Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Санига, М. Плана, Проективная прямая над конечным фактор-кольцом $GF(2)[x]/\langle x^3 - x \rangle$ и квантовое зацепление. Теоретические основы, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 1, 44–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6010>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:26:09

© 2007 г.

М. Санига*, М. Плана†

ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ НАД КОНЕЧНЫМ ФАКТОР-КОЛЬЦОМ $GF(2)[x]/\langle x^3 - x \rangle$ И КВАНТОВОЕ ЗАЦЕПЛЕНИЕ. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Рассматривается проективная прямая над конечным фактор-кольцом $R_\diamond \equiv GF(2)[x]/\langle x^3 - x \rangle$. Прямая состоит из 18 точек, образующих окрестности трех попарно удаленных точек. Поскольку $R_\diamond$ не является локальным кольцом, отношение близости (или параллельности) не является отношением эквивалентности, так что множества точек, близких к двум удаленным точкам, пересекаются. Существуют девять точек, близких к любой данной точке прямой, которые образуют три различных семейства по отношению к редукции по модулю любого из двух максимальных идеалов кольца. Два семейства из трех содержат по четыре точки каждое, и они меняются местами при переходе от одного идеала к другому; точки одного семейства сливаются с данной точкой (ее образом), в то время как точки другого семейства попарно отходят к оставшимся двум точкам ассоциированной обыкновенной проективной прямой второго порядка. Единственная точка оставшегося семейства под действием обоих отображений переходит в опорную точку; существование такой точки обусловлено нетривиальным характером радикала Джекобсона ($\mathcal{J}_\diamond$) рассматриваемого кольца. Фактор-кольцо $\tilde{R}_\diamond \equiv R_\diamond / \mathcal{J}_\diamond$ изоморфно кольцу $GF(2) \otimes GF(2)$. Проективная прямая над кольцом $\tilde{R}_\diamond$ содержит девять точек, каждая из которых окружена четырьмя близкими точками и таким же количеством удаленных точек, и любые две удаленные точки обладают частично пересекающимися окрестностями. Предполагается, что эти две замечательные геометрии над кольцами подходят для моделирования перепутанных кубитных состояний, что обсуждается во второй части данной работы.

Ключевые слова: проективная прямая над кольцом, конечные фактор-кольца, отношения близости и удаленности, квантовое зацепление.

1. ВВЕДЕНИЕ

Геометрии над кольцами вместо полей изучались многими авторами в течение длительного времени [1], однако лишь в последнее время они стали использоваться

*Astronomical Institute, Slovak Academy of Sciences, Tatranská Lomnica, Slovak Republic.
E-mail: msaniga@astro.sk

†Institut FEMTO-ST, CNRS, Département LPMO, Besançon, France.
E-mail: planat@lpmo.edu

в физике [2], а также обнаружили возможности их применения в других естественных науках [3]. Наиболее заметным и на первый взгляд скорее противоречащим интуиции свойством геометрий над кольцами (в размерности два и выше) является то, что две отдельные точки (прямые) не обязаны обладать единственной соединяющей их прямой (единственной точкой пересечения) [4], [5]. Возможно, самой известной, наиболее простой и полностью изученной геометрией над кольцом является конечная проективная плоскость Ельмслева [2], [6].

Различные геометрии над кольцами существенно отличаются друг от друга благодаря свойствам координатного кольца, над которым они рассматриваются. В настоящей работе изучается структура проективной прямой, определенной над конечным фактор-кольцом $R_{\diamond} \equiv GF(2)[x]/\langle x^3 - x \rangle$. Такое кольцо, подобно кольцам, использованным в работах [2], [3], с одной стороны, достаточно близко к полю, чтобы с ним можно было работать эффективно, а с другой стороны, структура его делителей нуля все еще достаточно богата, чтобы соответствующая геометрия была снабжена нетривиальными по сравнению с геометриями над полями структурами и приводила к интересным и важным приложениям в квантовой физике, прекрасно сочетаясь с геометриями, рассмотренными в работах [2], [3].

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕЦ

В этом разделе мы напомним некоторые основные определения и свойства колец, которые будут использоваться впоследствии, так что даже неискушенный в теории колец читатель будет в состоянии следить за дальнейшими рассуждениями, не испытывая настоящей необходимости в обращении к соответствующей дополнительной литературе (см., например, [7]).

Кольцом называется множество R (или, более точно, $(R, +, *)$) с двумя бинарными (двуместными) операциями, обычно называемыми сложением $(+)$ и умножением $(*)$, такими, что R является абелевой группой по сложению и полугруппой по умножению, причем умножение как слева, так и справа дистрибутивно относительно сложения¹⁾. Кольцо, умножение в котором коммутативно, называется *коммутативным кольцом*. Кольцо R , обладающее единичным относительно умножения элементом 1 , таким что $1r = r1 = r$ для всех $r \in R$, называется *кольцом с единицей*. Кольцо, состоящее из конечного числа элементов, называется *конечным кольцом*. В дальнейшем термин кольцо у нас будет всегда означать коммутативное кольцо с единицей.

Элемент r кольца R является *обратимым*, если существует элемент r^{-1} такой, что $rr^{-1} = r^{-1}r = 1$. Элемент r^{-1} , однозначно определяемый элементом r , называется обратным по умножению к r . Множество обратимых элементов образуют группу по умножению. Некоторый (ненулевой) элемент r кольца R называется (нетривиальным) *делителем нуля*, если существует элемент $s \neq 0$ такой, что $sr = rs = 0$.

¹⁾Для умножения в кольце принято использовать обозначение ab вместо $a * b$; мы также будем следовать этой традиции.

Элемент конечного кольца является либо обратимым, либо делителем нуля. Кольцо, в котором каждый ненулевой элемент обратим, является *полем*; конечные поля (или поля Галуа), содержащие q элементов, часто обозначаемые $GF(q)$, существуют только при $q = p^n$, где p – простое число, а n – положительное целое число. Наименьшее положительное целое число s такое, что $s1 = 0$, где через $s1$ обозначена сумма $1 + 1 + 1 + \dots + 1$ (s слагаемых), называется характеристикой кольца R ; если $s1$ не равно нулю ни для какого s , характеристика кольца R считается равной нулю.

Идеалом $\mathcal{I}$ кольца R называется подгруппа $(R, +)$ такая, что $a\mathcal{I} = \mathcal{I}a \subseteq \mathcal{I}$ для всех $a \in R$. Идеал кольца R , который не содержится ни в каком другом идеале, за исключением самого кольца R , называется *максимальным идеалом*. Если идеал имеет вид Ra для некоторого элемента a кольца R , то он называется *главным идеалом* и обычно обозначается $\langle a \rangle$. Кольцо с единственным максимальным идеалом называется *локальным кольцом*. Пусть R – кольцо, а $\mathcal{I}$ – один из его идеалов. Тогда множество $\bar{R} \equiv R/\mathcal{I} = \{a + \mathcal{I} \mid a \in R\}$ с операциями сложения $(a + \mathcal{I}) + (b + \mathcal{I}) = a + b + \mathcal{I}$ и умножения $(a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I}) = ab + \mathcal{I}$ является кольцом, которое называется *частным* или *фактором кольца R по идеалу $\mathcal{I}$* ; если идеал $\mathcal{I}$ максимальный, то $\bar{R}$ является полем. Очень важным идеалом кольца является идеал, представляющий собой пересечение всех максимальных идеалов; этот идеал называется *радикалом Джексона*.

Отображение $\pi: R \mapsto S$ кольца $(R, +, *)$ в кольцо $(S, \oplus, \otimes)$ называется *гомоморфизмом колец*, если выполнены следующие условия: $\pi(a + b) = \pi(a) \oplus \pi(b)$, $\pi(a * b) = \pi(a) \otimes \pi(b)$ для любых двух элементов a и b кольца R и $\pi(1) = 1$. Из этого определения нетрудно видеть, что $\pi(0) = 0$, $\pi(-a) = -\pi(a)$, обратимые элементы кольца R отображаются в обратимые элементы кольца S и множество элементов $\{a \in R \mid \pi(a) = 0\}$, называемое *ядром гомоморфизма π* , образуют идеал кольца R . *Каноническое*, или *естественное отображение* $\bar{\pi}: R \rightarrow \bar{R} \equiv R/\mathcal{I}$, определяемое формулой $\bar{\pi}(r) = r + \mathcal{I}$, очевидно, является гомоморфизмом колец с ядром $\mathcal{I}$. Взаимно однозначный гомоморфизм колец называется *изоморфизмом колец*; два кольца R и S называются *изоморфными* (обозначается $R \cong S$), если между ними существует изоморфизм.

Приведем, наконец, два важных примера колец: кольцо полиномов $R[x]$, т.е. множество всех полиномов одной переменной x с коэффициентами из некоторого кольца R , и кольцо $R_{\otimes}$, т.е. (конечное) прямое произведение колец $R_{\otimes} \equiv R_1 \otimes R_2 \otimes \dots \otimes R_n$, в котором и сложение, и умножение выполняются покомпонентно, причем кольца-компоненты не обязаны совпадать.

3. КОЛЬЦО $R_{\diamond}$ И ЕГО КАНОНИЧЕСКИЕ ГОМОМОРФИЗМЫ

Кольцо $R_{\diamond} \equiv GF(2)[x]/\langle x^3 - x \rangle$, как и само поле $GF(2)$, имеет характеристику 2 и состоит из следующих $\#_t = 8$ элементов:

$$R_{\diamond} = \{0, 1, x, x + 1, x^2, x^2 + 1 = (x + 1)^2, x^2 + x, x^2 + x + 1\}, \quad (1)$$

которые включают $\#_u = 2$ обратимых элемента

$$R_{\diamond}^* = \{1, x^2 + x + 1\} \quad (2)$$

ТАБЛИЦА 1

$\otimes$	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
x	0	x	x^2	x	x^2+x	0	x^2+x	x^2
x^2	0	x^2	x	x^2	x^2+x	0	x^2+x	x
$x+1$	0	$x+1$	x^2+x	x^2+x	x^2+1	x^2+1	0	$x+1$
x^2+1	0	x^2+1	0	0	x^2+1	x^2+1	0	x^2+1
x^2+x	0	x^2+x	x^2+x	x^2+x	0	0	0	x^2+x
x^2+x+1	0	x^2+x+1	x^2	x	$x+1$	x^2+1	x^2+x	1

и $\#_z = \#_t - \#_u = 6$ делителей нуля

$$R_\diamondsetminus R_\diamond^* = \{0, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x\}. \quad (3)$$

Последние образуют два главных, а также максимальных, идеала

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\langle x \rangle} &\equiv \langle x \rangle = \{0, x, x^2, x^2+x\}, \\ \mathcal{I}_{\langle x+1 \rangle} &\equiv \langle x+1 \rangle = \{0, x+1, x^2+1, x^2+x\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку эти два идеала суть единственные максимальные идеалы кольца, радикал Джекобсона данного кольца $\mathcal{J}_\diamond$ имеет вид

$$\mathcal{J}_\diamond = \langle x \rangle \cap \langle x+1 \rangle = \{0, x^2+x\}. \quad (5)$$

Вспоминая, что в поле $GF(2)$ выполняется $2 \equiv 0$, и, таким образом, $+1 = -1$, и принимая во внимание, что $x^3 = x$, нетрудно установить, что умножение элементов кольца $R_\diamond$ осуществляется по правилам, приведенным в табл. 1.

Указанные три идеала порождают три фундаментальных фактор-кольца (каждое из которых имеет характеристику 2), именно $\widehat{R}_\diamond \equiv R_\diamond/\mathcal{I}_{\langle x \rangle} = \{0, 1\}$, $\overline{R}_\diamond \equiv R_\diamond/\mathcal{I}_{\langle x+1 \rangle} = \{0, 1\}$ и

$$\widetilde{R}_\diamond \equiv R_\diamond/\mathcal{J}_\diamond = \{0, 1, x, x+1\}. \quad (6)$$

Первые два кольца, очевидно, изоморфны полю $GF(2)$, в то время как последнее изоморфно кольцу $GF(2)[x]/\langle x^2-x \rangle \cong GF(2) \otimes GF(2)$ с покомпонентным сложением и умножением (см., например, [3]), как следует из табл. 2, содержащей правила умножения элементов этого кольца.

Эти фактор-кольца приводят к трем каноническим гомоморфизмам: $\widehat{\pi}: R_\diamond \rightarrow \widehat{R}_\diamond$, $\overline{\pi}: R_\diamond \rightarrow \overline{R}_\diamond$ и $\widetilde{\pi}: R_\diamond \rightarrow \widetilde{R}_\diamond$, имеющим соответственно следующий явный вид:

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}: \{0, x, x^2, x^2+x\} &\rightarrow \{0\}, \quad \{1, x+1, x^2+1, x^2+x+1\} \rightarrow \{1\}, \\ \overline{\pi}: \{0, x+1, x^2+1, x^2+x\} &\rightarrow \{0\}, \quad \{1, x, x^2, x^2+x+1\} \rightarrow \{1\}, \\ \widetilde{\pi}: \{0, x^2+x\} &\rightarrow \{0\}, \quad \{x, x^2\} \rightarrow \{x\}, \quad \{x+1, x^2+1\} \rightarrow \{x+1\}, \\ &\{1, x^2+x+1\} \rightarrow \{1\}. \end{aligned} \quad (7)$$

ТАБЛИЦА 2

$\otimes$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	x	0
$x+1$	0	$x+1$	0	$x+1$

4. ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ НАД КОЛЬЦОМ $R_\diamond$ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИНДУЦИРОВАННЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ

Пусть задано кольцо R , а $GL_2(R)$ – общая линейная группа обратимых (2×2) -матриц с элементами из кольца R . Тогда пара $(a, b) \in R^2$ называется *допустимой* над R , если существуют $c, d \in R$ такие, что [8]

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(R). \quad (8)$$

Проективная прямая над R , обозначаемая далее как $PR(1)$, определяется как множество классов упорядоченных пар $(\varrho a, \varrho b)$, где ϱ – обратимый элемент кольца, а (a, b) – допустимая пара [8]–[11]. В случае кольца $R_\diamond$ условие допустимости (8) может быть переписано в более простом виде

$$\Delta \equiv \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \in R_\diamond^*, \quad (9)$$

из которого следует, что на проективной прямой $PR_\diamond(1)$ выделяются два алгебраически различных вида точек: 1) точки, представленные парами, в которых хотя бы один элемент является обратимым; 2) точки, пары которых состоят из делителей нуля, принадлежащих разным идеалам. Далее, непосредственно видно, что существует всего

$$\#^{(I)} = \frac{\#_t^2 - \#_z^2}{\#_u} = \#_t + \#_z = 8 + 6 = 14 \quad (10)$$

точек первого вида, а именно

$$(1, 0), (1, x), (1, x^2), (1, x+1), (1, x^2+1), (1, x^2+x), (1, 1), (1, x^2+x+1), \\ (0, 1), (x, 1), (x^2, 1), (x+1, 1), (x^2+1, 1), (x^2+x, 1),$$

и

$$\#^{(II)} = \frac{\#_z^2 - \#_s}{\#_u} = \frac{6^2 - (2 \times 4^2 - 2^2)}{2} = 4 \quad (11)$$

точек второго вида, а именно

$$(x, x+1) \sim (x^2, x+1), \quad (x, x^2+1) \sim (x^2, x^2+1), \\ (x+1, x) \sim (x+1, x^2), \quad (x^2+1, x) \sim (x^2+1, x^2),$$

где $\#_s$ обозначает число различных пар делителей нуля с обоими элементами из одного и того же идеала. Следовательно, проективная прямая $PR_{\diamond}(1)$ содержит всего $\#^{(I)} + \#^{(II)} = 14 + 4 = 18$ точек.

Точки проективной прямой $PR_{\diamond}(1)$ характеризуются двумя ключевыми отношениями: близости и удаленности. Именно, две различные точки $X: (\varrho a, \varrho b)$ и $Y: (\varrho c, \varrho d)$ называются *близкими* (или *параллельными*), если Δ есть *делитель нуля*, и *удаленными* в противном случае, т.е. если Δ – *обратимый элемент*. Отношение близости является рефлексивным (каждая точка, очевидно, близка сама себе) и симметричным (т.е. если точка X близка точке Y , то и точка Y близка точке X). Однако, как будет видно из дальнейшего, отношение близости не транзитивно (т.е. из того, что точка X близка точке Y и точка Y близка точке Z , не обязательно следует, что точка X близка точке Z), поскольку $R_{\diamond}$ не является локальным кольцом (см., например, [5], [11]). Множество всех точек, близких к данной точке прямой $PR_{\diamond}(1)$, будем называть *окрестностью* этой точки²⁾. Найдем число элементов и исследуем свойства пересечений этого замечательного множества. С этой целью рассмотрим три различных попарно удаленных точки прямой $U: (1, 0)$, $V: (0, 1)$ и $W: (1, 1)$, для которых нетрудно найти их окрестности:

$$\begin{aligned} U: \quad U_1: (1, x), \quad U_2: (1, x^2), \quad U_3: (1, x+1), \quad U_4: (1, x^2+1), \quad U_0: (1, x^2+x), \\ U_5: (x, x+1), \quad U_6: (x, x^2+1), \quad U_7: (x+1, x), \quad U_8: (x^2+1, x), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} V: \quad V_1: (x, 1), \quad V_2: (x^2, 1), \quad V_3: (x+1, 1), \quad V_4: (x^2+1, 1), \quad V_0: (x^2+x, 1), \\ V_5: (x, x+1), \quad V_6: (x, x^2+1), \quad V_7: (x+1, x), \quad V_8: (x^2+1, x), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} W: \quad W_1: (1, x), \quad W_2: (1, x^2), \quad W_3: (1, x+1), \quad W_4: (1, x^2+1), \quad W_0: (1, x^2+x+1), \\ W_5: (x, 1), \quad W_6: (x^2, 1), \quad W_7: (x+1, 1), \quad W_8: (x^2+1, 1). \end{aligned} \quad (14)$$

Легко видеть, что $U_i \equiv W_i$ для $i = 1, 2, 3, 4$, $U_j \equiv V_j$ для $j = 5, 6, 7, 8$ и $V_k \equiv W_{k+4}$ для $k = 1, 2, 3, 4$. Теперь, поскольку система координат на этой прямой *всегда* может быть выбрана таким образом, что координаты *любых* трех взаимно удаленных точек становятся равными координатам точек U , V и W , из последних трех выражений видим, что окрестность любой точки прямой состоит из девяти различных точек, окрестности любых двух удаленных точек имеют четыре общие точки (это свойство, таким образом, означает упомянутое выше отсутствие транзитивности отношения близости), а окрестности любых трех взаимно удаленных точек не имеют общих элементов (см. рис. 1).

Более глубокое понимание структуры и свойств окрестностей достигается при рассмотрении трех канонических гомоморфизмов (7). Первые два из них индуцируют гомоморфизмы прямой $PR_{\diamond}(1)$ в обычную проективную прямую второго порядка $PG(1, 2)$, в то время как последний индуцирует гомоморфизм $PR_{\diamond}(1) \rightarrow P\tilde{R}_{\diamond}(1)$.

²⁾Здесь, во избежание недоразумений, необходимо предупредить, что некоторые авторы (см., например, [10], [11]) используют этот термин, наоборот, для обозначения множества *удаленных* точек.

Рис. 1. Схематическое изображение структуры проективной прямой $PR_{\diamond}(1)$. Если выбраны любые три попарно удаленные точки (представлены точками, обведенными кружками), то оставшиеся точки прямой расположены в окрестностях этих трех точек (три множества точек, расположенные на трех различных эллипсах с центрами в данных точках). Каждые две окрестности имеют четыре общие точки, и, поскольку три окрестности имеют пустое пересечение, мы получаем 12 точек. Существование еще трех точек (представлены пустыми кружками) тесно связано с тем обстоятельством, что кольцо $R_{\diamond}$ имеет нетривиальный радикал Джекобсона.

Поскольку прямая $PG(1,2)$ состоит из трех точек, а именно $U: (1,0)$, $V: (0,1)$ и $W: (1,1)$, мы обнаруживаем, что первый гомоморфизм $(PR_{\diamond}(1) \rightarrow \widehat{PR}_{\diamond}(1))$ действует на окрестность, в качестве которой без ограничения общности может быть выбрана окрестность точки U , следующим образом:

$$U_1, U_2, U_7, U_8, U_0 \rightarrow \widehat{U}, \quad U_5, U_6 \rightarrow \widehat{V}, \quad U_3, U_4 \rightarrow \widehat{W}, \quad (15)$$

в то время как второй гомоморфизм $(PR_{\diamond}(1) \rightarrow \overline{PR}_{\diamond}(1))$ демонстрирует почти комплиментарное поведение:

$$U_3, U_4, U_5, U_6, U_0 \rightarrow \overline{U}, \quad U_7, U_8 \rightarrow \overline{V}, \quad U_1, U_2 \rightarrow \overline{W}. \quad (16)$$

Третий гомоморфизм $(PR_{\diamond}(1) \rightarrow \widetilde{PR}_{\diamond}(1))$ является, однако, более сложным, и для того чтобы полностью понять его значение, необходимо сначала разобраться со структурой прямой $\widetilde{PR}_{\diamond}(1)$.

Для этого будем придерживаться той же последовательности рассуждений, что и в случае прямой $PR_{\diamond}(1)$, и с помощью формулы (6) и табл. 2 найдем, что прямая $\widetilde{PR}_{\diamond}(1)$ состоит из девяти точек, из которых семь являются точками первого вида $((1,0), (1,x), (1,x+1), (1,1), (0,1), (x,1), (x+1,1))$ и две являются точками второго вида $((x,x+1), (x+1,x))$.

Рис. 2. Схематическое изображение структуры проективной прямой $PR_{\diamond}(1)$. Если выбраны любые три попарно удаленные точки (представлены точками, обведенными кружками), то оставшиеся точки прямой (черные кружки) расположены в окрестностях этих трех точек (три множества точек, расположенные на трех различных эллипсах с центрами в данных точках).

Окрестности трех различных попарно удаленных точек $\tilde{U}: (1, 0)$, $\tilde{V}: (0, 1)$ и $\tilde{W}: (1, 1)$ теперь суть

$$\begin{aligned} \tilde{U}: \quad & \tilde{U}_1: (1, x), \quad \tilde{U}_2: (1, x+1), \quad \tilde{U}_3: (x, x+1), \quad \tilde{U}_4: (x+1, x), \\ \tilde{V}: \quad & \tilde{V}_1: (x, 1), \quad \tilde{V}_2: (x+1, 1), \quad \tilde{V}_3: (x, x+1), \quad \tilde{V}_4: (x+1, x), \\ \tilde{W}: \quad & \tilde{W}_1: (1, x), \quad \tilde{W}_2: (1, x+1), \quad \tilde{W}_3: (x, 1), \quad \tilde{W}_4: (x+1, 1). \end{aligned} \quad (17)$$

С помощью этих выражений и того обстоятельства, что координаты любых трех взаимно удаленных точек снова могут быть сделаны равными координатам точек $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ и $\tilde{W}$, мы находим, что окрестность любой точки этой прямой состоит из четырех различных точек, окрестности любых двух удаленных точек имеют две общие точки (это снова означает отсутствие транзитивности отношения близости), а окрестности любых трех взаимно удаленных точек не пересекаются (см. рис. 2). Отметим, что в данном случае в силу тривиальности радикала Джекобсона ($\tilde{\mathcal{J}}_{\diamond} = \{0\}$) не существует “точек Джекобсона”, т.е. точек, принадлежащих только одной окрестности. Теперь мы уже в состоянии представить явное выражение для гомоморфизма $PR_{\diamond}(1) \rightarrow PR_{\diamond}(1)$:

$$\begin{aligned} U_1/W_1, U_2/W_2 &\rightarrow \tilde{U}_1/\tilde{W}_1, & U_3/W_3, U_4/W_4 &\rightarrow \tilde{U}_2/\tilde{W}_2, \\ U_5/V_5, U_6/V_6 &\rightarrow \tilde{U}_3/\tilde{V}_3, & U_7/V_7, U_8/V_8 &\rightarrow \tilde{U}_4/\tilde{V}_4, \\ V_1/W_5, V_2/W_6 &\rightarrow \tilde{V}_1/\tilde{W}_3, & V_3/W_7, V_4/W_8 &\rightarrow \tilde{V}_2/\tilde{W}_4, \\ U, U_0 &\rightarrow \tilde{U}, & V, V_0 &\rightarrow \tilde{V}, & W, W_0 &\rightarrow \tilde{W}. \end{aligned} \quad (18)$$

Это отображение играет исключительно важную роль в физических приложениях теории.

5. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВУХ ГЕОМЕТРИЙ

Мы предполагаем, что геометрии прямых $P\tilde{R}_{\diamond}(1)$ и $PR_{\diamond}(1)$ представляют собой подходящие алгебраическо-геометрические конструкции для правильного понимания соответственно двух- и трехкубитных состояний как структур для реализации так называемых “магического” квадрата и “магической” пентаграммы Мермина–Переса [12]. Квадрат Мермина–Переса состоит из квадратной (3×3) -решетки, состоящей из девяти четырехмерных операторов (или матриц) с вырожденными собственными значениями ± 1 . Все три оператора в каждой строке и в каждом столбце взаимно коммутируют друг с другом, и каждый из них является произведением двух других операторов той же строки или того же столбца, за исключением последнего столбца, где появляется знак минус. Алгебраическое правило для собственных значений вступает в противоречие с аналогичным правилом для операторов, что и лежит в основе доказательства теоремы Кохена–Шпеккера [13] для этого частного случая. Объяснение такому сбивающему с толку поведению состоит в том, что операторы каждой из трех строк и каждого из двух столбцов имеют общий ортогональный базис *незацепленных* собственных состояний, в то время как операторы третьего столбца имеют общую базу *максимально зацепленных* состояний. Мы установим взаимно однозначное соответствие между наблюдаемыми квадрата Мермина–Переса и точками проективной прямой $P\tilde{R}_{\diamond}(1)$. Весьма близкое явление наблюдается в случае трех кубитов, когда квадрат заменяется пентаграммой, включающей десять операторов. Геометрическое объяснение здесь будет основываться на свойствах окрестности точки проективной прямой $PR_{\diamond}(1)$. Эти и некоторые другие близкие задачи квантовой механики будут детально рассмотрены во второй части настоящей работы [14].

Благодарности. М. Санига выражает благодарность М. Минаровичу за ряд тонких замечаний и предложений, П. Бендику за аккуратную подготовку рисунков и Р. Комжику за помощь в вопросах, связанных с компьютером. Настоящая работа была частично поддержана Science and Technology Assistance Agency (Республика Словакия), контракт № APVT-51-012704, VEGA (Республика Словакия), грант № 2/6070/26, и ECO-NET (Франция), грант № 12651NJ “Геометрии над конечными кольцами и свойства взаимно несмещенных базисов”.

Список литературы

- [1] G. Törner, F.D. Veldkamp, *J. Geom.*, **42** (1991), 180–200.
- [2] M. Saniga, M. Planat, *J. Phys. A*, **39** (2006), 435–440; [math-ph/0506057](#).
- [3] M. Saniga, M. Planat, *Chaos Solitons Fractals*, [math.NT/0601261](#).
- [4] F.D. Veldkamp, *Geom. Dedicata*, **11** (1981), 285–308; “Projective ring planes and their homomorphisms”, *Rings and Geometry* (Istanbul, 1984), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **160**, eds. R. Kaya, P. Plaumann, K. Strambach, Reidel, Dordrecht, 1985,

- 289–350; “Projective ring planes: some special cases”, *Proc. Conf. on Combinatorial and Incidence Geometry: Principles and Applications* (La Mendola, 1982), *Rend. Sem. Mat. Brescia*, **7**, Vita e Pensiero, Milan, 1984, 609–615.
- [5] F. D. Veldkamp, “Geometry over rings”, *Handbook of incidence geometry*, ed. F. Buekenhout, North-Holland, Amsterdam, 1995, 1033–1084.
- [6] J. Hjelmslev, *Hamb. Math. Abh.*, **2** (1923), 1–36; W. Klingenberg, *Math. Z.*, **60** (1954), 384–406; E. Kleinfeld, *Illinois J. Math.*, **3** (1959), 403–407; P. Dembowski, *Finite geometries*, Springer, Berlin, New York, 1968; D. A. Drake, D. Jungnickel, “Finite Hjelmslev planes and Klingenberg epimorphism”, *Rings and Geometry*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **160**, eds. R. Kaya, P. Plaumann, K. Strambach, Reidel, Dordrecht, 1985, 153–231.
- [7] J. B. Fraleigh, *A first course in abstract algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1994; B. R. McDonald, *Finite rings with identity*, Pure Appl. Math., **28**, Dekker, New York, 1974; R. Raghavendran, *Compos. Math.*, **21** (1969), 195–229.
- [8] A. Herzer, “Chain geometries”, *Handbook of incidence geometry*, ed. F. Buekenhout, North-Holland, Amsterdam, 1995, 781–842.
- [9] A. Blunck, H. Havlicek, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **70** (2000), 287–299.
- [10] A. Blunck, H. Havlicek, *Math. Pannon.*, **14** (2003), 113–127.
- [11] H. Havlicek, *Quad. Sem. Mat. Brescia*, **11** (2006), 1–63;
<http://www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/dd-laguerre.pdf>.
- [12] N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.*, **65**:3 (1993), 803–815.
- [13] S. Kochen, E. Specker, *J. Math. Mech.*, **17** (1967), 59–87.
- [14] М. Санига, М. Планат, *ТМФ*, **151**:2 (2007), 219–227.

Поступила в редакцию 21.07.2006