t} \operatorname{sh}(2t) \operatorname{sh}(4t), & e^{-2t} a_{4,3}^{-2,2} a_{3,4}^{2,-2} &= e^{-2t} \operatorname{sh}^2(2t). \end{aligned}$$

Хотя не все эти уравнения различны, здесь нет противоречия. Это может служить дополнительным аргументом в пользу самосогласованности всего построения. Мы приведем только неповторяющиеся уравнения:

$$\begin{aligned} C^2 &= \operatorname{sh}^2(2t), & A^2 + B^2 &= e^{2t} \operatorname{sh}(2t) \operatorname{sh}(4t), & L &= \pm e^{-2t} A, & M &= \pm e^{-2t} B, \\ & & \begin{pmatrix} F & G \\ H & K \end{pmatrix} &= \operatorname{sh}(2t) \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \\ D &= \pm e^{2t} P, & E &= \pm e^{2t} R, & P^2 + R^2 &= e^{-2t} \operatorname{sh}(2t) \operatorname{sh}(4t), & N^2 &= \operatorname{sh}^2(2t), \end{aligned}$$

решения которых определены единственным образом с точностью до ортогональных преобразований.

Перейдем теперь к уравнениям второй строки системы (5.3), связывающим матрицы a и $a \pm b$. Прямые вычисления дают

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ x & e^t \end{pmatrix}, & a_1 - b_1 &= \begin{pmatrix} -e^{-t} & y \\ 0 & -e^t \end{pmatrix}, \\ a_4 + b_4 &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ u & e^t \end{pmatrix}, & a_4 - b_4 &= \begin{pmatrix} -e^{-t} & v \\ 0 & -e^t \end{pmatrix}, \\ a_2 + b_2 &= \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 & 0 \\ X_{2,1} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & X_{3,2} & e^t & 0 \\ 0 & 0 & X_{4,3} & e^{3t} \end{pmatrix}, & a_2 - b_2 &= \begin{pmatrix} -e^{-3t} & Y_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-t} & Y_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -e^t & Y_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & -e^{3t} \end{pmatrix}, \\ a_3 + b_3 &= \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 & 0 \\ U_{2,1} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & U_{3,2} & e^t & 0 \\ 0 & 0 & U_{4,3} & e^{3t} \end{pmatrix}, & a_3 - b_3 &= \begin{pmatrix} -e^{-3t} & V_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-t} & V_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -e^t & V_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & -e^{3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(6×6) -матрицы $a_2 \pm b_2$ и $a_3 \pm b_3$ представлены в четырехмерном виде с учетом того, что индексы 2, 3 в действительности являются двумерными. Таким образом, X_{21} и Y_{12} представляют собой соответственно двумерные векторы 2×1 (столбцы) и 1×2 (строки) и т. д.

Теперь мы должны принять во внимание, что матрицы a и b удовлетворяют уравнениям (5.1). В терминах $(a \pm b)$ -матриц последние уравнения можно переписать в виде

$$e^t(a+b)(b-a) - e^{-t}(b-a)(a+b) = 2 \operatorname{sh} t I.$$

Прямая подстановка полученных выше выражений для (a_1, b_1) и (a_4, b_4) в последние уравнения приводит к следующему ограничению на параметры:

$$xy = 4 \operatorname{sh}^2 t, \quad uv = 4 \operatorname{sh}^2 t.$$

Если мы хотим иметь симметричную матрицу s^1 , то необходимо, чтобы

$$x = y = u = v = 2 \operatorname{sh} t.$$

Такой результат можно понять без всяких вычислений, рассматривая только соотношения

$$\frac{a+b}{2 \operatorname{sh} t} = Q^+, \quad \frac{a-b}{2 \operatorname{sh} t} = Q^-$$

из раздела 3. Выражения для $(a_{1,4} \pm b_{1,4})$ совпадают с выражениями для (двумерного) спинорного представления квантовой A_1^q -алгебры после дополнительного преобразования подобия с двумерной матрицей

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такова же и ситуация с шестимерными матрицами. Необходимо рассмотреть прямую сумму четырехмерного (спина $3/2$) представления алгебры A_1^q , связанного с индексами 1, 2, 5, 6, и двумерного (спина $1/2$) представления, связанного с индексами 3, 4. После этого выполняется преобразование подобия с (6×6) -матрицей с ненулевыми элементами на главной антидиагонали. В результате получаем в точности матрицу $a_{2,3} \pm b_{2,3}$. При такой процедуре возникают ограничения на параметры X, Y, U и V :

$$\begin{aligned} X_{2,1} = U_{2,1} &= \begin{pmatrix} 2e^{-t}(\operatorname{sh}(3t) \operatorname{sh} t)^{\frac{1}{2}} & \\ & 0 \end{pmatrix}, & X_{2,3} = U_{2,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \operatorname{sh} t \\ 2 \operatorname{sh}(2t) & 0 \end{pmatrix}, \\ X_{3,4} = U_{3,4} &= (0 \quad 2e^t(\operatorname{sh}(3t) \operatorname{sh} t)^{\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

а также аналогичные выражения для элементов Y и V ($Y = X^T$, $V = U^T$). Необходимо подчеркнуть, что мы фиксировали калибровку и поэтому все приведенные выше выражения не содержат дополнительных параметров. Это было достигнуто путем определенного выбора вида матриц x, y, X, Y, u, v, U и V .

Наконец, нужно удовлетворить первой строке уравнений системы (5.3), связывающих прямоугольные матрицы $a_{n,n+1}$ с матрицами $a_i \pm b_i$. Прямые вычисления дают

$$\begin{aligned} e^{-t}(X_{4,3}a_{2,1}^{0,4}) &= e^t Cx, & e^{-t}(U_{3,2}a_{2,3}^{4,0}) &= e^t(a_{2,3}^{2,-2}X_{2,1}), \\ e^{-t}(U_{4,3}a_{2,3}^{2,-2}) &= e^t(a_{3,2}^{-4,0}X_{3,2}), & e^{-t}uN &= e^t(a_{4,3}^{-4,0}U_{2,1}). \end{aligned}$$

Все параметры в конструкции однозначно определены формулами

$$\begin{aligned} A = E &= e^t \operatorname{sh}(2t) \left(\frac{\operatorname{sh}(5t)}{\operatorname{sh}(3t)} \right)^{\frac{1}{2}}, & B = D &= e^t \operatorname{sh}(2t) \left(\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh}(3t)} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \sin \phi &= -\frac{\operatorname{sh}(2t)}{\operatorname{sh}(3t)}, & \cos \phi &= \frac{(\operatorname{sh}(5t) \operatorname{sh} t)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{sh}(3t)}. \end{aligned}$$

6. АЛГЕБРА G_2

Повторяя аргументы двух предыдущих разделов, запишем анзацы для матриц (s^1, r^1) и (s^2, r^2) в символической строчной форме:

$$\begin{aligned} s^1 &= (\dots \quad a_{i,i-1} \quad 0 \quad a_{i,i+1} \quad \dots), \\ r^1 &= (\dots \quad a_{i,i-1} \quad \alpha_i \quad -a_{i,i+1} \quad \dots), \\ s^2 &= (\dots \quad b_{i,i-3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad b_{i,i+3} \quad \dots), \\ r^2 &= (\dots \quad -b_{i,i-3} \quad 0 \quad 0 \quad \beta_i \quad 0 \quad 0 \quad a_{i,i+1} \quad \dots). \end{aligned}$$

Появление здесь $a_{i,i+1}$ вместо $a_{i,i-1}$, как в случае алгебры A_2 , связано с различными знаками в первом из уравнений (3.5). В этой формуле сохранены обозначения предыдущих разделов: α_i и β_i — квадратные $(N_i \times N_i)$ -матрицы, $a_{p,q}$ и $b_{p,q}$ — прямоугольные $(N_p \times N_q)$ -матрицы. Уравнение, связывающее s^1 и r^1 , эквивалентно матричной системе

$$\begin{aligned} e^t a_{n,n-1} \alpha_{n-1} &= e^{-t} \alpha_n a_{n,n-1}, & e^{-t} a_{n,n+1} \alpha_{n+1} &= e^t \alpha_n a_{n,n+1}, \\ -2e^t a_{n,n-1} a_{n-1,n} &+ 2e^{-t} a_{n,n+1} a_{n+1,n} &= \operatorname{sh} t (I_n - \alpha_n^2), \end{aligned} \quad (6.1)$$

а из уравнений для s^2 и r^2 получаем систему

$$\begin{aligned} e^{-3t}b_{n,n-3}\beta_{n-3} &= e^{3t}\beta_n b_{n,n-3}, & e^{3t}b_{n,n+3}\beta_{n+3} &= e^{-3t}\beta_n b_{n,n+3}, \\ 2e^{-3t}b_{n,n-3}b_{n-3,n} - 2e^{3t}b_{n,n+3}b_{n+3,n} &= \operatorname{sh} t (I_n - \beta_n^2), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где I_n — единичная $(N_n \times N_n)$ -матрица. Из последнего из уравнений (3.1) и определения Q (3.2) следует система для смешанных матриц a , α и b , β :

$$\begin{aligned} e^{\frac{3t}{2}}b_{n,n-3}\alpha_{n-3} &= e^{-\frac{3t}{2}}\alpha_n b_{n,n-3}, & e^{\frac{3t}{2}}a_{n,n+1}\beta_{n+1} &= e^{-\frac{3t}{2}}\beta_n a_{n,n+1}, \\ e^{-\frac{3t}{2}}a_{n,n-1}\beta_{n-1} &= e^{\frac{3t}{2}}\beta_n a_{n,n-1}, & e^{-\frac{3t}{2}}b_{n,n+3}\beta_{n+3} &= e^{\frac{3t}{2}}\alpha_n b_{n,n+3}, \\ e^{-\frac{3t}{2}}b_{n,n+3}a_{n+3,n+4} &= e^{\frac{3t}{2}}a_{n,n+1}b_{n+1,n+4}, \\ e^{\frac{3t}{2}}b_{n,n-3}a_{n-3,n-4} &= e^{-\frac{3t}{2}}a_{n,n-1}b_{n-1,n-4}, \\ \alpha_n \beta_n &= \lambda_n I_n. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Последнее уравнение из системы (6.3) позволяет переписать уравнения (6.1)–(6.3) в более компактном виде, исключая матрицу β_n . Мы полагаем также, что матрицы s^1 и s^2 симметричны:

$$a_{i+1,i} = a_{i,i+1}^T, \quad b_{i+3,i} = b_{i,i+3}^T.$$

Система уравнений, которую требуется решить для алгебры G_2 , принимает вид

$$\begin{aligned} e^t a_{n,n-1} \alpha_{n-1} &= e^{-t} \alpha_n a_{n,n-1}, & e^{-t} a_{n,n+1} \alpha_{n+1} &= e^t \alpha_n a_{n,n+1}, \\ e^{\frac{3t}{2}} b_{n,n-3} \alpha_{n-3} &= e^{-\frac{3t}{2}} \alpha_n b_{n,n-3}, & e^{-\frac{3t}{2}} b_{n,n+3} \alpha_{n+3} &= e^{\frac{3t}{2}} \alpha_n b_{n,n+3}, \\ -2e^t a_{n,n-1} a_{n-1,n} + 2e^{-t} a_{n,n+1} a_{n+1,n} &= \operatorname{sh} t (I_n - \alpha_n^2), \\ 2e^{3t} b_{n,n-3} b_{n-3,n} - 2e^{-3t} b_{n,n+3} b_{n+3,n} &= \operatorname{sh} t (I_n - \beta_n^2), \\ e^{\frac{3t}{2}} b_{n,n-3} a_{n-3,n-4} &= e^{-\frac{3t}{2}} a_{n,n-1} b_{n-1,n-4}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь, как и в предыдущих разделах, диагональные матрицы α_n и β_n считаются известными из формулы Вейля (1.1); неизвестны прямоугольные матрицы a и b соответствующих размеров.

Как и в случае алгебры A_2 , прямоугольные матрицы a и b имеют блочную структуру, в терминах примитивных компонент которой можно представить систему (6.4). Мы опускаем это общее рассмотрение, ограничиваясь простейшим примером первого фундаментального представления квантовой алгебры G_2 с целью показать согласованность предложенной конструкции.

Стандартный базис $(1, 0)$ -представления с использованием понижающих операторов задается как

$$\begin{aligned} X_1^- |1\rangle, & \quad |1\rangle, & X_1^- X_1^- X_2^- X_1^- |1\rangle, & \quad X_1^- X_2^- X_1^- |1\rangle, \\ X_2^- X_1^- |1\rangle, & & X_1^- X_2^- X_1^- X_1^- X_2^- X_1^- |1\rangle, & \quad X_2^- X_1^- X_1^- X_2^- X_1^- |1\rangle. \end{aligned}$$

На таких базисных векторах генераторы $Q = \exp[(h_1 + 3h_2)t]$ и R_1, R_2 принимают значения

$$\begin{aligned} Q &= (e^{2t}, e^t, e^t, 1, e^{-t}, e^{-t}, e^{-2t}), \\ R_1 &\equiv \exp(h_1 t) = (e^{-t}, e^t, e^{-2t}, 1, e^{2t}, e^{-t}, e^t), \\ R_2 &\equiv \exp(3h_2 t) = (e^{3t}, 1, e^{3t}, 1, e^{-3t}, 1, e^{-3t}). \end{aligned}$$

Явные выражения для матриц α имеют вид

$$\alpha_1 = e^{-t}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = e^t. \quad (6.5)$$

Согласно общей схеме ненулевые недиагональные элементы матриц (s^1, r^1) определяются формулами

$$a_{1,2} = (A, B), \quad a_{3,2} = (C, D), \quad a_{3,4} = (E, F), \quad a_{5,4} = (G, H),$$

а элементы матриц (s^2, r^2) — формулами

$$b_{1,4} = (x, y), \quad b_{5,2} = (u, v),$$

где все параметры неизвестны и должны быть определены из системы (6.4). После подстановки выражений (6.5) в уравнения из первой строки системы (6.4), получаем

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= (A, 0), & a_{3,2} &= (0, D), & a_{3,4} &= (E, 0), & a_{5,4} &= (0, H), \\ b_{1,4} &= (x, 0), & b_{5,2} &= (0, v). \end{aligned}$$

Из последних двух строк системы (6.4) получаем единственное решение

$$\begin{aligned} A^2 &= \operatorname{sh}^2 t, & D^2 &= e^{-t} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t), \\ E^2 &= e^t \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(2t), & H^2 &= \operatorname{sh}^2 t, & x^2 &= v^2 = \operatorname{sh}^2(3t). \end{aligned}$$

Прямая проверка показывает, что уравнение в последней строке системы (6.4) выполняется автоматически.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Результаты данной работы столь же неожиданны, сколь и удивительны, по крайней мере для автора. Долгое время считалось, что решение задачи о явном виде инфинитезимальных генераторов в произвольном представлении должно указывать на глубокую связь с базисами, определенными собственными значениями необходимого числа взаимно коммутирующих операторов, построенных из генераторов соответствующей алгебры. Значения операторов Казимира в такой конструкции определяют индексы неприводимого представления. Решение задачи подобным образом было найдено в знаменитых работах Гельфанда и Цейтлина пятьдесят лет назад [2]. Этим авторам удалось явно

представить инфинитезимальные операторы в произвольном представлении классических полупростых серий A_n , B_n и D_n . Однако все многочисленные попытки обобщить эти результаты на оставшиеся полупростые серии были неудачными²⁾. Способ, предложенный в данной статье, не имеет дела ни с операторами Казимира, ни с семейством взаимно коммутирующих операторов и их собственных значений. Существенно только знание результата действия группового оператора e^T на базисные векторы, и оно дает возможность решить задачу так же и для квантовых алгебр.

Полупростые алгебры Ли возникают в пределе, когда параметр деформации стремится к нулю. Обычно мыслится противоположный способ действий: сначала строится представление полупростой алгебры Ли, а затем оно обобщается на случай квантовой алгебры.

Алгоритм данной работы подобен компьютерной программе в том, что необходимо итерировать одну и ту же операцию: решать алгебраическую систему уравнений, неоднородная часть которых известна из предыдущих этапов вычислений. Конечно, ключевым для всей конструкции обстоятельством является формула Вейля для характеров конечномерных неприводимых представлений полупростых групп. Она гарантирует самосогласованность всего построения и дает необходимое число начальных параметров (явные значения диагональных элементов матриц α , β и их кратности), через которые выражены генераторы простых корней. Инвариантный характер формулы Вейля позволяет надеяться, что задача о явной реализации генераторов простых корней для квантовых алгебр также может быть решена в инвариантных терминах. К сожалению, эти термины на данный момент автору неизвестны.

Благодарности. Автор благодарит Ч. Девчанда, А. В. Разумова и Н. Вахания за полезные обсуждения и существенную помощь в подготовке рукописи к печати, а также рецензента за его замечания. Эта работа была выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00330).

Список литературы

- [1] Г. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления. М.: Гос. изд. иностр. лит-ры, 1947.
- [2] И. М. Гельфанд, М. Л. Цетлин. ДАН СССР. 1950. Т. 71. С. 825–829; С. 1017–1020.

²⁾ Автор благодарит А. Молева, обратившего внимание на свою статью: А. Молев. MRR № 012-98 (Канберра), где эта проблема была решена для C_n .