Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Пехерсторфер, В. П. Спиридонов, А. С. Жеданов,
Цепочка Тоды, функция Стильтеса и ортогональные по-
линомы, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 1, 81–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6013>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:03:54

© 2007 г.

Ф. Пехерсторфер*, В. П. Спиридонов†,

А. С. Жеданов‡

ЦЕПОЧКА ТОДЫ, ФУНКЦИЯ СТИЛТЬЕСА И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

Обсуждаются связи между теорией ортогональных полиномов, определителями Ганкеля и неограниченной одномерной цепочкой Тоды. В частности, показано, что уравнения движения цепочки Тоды эквивалентны уравнению Риккати для функции Стильтеса. Детально рассмотрены некоторые примеры функций Стильтеса с явной (гипергеометрической или эллиптической) зависимостью от времени.

Ключевые слова: интегрируемые системы, цепочка Тоды, ортогональные полиномы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, множество монических полиномов, удовлетворяющих трехчленному рекуррентному соотношению [1]

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + u_nP_{n-1}(x) \quad (1.1)$$

со стандартными начальными условиями

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - b_0.$$

Если $u_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$, то существует линейный невырожденный функционал σ такой, что полиномы $P_n(x)$ являются ортогональными полиномами [1]

$$\langle \sigma, P_n(x)P_m(x) \rangle = h_n\delta_{nm}, \quad (1.2)$$

где $h_0 = 1$, $h_n = u_1u_2 \dots u_n \neq 0$ – нормировочные постоянные. При определенных условиях функционал σ однозначно определяется моментами

$$c_n = \langle \sigma, x^n \rangle.$$

*Institute for Analysis and Computational Mathematics, Johannes Kepler University of Linz, A-4040 Linz, Austria. E-mail: franz.peherstorfer@jku.at

†Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: spiridon@theor.jinr.ru

‡Донецкий физико-технический институт, Донецк, Украина.
E-mail: zhedanov@yahoo.com

j -Ассоциированные полиномы $P_n^{(j)}(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$xP_n^{(j)}(x) = P_{n+1}^{(j)}(x) + b_{n+j}P_n^{(j)}(x) + u_{n+j}P_{n-1}^{(j)}(x) \quad (1.3)$$

с начальными условиями

$$P_0^{(j)}(x) = 1, \quad P_1^{(j)}(x) = x - b_j.$$

Известно, что выполняется следующее трехчленное рекуррентное соотношение для ассоциированных полиномов [2]:

$$P_n^{(j)}(x) = (x - b_j)P_{n-1}^{(j+1)}(x) - u_{j+1}P_{n-2}^{(j+2)}(x). \quad (1.4)$$

Ассоциированные полиномы определяют второе независимое решение трехчленного рекуррентного соотношения (1.1) с одним и тем же спектральным параметром x . Точнее, $P_n(x)$ и $P_{n-j}^{(j)}(x)$, $j > 0$, являются двумя такими линейно независимыми решениями. Имеется полезное тождество для казоратиана ассоциированных полиномов

$$P_{n-1}^{(k+1)}(x)P_{n-1}^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)P_{n-2}^{(k+1)}(x) = u_{k+1}u_{k+2} \dots u_{k+n-1}. \quad (1.5)$$

Функция Стильеса $F(z)$ определяется следующим формальным степенным рядом:

$$F(z) = \frac{1}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^{n+1}} + \dots, \quad (1.6)$$

т.е. она служит производящей функцией моментов c_n . Во всей статье, за исключением раздела 5, мы подразумеваем стандартную нормировку $c_0 = \langle \sigma, 1 \rangle = 1$. Очевидным образом функция Стильеса допускает эквивалентное представление

$$F(z) = \langle \sigma, (z - x)^{-1} \rangle, \quad (1.7)$$

где $(z - x)^{-1} = 1/z + x/z^2 + \dots + x^n/z^{n+1} + \dots$ — разложение в формальный ряд по переменной x/z . В формуле (1.7) подразумевается, что функционал σ “действует” на переменную x .

Введем также функции второго рода $F_n(z)$ с помощью формального определения

$$F_n(z) = \langle \sigma, P_n(x)(z - x)^{-1} \rangle. \quad (1.8)$$

Очевидно, что эти функции удовлетворяют тому же самому рекуррентному соотношению

$$zF_n(z) = F_{n+1}(z) + b_nF_n(z) + u_nF_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

Однако при $n = 0$ имеем $F_0(z) = F(z)$, и из равенства (1.7) следует, что

$$zF(z) = F_1(z) + b_0F(z) + 1.$$

Если положить формально

$$u_0F_{-1}(z) := 1, \quad (1.10)$$

то рекуррентное соотношение (1.9) будет выполняться и при $n = 0$ (для этого необходимо $u_0 \neq 0$).

Обозначим через $F^{(j)}(z)$ функции Стильтеса, соответствующие j -м ассоциированным полиномам $P_n^{(j)}(x)$. Тогда выполняется хорошо известное соотношение (выведенное Стильтесом)

$$F^{(j)}(z) = \frac{F_j(z)}{u_j F_{j-1}(z)},$$

которое приводит к двухчленному рекуррентному соотношению, связывающему функции $F^{(j+1)}(z)$ и $F^{(j)}(z)$:

$$z - b_j - u_{j+1} F^{(j+1)}(z) = \frac{1}{F^{(j)}(z)}. \quad (1.11)$$

Для полноты рассмотрения приведем также формулу, связывающую $F_n(z)$, $P_n(z)$ и $P_{n-1}^{(1)}(z)$:

$$F_n(z) = F(z)P_n(z) - P_{n-1}^{(1)}(z). \quad (1.12)$$

Из этой формулы легко увидеть справедливость асимптотического разложения

$$\frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = F(z) + O(z^{-2n-1}), \quad (1.13)$$

играющего важную роль в теории аппроксимаций Паде [3].

2. УРАВНЕНИЯ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Цепочка Тоды определяется в классической механике как система взаимодействующих частиц с гамильтонианом [4]

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k^2 + \sum_{k=N_1}^{N_2-1} e^{q_k - q_{k+1}}, \quad (2.1)$$

где p_k и q_k – стандартные канонически-сопряженные динамические переменные со скобками Пуассона $\{q_k, q_l\} = \{p_k, p_l\} = 0$, $\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}$. Граничные значения N_1 , N_2 могут быть конечными или бесконечными. Если $N_1 = 0$ и $N_2 = N < \infty$, то мы имеем конечную цепочку Тоды, состоящую из $N + 1$ частиц (иногда эта модель называется “молекулой Тоды”). Если $N_1 = 0$ и $N_2 = \infty$, то мы имеем полубесконечную (или неограниченную) цепочку Тоды. Наконец, если $N_1 = -\infty$, $N_2 = \infty$, мы имеем двустороннюю неограниченную цепочку Тоды. Ниже мы рассматриваем все три возможности.

Гамильтониан (2.1) приводит к уравнениям движения

$$\dot{q}_k = \{q_k, H\} = p_k, \quad \dot{p}_k = e^{q_{k-1} - q_k} - e^{q_k - q_{k+1}}.$$

Ниже мы рассматриваем открытые конечные или полубесконечные цепочки, характеризуемые граничными условиями $q_{N_1-1} = -\infty$, $q_{N_2+1} = \infty$.

Если определить переменные u_k и b_k как

$$b_k = -p_k, \quad u_k = e^{q_{k-1}-q_k}, \quad (2.2)$$

то уравнения цепочки Тоды принимают вид

$$\dot{b}_k = u_{k+1} - u_k, \quad \dot{u}_k = u_k(b_k - b_{k-1}). \quad (2.3)$$

Граничные условия открытой цепочки имеют вид

$$u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0. \quad (2.4)$$

Для полубесконечной цепочки Тоды имеются единственное граничное условие

$$u_0(t) = 0 \quad (2.5)$$

и условие невырожденности $u_n \neq 0$, $n > 0$. Случаи $u_j(t) = 0$ могут быть преобразованы в (2.5) сдвигом $n \rightarrow n - j$. Наконец, для двусторонней бесконечной цепочки граничных условий нет, т.е. коэффициенты $u_n(t)$, $b_n(t)$ определены для всех $n \in \mathbb{Z}$ с условием $u_n \neq 0$.

Из уравнений (2.3) при $n = 0$ находим $\dot{b}_0 = u_1 - u_0$. Следовательно, для ограниченной цепочки ($u_0 = 0$) это уравнение принимает вид $\dot{b}_0 = u_1$. Как следствие, все последующие коэффициенты u_n , b_n , $n > 0$, выражаются через коэффициент $b_0(t)$ единственным образом. Действительно, $u_1 = \dot{b}_0$, $b_1 = \dot{u}_1/u_1 + b_0$ и т.д. Что можно сказать об отрицательных значениях n в ограниченном случае? Ясно, что коэффициенты $b_{-1}, u_{-1}, b_{-2}, u_{-2}, \dots$ независимы от $b_0(t)$. Действительно, $\dot{u}_0 = u_0(b_0 - b_{-1}) = 0$ и $\dot{b}_{-1} = u_0 - u_{-1} = -u_{-1}$ и т.д. Следовательно, начиная с произвольной функции $b_{-1}(t)$ можно найти все остальные коэффициенты $u_{-1}, b_{-2}, u_{-2}, \dots$ единственным способом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Решения уравнений ограниченной цепочки Тоды u_n , b_n , $n > 0$, однозначно определяются произвольной (гладкой) функцией $b_0(t)$. Коэффициенты u_n , b_n , $n < 0$, не зависят от $b_0(t)$ и однозначно определяются некоторой заданной функцией $b_{-1}(t)$. Это значит, что условие $u_0 = 0$ расщепляет уравнения цепочки Тоды на два независимых множества с $n > 0$ и $n < 0$.

Что касается неограниченного случая, т.е. уравнений (2.3) при $u_0 \neq 0$, то для них можно сформулировать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для неограниченной цепочки Тоды достаточно зафиксировать (гладкие) функции $b_0(t)$ и $u_0(t)$ для однозначного определения всех других коэффициентов u_k , b_k для положительных и отрицательных значений k .

Действительно, из уравнений (2.3) находим $u_1 = \dot{b}_0 + u_0$. Тогда очевидно, что уравнения цепочки Тоды выражают однозначным образом коэффициенты $b_1, u_2, \dots$ через b_0 и u_0 . Аналогично из уравнений $\dot{u}_0 = u_0(b_0 - b_{-1})$ находим $b_{-1}(t)$, и соответственно все другие коэффициенты $u_{-1}, b_{-2}, \dots$ также определены однозначным образом. В результате функции u_n и b_n определяются в виде рациональных комбинаций u_0 , b_0 и их производных произвольного порядка.

3. СВЯЗЬ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ

Мы хотим установить соответствие между уравнениями неограниченной цепочки Тоды (2.3) и дифференциальными уравнениями для функций Стилтеса для ортогональных полиномов. Для конечной и полубесконечной цепочек Тоды такое соответствие рассматривалось, например, в работах [5]. Обычно неограниченная цепочка Тоды изучается с помощью матричной спектральной функции (см., например, работы [6], [7]). Здесь мы обсуждаем альтернативный подход, основанный на стандартных ортогональных полиномах и (нематричной) функции Стилтеса, который был предложен в работе [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $P_n(x; t)$ обозначает систему ортогональных полиномов, удовлетворяющих трехчленному рекуррентному соотношению (1.1) с рекуррентными коэффициентами $u_n(t) \neq 0$, $n > 0$, и $b_n(t)$, $n \geq 0$, зависящими от параметра t . Пусть $F(z; t)$ обозначает функцию Стилтеса, определенную соотношением (1.7). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(а) коэффициенты $u_n(t)$ и $b_n(t)$ удовлетворяют уравнениям неограниченной цепочки Тоды (2.3) с $u_0(t)$ и $b_0(t)$, взятыми в качестве произвольных начальных функций времени;

(б) функция Стилтеса $F(z; t)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{F}(z; t) = -1 + (z - b_0)F(z; t) - u_0 F^2(z; t); \quad (3.1)$$

(в) функция Стилтеса $F^{(k)}(z; t)$ k -ассоциированных полиномов удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{F}^{(k)}(z; t) = -1 + (z - b_k)F^{(k)}(z; t) - u_k (F^{(k)}(z; t))^2; \quad (3.2)$$

(г) полиномы $P_n(x; t)$ удовлетворяют соотношению

$$\dot{P}_n(x; t) = -u_n P_{n-1}(x; t) + u_0 P_{n-1}^{(1)}(x; t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

где $P_{n-1}^{(1)}(x; t)$ являются $k = 1$ ассоциированными полиномами, определенными в (1.3);

(д) k -ассоциированные полиномы $P_n^{(k)}(x; t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{P}_n^{(k)}(x; t) = -u_{n+k} P_{n-1}^{(k)}(x; t) + u_k P_{n-1}^{(k+1)}(x; t), \quad (3.4)$$

где $n = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а)→(д). Легко видеть, что соотношения (3.4) при $n = 1$ и $n = 2$ и произвольном k эквивалентны уравнениям цепочки Тоды (2.3). Для произвольных n равенства (3.4) доказываются с помощью индукции по n и рекуррентного соотношения (1.4).

(д)→(г). Это очевидно.

(г)→(а). Достаточно продифференцировать рекуррентное соотношение (1.1) по t и заменить $\dot{P}_n(z; t)$ правой частью выражения (3.3). Тогда все члены, содержащие ассоциированные полиномы $P_n^{(1)}(x; t)$, сокращаются благодаря рекуррентному

соотношению для этих полиномов. Оставшееся соотношение приводит к равенствам (2.3).

(б)→(в) и (б)→(а). Начиная с уравнения Риккати (3.1) и приравнявая члены $\propto z^{-2}$ и $\propto z^{-3}$ в разложениях в степенные ряды, приходим к уравнениям $\dot{b}_0 = u_1 - u_0$ и $\dot{u}_1 = u_1(b_1 - b_0)$, совпадающим с уравнениями цепочки Тоды при $n = 0, 1$. Затем используем равенство (1.11), чтобы непосредственно проверить, что функция Стильтеса $F^{(1)}(z)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{F}^{(1)} = -1 + (z - b_1)F^{(1)} - u_1F^{(1)}.$$

Теперь утверждение (в) следует по индукции. Одновременно по той же индукции получаем уравнения (2.3). Следовательно, мы доказали импликации (б)→(а) и (б)→(в).

(д)→(в). Возьмем асимптотическое разложение

$$F^{(k)}(z; t) = \frac{P_{n-1}^{(k+1)}(z; t)}{P_n^{(k)}(z; t)} + O(z^{-2n-1}),$$

продифференцируем его по t и применим равенство (3.4):

$$\begin{aligned} \dot{F}^{(k)}(z) &= \frac{\dot{P}_{n-1}^{(k+1)}(z)}{P_n^{(k)}(z)} - \frac{P_{n-1}^{(k+1)}(z)\dot{P}_n^{(k)}(z)}{(P_n^{(k)}(z))^2} + O(z^{-2n-1}) = \\ &= \frac{u_{n+k}(P_{n-1}^{(k+1)}(z)P_{n-1}^{(k)}(z) - P_n^{(k)}(z)P_{n-2}^{(k+1)}(z))}{(P_n^{(k)}(z))^2} + \\ &\quad + \frac{u_{k+1}P_{n-2}^{(k+2)}(z)P_n^{(k)}(z) - u_k(P_{n-1}^{(k+1)}(z))^2}{(P_n^{(k)}(z))^2} + O(z^{-2n-1}) = \\ &= \frac{u_{k+1}P_{n-2}^{(k+2)}(z)P_n^{(k)}(z) - u_k(P_{n-1}^{(k+1)}(z))^2}{(P_n^{(k)}(z))^2} + O(z^{-2n}), \end{aligned}$$

где мы использовали тождество для казоратиана (1.5). Теперь использование рекуррентной формулы (1.4) дает

$$\begin{aligned} \dot{F}^{(k)}(z; t) &= -1 + \frac{(z - b_k)P_{n-1}^{(k+1)}(z; t)}{P_n^{(k)}(z; t)} - \\ &\quad - u_k \left(\frac{P_{n-1}^{(k+1)}(z; t)}{P_n^{(k)}(z; t)} \right)^2 + O(z^{-2n}). \end{aligned}$$

Используя то же самое асимптотическое разложение для функции Стильтеса, можно переписать это соотношение в виде

$$\dot{F}^{(k)}(z; t) + 1 - (z - b_k)F^{(k)}(z; t) + u_k(F^{(k)}(z; t))^2 = O(z^{-2n}).$$

Мы видим, что левая часть этого равенства никак не зависит от n , в то время как правая часть зависит от этой переменной и асимптотически равна нулю. Это

возможно только в том случае, если левая часть тождественно равна нулю. Таким образом, получаем уравнение (3.2).

(в)→(б). Очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия необходимости теоремы 1 были доказаны в работе [2] (теорема 3), и наш новый результат состоит в доказательстве условий достаточности.

Для полноты укажем кратко на связь между ортогональными полиномами и цепочкой Вольтерра, определенной системой нелинейных уравнений

$$\dot{v}_n = v_n(v_{n+1} - v_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

для переменных $v_n(t)$. Существует изоморфизм между решениями уравнений цепочек Тоды и Вольтерра (см., например, работы [2], [8]), однако полезно рассмотреть цепочку Вольтерра отдельно.

Напомним, что симметричные ортогональные полиномы $S_n(z)$ определяются рекуррентным соотношением

$$S_{n+1}(x) + v_n S_{n-1}(x) = x S_n(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

и начальными условиями $S_0(x) = 1$, $S_1(x) = x$. Очевидно, что эти полиномы обладают четностью: $S_n(-x) = (-1)^n S_n(x)$. Более того, известно, что

$$S_{2n}(x) = P_n(x^2), \quad S_{2n+1}(x) = x Q_n(x^2), \quad (3.7)$$

где $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ – обычные ортогональные полиномы такие, что

$$Q_n(x) = \frac{P_{n+1}(x) - A_n P_n(x)}{x}, \quad A_n = \frac{P_{n+1}(0)}{P_n(0)}, \quad (3.8)$$

т.е. полиномы $Q_n(x)$ получаются преобразованием Кристоффеля из полиномов $P_n(z)$ [1]. Легко проверить, что если рекуррентные коэффициенты v_n удовлетворяют уравнениям Вольтерра (3.5) при $n = 2, 3, \dots$, то рекуррентные коэффициенты b_n и u_n полиномов $P_n(x)$, $Q_n(x)$ удовлетворяют уравнениям Тоды (2.3) для $n = 1, 2, \dots$, и наоборот.

Ограниченная цепочка Вольтерра определяется условием $v_0 = 0$. В этом случае при заданной функции $v_1(t)$ можно определить все другие коэффициенты $v_2(t)$, $v_3(t)$ прямо из уравнений (3.5). Переменные с отрицательным индексом v_n , $n = -1, -2, \dots$, не зависят от v_1 и однозначно определяются, если зафиксировать $v_{-1}(t)$. Неограниченная цепочка Вольтерра соответствует случаю $v_0 \neq 0$. Тогда достаточно зафиксировать две начальные функции $v_0(t)$ и $v_1(t)$, и все остальные $v_{-1}, v_{\pm 2}, v_{\pm 3}, \dots$ определяются однозначным образом.

Функция Стильтеса $F(z)$ для симметричных полиномов $S_n(z)$ содержит только нечетные степени $1/z$:

$$F(z) = \frac{1}{z} + \frac{c_2}{z^3} + \dots + \frac{c_{2n}}{z^{2n+1}} + \dots, \quad (3.9)$$

поскольку все нечетные моменты для таких полиномов обращаются в нуль: $c_{2n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Уравнения неограниченной цепочки Вольтерра (3.5) эквивалентны любому из условий

- (а) $\dot{S}_n(x; t) = -v_n v_{n-1} S_{n-2}(x; t) + v_0 v_1 S_{n-2}^{(2)}(x; t)$,
- (б) $\dot{F}(z; t) = -z + (z^2 + v_0 - v_1)F(z; t) - z v_0 F^2(z; t)$,
- (в) $\dot{S}_n^{(k)}(x; t) = -v_{n+k} v_{n+k-1} S_{n-2}^{(k)}(x; t) + v_k v_{k+1} S_{n-2}^{(k+2)}(x; t)$,
- (г) $\dot{F}^{(k)}(z; t) = -z + (z^2 + v_k - v_{k+1})F^{(k)}(z; t) - z v_k (F^{(k)}(z; t))^2$.

Доказательство этого утверждения схоже со случаем неограниченной цепочки Тоды, и мы опускаем его.

Вернемся теперь к цепочке Тоды и поставим естественный вопрос: возможно ли представить ее уравнения движения в неограниченном случае в виде, похожем на случай ограниченной цепочки? Для его изучения будем искать уравнения вида

$$\dot{\Phi}_n(x; t) = -u_n \Phi_{n-1}(x; t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.10)$$

где $\Phi_n(x; t)$ – линейная комбинация двух независимых решений трехчленного рекуррентного соотношения для ортогональных полиномов $P_n(x; t)$,

$$\Phi_n(x; t) = Q_1(x; t)P_n(x; t) + Q_2(x; t)P_{n-1}^{(1)}(x; t). \quad (3.11)$$

Коэффициенты $Q_{1,2}(x; t)$ не зависят от n , но они могут зависеть от t и x . Если такая функция $\Phi_n(x; t)$ существует, то легко проверить, что условие (3.10) подразумевает справедливость уравнений неограниченной цепочки Тоды (2.3). Действительно, по построению функции $\Phi_n(x; t)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\Phi_{n+1}(x; t) + b_n \Phi_n(x; t) + u_n \Phi_{n-1}(x; t) = x \Phi_n(x; t). \quad (3.12)$$

Дифференцируя (3.12) по t и применяя анзац (3.10), приходим к уравнениям (2.3) (подразумевается, что $\Phi_n(x; t) \neq \Phi_{n-1}(x; t)$ как функции времени).

Наоборот, из уравнений неограниченной цепочки Тоды следует, что всегда можно найти такие функции $\Phi_n(x; t)$. Действительно, рассмотрим ограничения на коэффициенты $Q_{1,2}(x; t)$, при которых выполняется соотношение (3.10). Подставляя (3.11) в (3.10) и используя соотношения (3.4), получаем

$$\dot{\Phi}_n = -u_n \Phi_{n-1} + (\dot{Q}_1 - Q_2)P_n(x; t) + (\dot{Q}_2 + (x - b_0)Q_2 + u_0 Q_1)P_{n-1}^{(1)}(x; t).$$

Таким образом, достаточно положить

$$Q_2 = \dot{Q}_1, \quad \dot{Q}_2 + (x - b_0)Q_1 + u_0 Q_1 = 0. \quad (3.13)$$

Условия (3.13) эквивалентны линейному дифференциальному уравнению второго порядка для неизвестной функции $Q_1(x; t)$:

$$\ddot{Q}_1 + (x - b_0)\dot{Q}_1 + u_0 Q_1 = 0. \quad (3.14)$$

Оно имеет два независимых решения $Q_1^{(1)}$ и $Q_1^{(2)}$, т.е. имеются две допустимые функции $\Phi_n(x; t)$, удовлетворяющие необходимому условию (3.10). Для функции

$$Y(x; t) = -\frac{Q_1}{\dot{Q}_1} \quad (3.15)$$

получаем уравнение Риккати

$$\dot{Y} = -1 + (x - b_0)Y - u_0 Y^2, \quad (3.16)$$

которое совпадает с уравнением для функции Стильтеса $F(x; t)$ (3.1). Следовательно, уравнение (3.16) имеет решение $Y(x; t) = F(x; t) = 1/x + O(x^{-2})$. Для него мы получаем

$$\begin{aligned} \Phi_n(x; t) &= Q_1(x; t)P_n(x; t) + \dot{Q}_1(x; t)P_{n-1}^{(1)}(x; t) = \\ &= Q_1 P_n - \frac{Q_1}{F} P_{n-1}^{(1)} = \frac{Q_1}{F} F_n(x; t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $F_n(x) = F(x)P_n(x) - P_{n-1}^{(1)}(x)$ – решение второго рода для трехчленного рекуррентного соотношения (3.12). Используя условие (1.10), можно убедиться, что для $n = 0$ анзац (3.10) принимает вид

$$\frac{dQ_1}{dt} = -u_0 \frac{Q_1 F_{-1}}{F} = -\frac{Q_1}{F},$$

что совпадает с условием (3.15). Таким образом, первое решение уравнения (3.14) соответствует функции $\Phi_n(x; t)$, совпадающей (с точностью до множителя, не зависящего от n) с решением второго рода $F_n(x; t)$ рекуррентного соотношения (3.12).

Второе решение $Q_1^{(2)}$ можно получить, если заметить, что уравнение Риккати (3.1) допускает решение $F(x; t)$ с другим асимптотическим поведением при $x \rightarrow \infty$. Такие решения уже не являются настоящими функциями Стильтеса; тем не менее они могут использоваться для построения $Q_1^{(2)}$. Действительно, при малых x мы можем подставить в (3.16) разложение в степенной ряд

$$Y(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t) x^k \quad (3.18)$$

с некоторыми неизвестными коэффициентами $g_k(t)$. (Отрицательные степени x в этом разложении недопустимы, так как это противоречит (3.16).) Подставляя (3.18) в (3.16), приходим к бесконечной системе уравнений для коэффициентов $g_k(t)$:

$$\dot{g}_k = g_{k-1} - b_0 g_k - u_0 \sum_{i=0}^k g_i g_{k-i}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Для g_0 возникает уравнение Риккати

$$\dot{g}_0 = -1 - b_0 g_0 - u_0 g_0^2. \quad (3.20)$$

Таким образом, сначала необходимо решить это уравнение для g_0 , а затем все остальные коэффициенты $g_1, g_2, \dots$ последовательно определяются как решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка (3.19) (в уравнении для g_k все $g_0, g_1, \dots, g_{k-1}$ определены на предыдущих шагах). Таким образом, в принципе можно получить две линейно независимые функции $\Phi_n(x; t)$, удовлетворяющие уравнению (3.10).

4. ПРОДОЛЖЕНИЕ К ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ n . СМЕЖНЫЕ ПОЛИНОМЫ

Теперь мы рассмотрим более детально процедуру продолжения от $n > 0$ к $n < 0$. Будем подразумевать, что $u_0 \neq 0$ (неограниченный случай) и, более того, что $u_n \neq 0$ для всех значений $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае можно продолжить рекуррентное соотношение (1.1) ко всем отрицательным $n = -1, -2, \dots$ и определить функции $P_n(x)$ при $n < 0$. Аналогичным образом, продолжением рекуррентного соотношения (1.3), можно определить функции $P_n^{(1)}(x)$ при $n < 0$ и построить аналоги соотношений (3.3) при $n < 0$.

Прежде всего из начальных условий для ортогональных полиномов находим

$$P_0(x; t) = P_0^{(1)}(x; t) = 1, \quad P_{-1}(x; t) = P_{-1}^{(1)}(x; t) = 0.$$

Взяв $n = -1$ в (1.1) и (1.3), получаем

$$P_{-2}(x; t) = -\frac{1}{u_{-1}}, \quad P_{-2}^{(1)}(x; t) = -\frac{1}{u_0}. \quad (4.1)$$

Взяв $n = -2$ в этих рекуррентных соотношениях и используя (4.1), находим

$$P_{-3}(x; t) = -\frac{x - b_{-2}}{u_{-1}u_{-2}}, \quad P_{-3}^{(1)}(x; t) = -\frac{x - b_{-1}}{u_0u_{-1}}. \quad (4.2)$$

Обе функции $P_{-3}(x)$ и $P_{-3}^{(1)}(x)$ являются полиномами x первой степени. По индукции легко доказать, что и $P_{-n}(x)$, и $P_{-n}^{(1)}(x)$ при $n \geq 2$ являются (немоническими) полиномами по переменной x степени $n - 2$. Мониические полиномы

$$Q_n(x; t) = -u_0\kappa_{n+1}P_{-n-2}^{(1)}(x; t), \quad Q_n^{(1)}(x; t) = -\kappa_{n+2}P_{-n-2}(x; t), \quad (4.3)$$

где $n = 0, 1, \dots$ и $\kappa_n = u_{-1}u_{-2} \dots u_{-n+1}$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} Q_{n+1} + \tilde{b}_n Q_n + \tilde{u}_n Q_{n-1} &= x Q_n, \\ Q_{n+1}^{(1)} + \tilde{b}_{n+1} Q_n^{(1)} + \tilde{u}_{n+1} Q_{n-1}^{(1)} &= x Q_n^{(1)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

с начальными условиями $Q_{-1} = Q_{-1}^{(1)} = 0$, $Q_0 = Q_0^{(1)} = 1$ и рекуррентными коэффициентами

$$\tilde{b}_n = b_{-n-1}, \quad \tilde{u}_n = u_{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Очевидно, что $Q_n^{(1)}(x; t)$ – ассоциированные полиномы для $Q_n(x; t)$, так что полиномы $P_n(x; t)$ и $P_n^{(1)}(x; t)$ меняются ролями при отрицательных n . Уравнения Тоды в терминах $\tilde{u}_n$ и $\tilde{b}_n$ принимают вид

$$\dot{\tilde{b}}_n = -\tilde{u}_{n+1} + \tilde{u}_n, \quad \dot{\tilde{u}}_n = -\tilde{u}_n(\tilde{b}_n - \tilde{b}_{n-1}). \quad (4.6)$$

Таким образом, для этих переменных мы получаем уравнения Тоды (2.3) с отраженным временем, $t \rightarrow -t$. Поэтому полиномы $Q_n(x; t)$ удовлетворяют соотношению

$$\dot{Q}_n(x; t) = u_{-n}Q_{n-1}(x; t) - u_0Q_{n-1}^{(1)}(x; t), \quad (4.7)$$

которое является точным аналогом (3.3) для отрицательных значений n .

Ортогональные полиномы $Q_n(x; t)$ невырождены благодаря условию $u_n \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, существует невырожденный линейный функционал $\tilde{\sigma}$ такой, что

$$\langle \tilde{\sigma}, Q_n(x; t) Q_m(x; t) \rangle = 0, \quad (4.8)$$

если $n \neq m$. Определим моменты $\tilde{c}_n = \langle \tilde{\sigma}, x^n \rangle$ и нормируем $\tilde{c}_0 = 1$. Если ввести соответствующую функцию Стилтеса

$$\tilde{F}(z; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k z^{-k-1},$$

то, как и в стандартном случае, она удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{\tilde{F}}(z; t) = 1 + (b_{-1} - z)\tilde{F}(z; t) + u_0 \tilde{F}^2(z; t). \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) отличается от уравнения Риккати (3.1) заменами $b_0 \rightarrow b_{-1}$ и $t \rightarrow -t$. Ясно, что это уравнение полностью характеризует неограниченную цепочку Тоды, так же как и начальное уравнение Риккати (3.1).

Таким образом, видно, что в “отрицательном пространстве” цепочка Тоды может быть описана в терминах ортогональных полиномов $Q_n(x; t)$, полученных продолжением полиномов $P_n^{(1)}(x; t)$ к отрицательным значениям n . Вместо пары функций u_0 и b_0 , характеризующих цепочку Тоды при $n \geq 0$, мы получаем функции u_0 и b_{-1} , характеризующие эту цепочку при $n < 0$. Соотношения пары Лакса (3.10) также продолжают к отрицательным значениям n без проблем.

5. СВЯЗЬ С ОПРЕДЕЛИТЕЛЯМИ ГАНКЕЛЯ

Существует альтернативный подход к неограниченной цепочке Тоды, основанный на формализме определителей Ганкеля [9]. У него есть ряд преимуществ в изучении связей с уравнениями Пенлеве (см., например, работу [10]). В данном разделе мы рассматриваем этот формализм с точки зрения ортогональных полиномов.

Начнем с ортогональных полиномов $P_n(x; t)$, удовлетворяющих трехчленному рекуррентному соотношению (1.1) и рекуррентности (3.3). До настоящего момента мы пользовались нормировкой $c_0 = h_0 = 1$. Однако иногда удобно иметь дело с произвольным $c_0(t) \neq 0$. Замена c_0 приводит только к модификации нормировочного условия

$$\langle \sigma, 1 \rangle = h_0 = c_0, \quad (5.1)$$

в то время как полиномы $P_n(x; t)$ и рекуррентные коэффициенты b_n , u_n остаются теми же самыми. Эта замена эквивалентна умножению функции Стилтеса $F(z; t)$ на $c_0(t)$, т.е. $F(z; t) \rightarrow c_0(t)F(z; t)$. При этом уравнение Риккати принимает вид

$$\dot{F}(z; t) = -c_0 + \left(z - b_0 + \frac{\dot{c}_0}{c_0} \right) F(z; t) - \frac{u_0 F^2(z; t)}{c_0} \quad (5.2)$$

(при $c_0 = 1$ получаем (3.1)). Теперь можно использовать свободу выбора c_0 , чтобы упростить уравнение (5.2). Например, можно выбрать такую $c_0(t)$, что

$$\dot{c}_0 = c_0 b_0. \quad (5.3)$$

Тогда получается уравнение Риккати

$$\dot{F} = -c_0 + zF - \frac{u_0 F^2}{c_0}, \quad (5.4)$$

эквивалентное бесконечной системе уравнений для моментов

$$\dot{c}_0 = c_1, \quad \dot{c}_n = c_{n+1} - \frac{u_0}{c_0} \sum_{s=0}^{n-1} c_s c_{n-1-s}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

В ограниченном случае $u_0 = 0$ эти уравнения становятся почти тривиальными:

$$\dot{c}_n = c_{n+1}. \quad (5.6)$$

Такая форма уравнений Тоды полезна при анализе некоторых частных задач (см., например, работу [11]).

Нормировочные коэффициенты h_n имеют вид

$$h_0 = c_0, \quad h_n = c_0 u_1 u_2 \dots u_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.7)$$

так что

$$\langle \sigma, P_n(x; t) P_m(x; t) \rangle = h_n(t) \delta_{nm}. \quad (5.8)$$

Теперь мы вводим определители типа Ганкеля

$$H_n(t) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad (5.9)$$

где подразумеваются начальные условия $H_0 = 1$, $H_1 = c_0$.

Из общей теории ортогональных полиномов [1]

$$h_n = \frac{H_{n+1}}{H_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.10)$$

так что

$$u_n = \frac{h_n}{h_{n-1}} = \frac{H_{n-1} H_{n+1}}{H_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

Уравнения Тоды (2.3) приводят к простому соотношению

$$b_n = \frac{\dot{h}_n}{h_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Действительно, из определений (5.7) находим

$$\frac{\dot{h}_n}{h_n} = \frac{\dot{c}_0}{c_0} + \frac{\dot{u}_1}{u_1} + \dots + \frac{\dot{u}_n}{u_n}.$$

Тогда из условия (5.3) и уравнений Тоды немедленно получаем (5.12).

Второе из уравнений (2.3) выполняется автоматически:

$$\frac{\dot{u}_n}{u_n} = \frac{\dot{h}_n}{h_n} - \frac{\dot{h}_{n-1}}{h_{n-1}} = b_n - b_{n-1}.$$

Таким образом, необходимо рассмотреть только первое из уравнений (2.3). С одной стороны, из (5.10) имеем

$$\dot{b}_n = \frac{d}{dt} \frac{\dot{h}_n}{h_n} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{H}_{n+1}}{H_{n+1}} - \frac{d}{dt} \frac{\dot{H}_n}{H_n}. \quad (5.13)$$

С другой стороны, должно быть $\dot{b}_n = u_{n+1} - u_n$. Сравнивая эти два равенства, приходим к соотношению

$$u_n = \frac{d^2}{dt^2} \ln H_n + \rho(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.14)$$

где $\rho(t)$ – произвольная функция t . Потребуем, чтобы соотношение (5.14) выполнялось и при $n = 0$; это приводит к $\rho(t) = u_0$. Таким образом,

$$u_n = \frac{d^2}{dt^2} \ln H_n + u_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.15)$$

и уравнения Тоды сводятся к виду

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln H_n + u_0 = \frac{H_{n-1}H_{n+1}}{H_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (5.16)$$

Теперь мы хотим продолжить это соотношение в область отрицательных значений n .

Сначала рассмотрим случай $n = 0$ в (5.16), что дает

$$H_{-1} = \frac{u_0}{c_0}. \quad (5.17)$$

Взяв $n = -1$, находим аналогичным образом $H_{-2} = u_{-1}u_0^2/c_0^2$. Можно продолжить этот процесс и однозначным образом получить шаг за шагом всю последовательность функций $H_{-1}, H_{-2}, \dots, H_{-n}, \dots$, удовлетворяющих соотношению (5.16).

Остается связать величины $H_{-1}, H_{-2}, \dots, H_{-n}$ с некоторыми определителями Ганкеля (в том же духе, что и для положительных n). Эта проблема легко решается после наблюдения, что замена $n \rightarrow -n$ сохраняет вид соотношений (5.16). Таким образом, получаем для отрицательных n определители Ганкеля

$$H_{-n}(t) = \begin{vmatrix} \tilde{c}_0 & \tilde{c}_1 & \dots & \tilde{c}_{n-1} \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \dots & \tilde{c}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{c}_{n-1} & \tilde{c}_n & \dots & \tilde{c}_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.18)$$

где $\tilde{c}_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, – моменты, соответствующие ортогональным полиномам $Q_n(x; t)$ (4.3). Условие нормировки выглядит теперь так:

$$\tilde{c}_0 = H_{-1} = \frac{u_0}{c_0}. \quad (5.19)$$

Легко проверяется, что

$$\frac{\dot{\tilde{c}}_0}{\tilde{c}_0} = \tilde{b}_0 = b_{-1} \quad (5.20)$$

в соответствии с условием (5.3). Таким образом, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Уравнения движения для неограниченной цепочки Тоды эквивалентны условиям (5.16) для $n \in \mathbb{Z}$, где $H_n(t)$ – определители Ганкеля, описанные в (5.9) для $n > 0$ и в (5.18) для $n < 0$.*

Для функции Стильтеса

$$\tilde{F}(z; t) = \tilde{c}_0 z^{-1} + \tilde{c}_1 z^{-2} + \dots + \tilde{c}_n z^{-n-1} + \dots$$

(с $\tilde{c}_0 = u_0/c_0$) имеем уравнение Риккати

$$\dot{\tilde{F}}(z, t) = -\frac{u_0}{c_0} + z\tilde{F} - c_0\tilde{F}^2, \quad (5.21)$$

что весьма похоже на (5.4). Соответствующие моменты удовлетворяют системе нелинейных уравнений

$$\dot{\tilde{c}}_0 = \tilde{c}_1, \quad \dot{\tilde{c}}_n = \tilde{c}_{n+1} - c_0 \sum_{s=0}^{n-1} \tilde{c}_s \tilde{c}_{n-1-s}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.22)$$

аналогичных (5.5). Система уравнений (5.5) и (5.22) также эквивалентна уравнениям Тоды для неограниченной цепочки.

Теперь можно рассмотреть следующую (обратную) задачу. Из двух произвольных (гладких) функций времени $c_0(t)$ и $u_0(t)$ (с $b_0 = \dot{c}_0/c_0$) соотношения (5.5) и (5.22) рекурсивно определяют единственным образом все моменты $c_1, c_2, \dots$ и $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots$. Из этих моментов можно сконструировать определители Ганкеля $H_n(t)$ (5.9) и (5.18), удовлетворяющие условиям (5.16). Теперь ортогональные полиномы $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ могут быть явно записаны с помощью стандартных формул [1]:

$$P_n(x; t) = \frac{1}{H_n} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{vmatrix}, \quad (5.23)$$

$$Q_n(x; t) = \frac{1}{H_{-n}} \begin{vmatrix} \tilde{c}_0 & \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \dots & \tilde{c}_n \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 & \dots & \tilde{c}_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{c}_{n-1} & \tilde{c}_n & \tilde{c}_{n+1} & \dots & \tilde{c}_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{vmatrix}. \quad (5.24)$$

Видно, что подход к цепочке Тоды, предложенный в работе [9], на самом деле эквивалентен нашему, основанному на двух смежных семействах ортогональных полиномов $P_n(x; t)$ и $Q_n(x; t)$.

Заметим, что в случае ограниченной цепочки Тоды, т.е. при $u_0 = 0$, соотношения

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln H_n = \frac{H_{n-1}H_{n+1}}{H_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.25)$$

были рассмотрены еще Сильвестром и Дарбу, и в настоящее время они известны как теорема Сильвестра для определителей Ганкеля [11], [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Процедура продолжения к отрицательным n сохраняет форму уравнений Тоды при условии отражения времени, $t \rightarrow -t$. Такое отражение появляется также в преобразованиях дуальности для конечной цепочки Тоды, рассмотренных в статье [13]. Однако соотношения ганкелевского типа (5.16) содержат производную второго порядка по t и, следовательно, они инвариантны при этом отражении.

6. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СТИЛТЬЕСА

Гипергеометрическое уравнение имеет вид

$$p(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + q(x)\frac{dy(x)}{dx} + ry(x) = 0, \quad (6.1)$$

где

$$p(x) = x(1-x), \quad q(x) = c - (1+a+b)x, \quad r = -ab$$

и a, b, c – произвольные комплексные параметры. Простой заменой переменной x полином $p(x)$ может быть переведен в общий полином второго порядка. В области $|x| < 1$ при $c \notin \mathbb{Z}$ общее решение (6.1) имеет вид

$$y(x) = A F\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) + B x^{1-c} F\left(\begin{matrix} 1+a-c, 1+b-c \\ 2-c \end{matrix}; x\right), \quad (6.2)$$

где A, B – произвольные константы интегрирования (они могут зависеть от a, b, c) и F обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса:

$$F\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} x^n, \quad (6.3)$$

где $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$ – символ Похгаммера. Используя эквивалентность уравнения Риккати (3.1) неограниченной цепочки Тоды, можно строить решения уравнений Тоды, начиная с явных решений уравнения (6.1).

Подстановка

$$F(z; t) = \frac{\dot{\psi}(z; t)}{u_0(t)\psi(z; t)} \quad (6.4)$$

линеаризует уравнение (3.1) и приводит его к виду Штурма–Лиувилля

$$\ddot{\psi} + \left(b_0 - \frac{\dot{u}_0}{u_0} - z\right)\dot{\psi} + u_0\psi = 0. \quad (6.5)$$

Приняв во внимание уравнения Тоды (2.3), можно записать это уравнение в более компактном виде

$$\ddot{\psi}(z; t) + (\alpha(t) - z)\dot{\psi}(z; t) + \beta(t)\psi(z; t) = 0, \quad (6.6)$$

где $\alpha(t) \equiv b_{-1}(t) = b_0 - \dot{u}_0/u_0$ и $\beta(t) \equiv u_0(t)$. Такие уравнения появились в связи с цепочкой Тоды, например, в работах [14], [15]. В результате проблема построения частных решений уравнений Тоды свелась к анализу уравнения Штурма–Лиувилля (6.6), играющего ключевую роль во многих разделах математики и теоретической физики.

Покажем, что уравнение Риккати (3.1) имеет только одно формальное решение вида

$$F(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) z^{-k-1}, \quad (6.7)$$

где $c_k(t)$ – некоторые функции t с нормировкой $c_0(t) = 1$. Действительно, подставив степенной ряд (6.7) в уравнение (3.1), получаем соотношения

$$\begin{aligned} c_1 &= b_0, & c_2 &= \dot{c}_1 + b_0^2 + u_0, \\ c_{k+1} &= \dot{c}_k + b_0 c_k + u_0 \sum_{s=0}^{k-1} c_s c_{k-1-s}, & k &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6.8)$$

Очевидно, что шаг за шагом мы можем однозначно определить все коэффициенты $c_1(t), c_2(t), \dots$ при заданных (достаточно гладких) функциях $u_0(t)$ и $b_0(t)$. Таким образом, по крайней мере формальное решение вида (6.7) существует всегда. Для уравнения Штурма–Лиувилля (6.6) это означает, что всегда существует формальное решение $\psi(z; t)$ такое, что функция $F(z, t)$, построенная по равенству (6.4), имеет разложение (6.7). Действительно, такая функция имеет вид

$$\psi(z; t) = C(z) \exp \left(\int_{t_0}^t u_0(t') F(z; t') dt' \right), \quad (6.9)$$

где $C(z)$ – произвольная функция z (не зависящая от t).

Удобно определить формальный степенной ряд

$$\int_{t_0}^t u_0(t') F(z; t') dt' = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) z^{-k}, \quad (6.10)$$

где

$$g_k(t) = \int_{t_0}^t u_0(t') c_{k-1}(t') dt'.$$

Из равенства (6.9) находим, что соответствующее решение $\psi(z; t)$ имеет аналогичное формальное разложение в ряд:

$$\psi(z; t) = C(z) \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) z^{-k} \right) = C(z) \sum_{k=0}^{\infty} S_k(t) z^{-k}, \quad (6.11)$$

где коэффициенты $S_k(t)$ (фундаментальные функции Шура) однозначно выражаются через коэффициенты $g_i(t)$ с $i \leq k$. Таким образом, необходимая функция $\psi(z; t)$ также определяется однозначно с точностью до множителя $C(z)$. Общее решение уравнения (6.6)

$$\psi(z; t) = A(z)\chi_1(z; t) + B(z)\chi_2(z; t), \quad (6.12)$$

где $\chi_{1,2}(z; t)$ – два линейно независимых решения этого уравнения, $\dot{\chi}_1\chi_2 - \dot{\chi}_2\chi_1 \neq 0$, имеет две произвольные константы A и B . В зависимости от ситуации определение частных значений этих констант, приводящих к решениям с необходимым асимптотическим поведением, может оказаться весьма трудной задачей.

Теперь мы хотим построить широкий класс гипергеометрических решений уравнения (6.6). Для упрощения обозначений в этом разделе мы опускаем зависимость функций от z , например, мы пишем $\psi(t)$ вместо $\psi(z; t)$.

Сначала произведем в (6.1) следующие замены переменных: $x = x(t)$ и $y(x) = f(x(t))\psi(t)$ для некоторых функций $f(x)$, $\psi(t)$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}(t) + \dot{x}(t) \left(2 \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\ddot{x}(t)}{\dot{x}^2(t)} + \frac{q(x)}{p(x)} \right) \dot{\psi}(t) + \\ + \dot{x}^2(t) \left(\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{q(x)f'(x)}{p(x)f(x)} + \frac{r}{p(x)} \right) \psi(t) = 0, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где штрихи обозначают производные по x . Затем мы отождествляем уравнения (6.6) и (6.13). Из уравнения

$$\dot{x}(t) \left(2 \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\ddot{x}(t)}{\dot{x}^2(t)} + \frac{q(x)}{p(x)} \right) = \alpha(t) - z \quad (6.14)$$

находим

$$f(x(t)) = \sqrt{\dot{x}(t)} \exp \left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t (\alpha(t) - z) dt - \frac{1}{2} \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{q(x)}{p(x)} dx \right). \quad (6.15)$$

Подставляя эту формулу во второе уравнение

$$\dot{x}^2(t) \left(\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{q(x)f'(x)}{p(x)f(x)} + \frac{r}{p(x)} \right) = \beta(t), \quad (6.16)$$

получаем

$$\frac{1}{2} \{x, t\} + \dot{x}^2(t) G(t) = \beta(t) - \frac{1}{4} (\alpha(t) - z)^2 - \frac{1}{2} \dot{\alpha}(t), \quad (6.17)$$

где $\{x, t\}$ – производная Шварца

$$\{x, t\} = \frac{\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)} - \frac{3}{2} \frac{\ddot{x}^2(t)}{\dot{x}^2(t)} \quad (6.18)$$

и

$$G(t) = \frac{4rp(x) - q^2(x) + 2q(x)p'(x) - 2q'(x)p(x)}{4p^2(x)}. \quad (6.19)$$

В главном уравнении (6.17) есть три неизвестные функции: $x(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Поэтому можно формально отобразить уравнения (6.6) на гипергеометрическое дифференциальное уравнение для произвольных $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – для этого достаточно решить

нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка для $x(t)$ (6.17). Однако анализ условий существования аналитических решений этого уравнения сложен; более того, даже если такие решения существуют, они будут определены крайне неявным образом.

Широкий класс явных решений (6.17) находится с помощью следующего приема. Потребуем, чтобы замена независимой переменной $x = x(t)$ не зависела от спектрального параметра z . В результате этого предположения вся z -зависимость в левой части (6.17) может появиться только через функцию $G(t)$, и она должна быть квадратичной, как это диктуется правой частью. Функция $G(t)$ – рациональная функция x и, очевидно, правильная z -зависимость в ней может возникнуть только при условии, что p не зависит от z , функция q линейна по z , а r квадратична по z . Заметим, что аналогичный прием использовался в работах [16] для определения “точно решаемых” потенциалов уравнения Шредингера и в статье [17] для классификации решаемых моделей осцилляций нейтрино.

Очевидно, что линейная зависимость параметров гипергеометрической функции от z

$$a = a_1 z + a_0, \quad b = b_1 z + b_0, \quad c = c_1 z + c_0$$

удовлетворяет выдвинутым требованиям (параметры $b_{0,1}$ и $c_{0,1}$ не надо путать с рекуррентными коэффициентами и моментами, соответственно). Сравнивая теперь коэффициенты перед степенями z в (6.17), мы приходим к трем уравнениям. Члены $\propto z^2$ дают обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = \frac{\pm p(x)}{\sqrt{4a_1 b_1 p(x) + (c_1 - (a_1 + b_1)x)^2}}, \quad (6.20)$$

из которого находится обратная функция $t = t(x)$, определенная элементарным интегралом

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 x^2 + 2(2a_1 b_1 - c_1 a_1 - c_1 b_1)x + c_1^2}}{x(1 - x)} dx.$$

Члены, линейные по z , дают уравнение для $\alpha(t)$. Используя (6.20), находим

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0}{4a_1 b_1 p(x) + (c_1 - (a_1 + b_1)x)^2}, \quad (6.21)$$

где $\alpha_0 = c_1(1 - c_0)$ и

$$\alpha_1 = c_1(a_0 + b_0 - 1) + c_0(a_1 + b_1) - 2(a_1 b_0 + b_1 a_0), \quad \alpha_2 = (a_0 - b_0)(b_1 - a_1).$$

Наконец, константные члены порождают уравнение для $\beta(t)$. Подставляя в него (6.20), находим

$$\beta(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{2} + \left(\frac{\alpha(t)}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \{x, t\} + \frac{\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0}{4(4a_1 b_1 p(x) + (c_1 - (a_1 + b_1)x)^2)}, \quad (6.22)$$

где

$$\beta_0 = c_0(2 - c_0), \quad \beta_1 = 2c_0(a_0 + b_0 - 1) - 4a_0 b_0, \quad \beta_2 = 1 - (a_0 - b_0)^2.$$

Таким образом, мы зафиксировали зависимость от времени начальных функций $b_0(t)$, $u_0(t)$ для уравнений Тоды, обеспечивающую формальное выражение функции Стильтеса $F(z; t)$ в виде отношения гипергеометрических функций Гаусса. Теперь необходимо выбрать случаи с правильной зависимостью от спектрального параметра z , т.е. функций, аналитичных при $z = \infty$ и имеющих асимптотику $F(z; t) \propto 1/z$. В явном виде находим

$$\begin{aligned} F(z; t) &= \frac{\dot{\psi}(t)}{u_0(t)\psi(t)} = \frac{\dot{x}(t)}{u_0(t)} \left(\frac{y'(x)}{y(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} \right) = \\ &= \frac{\dot{x}(t)}{u_0(t)} \left(\frac{y'(x)}{AF\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix}; x\right) + Bx^{1-c}F\left(\begin{smallmatrix} 1+a-c, 1+b-c \\ 2-c \end{smallmatrix}; x\right)} + \frac{1}{2} \left(\frac{z - \alpha(t)}{\dot{x}} - \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2} + \frac{q}{p} \right) \right), \end{aligned} \quad (6.23)$$

где

$$\begin{aligned} y'(x) &= A \frac{ab}{c} F\left(\begin{smallmatrix} a+1, b+1 \\ c+1 \end{smallmatrix}; x\right) + B(1-c)x^{-c}F\left(\begin{smallmatrix} 1+a-c, 1+b-c \\ 2-c \end{smallmatrix}; x\right) + \\ &+ B \frac{(1+a-c)(1+b-c)}{2-c} x^{1-c}F\left(\begin{smallmatrix} 2+a-c, 2+b-c \\ 3-c \end{smallmatrix}; x\right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Для дальнейших шагов необходимо знать асимптотику

$$F\left(\begin{smallmatrix} a_1z + a_0, b_1z + b_0 \\ c_1z + c_0 \end{smallmatrix}; x\right)$$

при $z \rightarrow \infty$. Интересно отметить, что в литературе эта проблема все еще не изучена в общем виде [18]. В качестве примера опишем ниже два различных случая правильного выбора постоянных A и B . Они оба используют дополнительные ограничения

$$a_1 = b_1 = 0,$$

сводящие (6.20) к виду $\dot{x}(t) = \pm x(1-x)/c_1$, или

$$x(t) = \frac{1}{1 + de^{\mp t/c_1}},$$

где d – константа интегрирования. Очевидно, что имеются две возможности зафиксировать $x(t)$, соответствующие различным знакам показателя экспоненты. В обоих случаях имеем

$$\alpha(t) = \frac{a_0 + b_0 - 1}{c_1} x(t) + \frac{1 - c_0}{c_1}.$$

I. Пусть $x(t) = (1 + de^{t/c_1})^{-1}$. Тогда благодаря тонкому сокращению членов находим $f(x) = \text{const}$ и довольно простое выражение для $\beta(t)$:

$$\beta(t) = \frac{a_0 b_0}{c_1^2} x(x-1) = \frac{a_0 b_0}{c_1} \dot{x}(t).$$

Выбрав параметр $B = 0$ и используя равенство $\dot{x}/u_0 = c_1/a_0b_0$, мы получаем функцию Стилтеса

$$F(z; t) = \frac{F\left(\begin{smallmatrix} a_0+1, b_0+1 \\ c_1z+c_0+1 \end{smallmatrix}; x(t)\right)}{(z + c_0/c_1)F\left(\begin{smallmatrix} a_0, b_0 \\ c_1z+c_0 \end{smallmatrix}; x(t)\right)} \quad (6.25)$$

с правильной асимптотикой $F(z; t) = 1/z + O(1/z^2)$ при $z \rightarrow \infty$.

Можно показать, что этот класс функций Стилтеса описывает решения уравнений Тоды для неограниченной цепочки с “разделенными переменными”, которые изучались в работах [15], [19]. Точнее, такие решения возникают из анзаца $u_n(t) = f(t)w(n)$ для некоторых функций $f(t)$ и $w(n)$. С необходимостью такая функция $w(n)$ оказывается полиномом второй степени по n , в то время как функция $b_n(t)$ должна быть линейной по n . Такие рекуррентные коэффициенты соответствуют шефферовскому классу ассоциированных классических ортогональных полиномов, который включает в себя (ассоциированные) полиномы Мейкснера, Поллачека, Кравчука, Шарлье, Лагерра и Эрмита (связь этих полиномов с цепочкой Тоды была рассмотрена также в работе [11]).

II. Пусть $x(t) = (1 + de^{-t/c_1})^{-1}$. Тогда $\beta(t)$ принимает вид

$$\beta(t) = \frac{a_0 + b_0 - 1 - a_0b_0}{c_1^2} x(1 - x) = \frac{a_0 + b_0 - 1 - a_0b_0}{c_1} \dot{x}(t).$$

Зафиксируем $A = 0$, так что сингулярные множители x^{-c} в (6.23) сокращаются. В результате получаем функцию Стилтеса

$$F(z; t) = \frac{c_1}{a_0 + b_0 - 1 - a_0b_0} \left(\frac{c_1z + c_0 - a_0 - b_0}{1 - x} + \frac{(1 + a_0 - c_0 - c_1z)(1 + b_0 - c_0 - c_1z)}{2 - c_0 - c_1z} \frac{F\left(\begin{smallmatrix} 2+a_0-c_0-c_1z, 2+b_0-c_0-c_1z \\ 3-c_0-c_1z \end{smallmatrix}; x\right)}{F\left(\begin{smallmatrix} 1+a_0-c_0-c_1z, 1+b_0-c_0-c_1z \\ 2-c_0-c_1z \end{smallmatrix}; x\right)} \right). \quad (6.26)$$

Используя соотношение

$$F\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix}; x\right) = (1 - x)^{-a} F\left(\begin{smallmatrix} a, c - b \\ c \end{smallmatrix}; \frac{x}{x - 1}\right)$$

и асимптотическое разложение [18]

$$F\left(\begin{smallmatrix} a_0, bz + b_0 \\ bz + c_0 \end{smallmatrix}; x\right) \underset{z \rightarrow \infty}{=} (1 - x)^{-a_0} \left(1 + \frac{a_0(c_0 - b_0)}{bz} \frac{x}{x - 1} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right),$$

сходящееся при $|x/(x - 1)| < 1$, находим

$$\begin{aligned} F\left(\begin{smallmatrix} 1 + a_0 - c_0 - c_1z, 1 + b_0 - c_0 - c_1z \\ 2 - c_0 - c_1z \end{smallmatrix}; x\right) &\underset{z \rightarrow \infty}{=} \\ &\underset{z \rightarrow \infty}{=} (1 - x)^{c_1z + c_0 - a_0 - b_0} \left(1 - \frac{(1 - a_0)(1 - b_0)}{c_1z} x + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Теперь можно проверить, что правильное асимптотическое поведение $F(z; t) = O(1/z)$ при $z \rightarrow \infty$ выполняется благодаря весьма тонкому сокращению постоянных членов и членов, линейных по z .

Уже эти две упрощенные ситуации показывают богатство рассматриваемой проблемы. Было бы интересно узнать, какого типа трехчленное рекуррентное соотношение (или цепная дробь) соответствует наиболее общей функции Стилтеса, выведенной выше, что не известно авторам на данный момент. Мы надеемся отдельно рассмотреть более систематическим образом эту проблему, а также классифицировать все ее предельные случаи (например, связанные с рациональными решениями уравнений Пенлеве).

7. КЛАССИФИКАЦИЯ ФОРМ ТОДЫ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

В этом разделе мы рассматриваем функции Стилтеса, соответствующие формам второй степени, которые удовлетворяют квадратному уравнению [20]

$$A(z; t)F^2(z; t) + B(z; t)F(z; t) + C(z; t) = 0, \quad (7.1)$$

где $A(z; t)$, $B(z; t)$ и $C(z; t)$ – полиномы по z с коэффициентами, зависящими от t . Эти полиномы не могут быть произвольными, поскольку мы требуем, чтобы решения уравнения (7.1)

$$F(z; t) = \frac{B(z; t) \pm \sqrt{H(z; t)}}{A(z; t)}, \quad (7.2)$$

где

$$H(z; t) = B^2(z; t) - 4A(z; t)C(z; t),$$

удовлетворяли асимптотическому условию $F(z; t) = z^{-1} + O(z^{-2})$. Выбор знака в уравнении (7.2) также должен производиться в соответствии с необходимым асимптотическим поведением. Рассмотрим условие совместимости (7.1) с уравнением движения цепочки Тоды в виде (3.1).

Не теряя общности рассмотрения, зафиксируем $A(z) = z^{L-1} + O(z^{L-2})$ в виде монического полинома степени $L - 1$. Более того, предположим, что полиномы $A(z; t)$, $B(z; t)$ и $C(z; t)$ не имеют общих нулей (которые могут быть сокращены в (7.1)). Запретим также функции Стилтеса быть рациональной, поскольку такое возможно только для полиномов, ортогональных на конечном числе точек.

ЛЕММА. *Предположим, что функция $F(z; t)$ удовлетворяет уравнению (7.1) и*

$$A_1(z; t)F^2(z; t) + B_1(z; t)F(z; t) + C_1(z; t) = 0 \quad (7.3)$$

для некоторых других полиномов A_1 , B_1 и C_1 . Тогда

$$\frac{A_1(z; t)}{A(z; t)} = \frac{B_1(z; t)}{B(z; t)} = \frac{C_1(z; t)}{C(z; t)} \equiv q(z; t)$$

является некоторым полиномом z .

Действительно, умножая уравнения (7.1) и (7.3) на A_1 и A , соответственно, и вычитая их, мы получаем (опуская зависимость от z и t для краткости)

$$(A_1B - AB_1)F + CA_1 - C_1A = 0. \quad (7.4)$$

Если $A_1B - AB_1 \neq 0$, то $F(z; t)$ будет рациональной функцией, что запрещено. Следовательно, $A_1/A = B_1/B = C_1/C$, и благодаря неприводимости полиномов A, B, C эти отношения должны быть полиномами z .

Используя эту простую лемму, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Предположим, что функция Стилтеса $F(z; t)$ для форм второй степени с $A(z; t) = z^{L-1} + O(z^{L-2})$, $L = 1, 2, \dots$, удовлетворяет уравнению (3.1). Тогда*

(а) $\deg(C(z; t)) + 1 = \deg(B(z; t)) = L$ и, более того, $B(z) = -\hat{B}(z; t)/u_0(t)$, $C(z) = \hat{C}(z; t)/u_0(t)$, где $\hat{B}(z; t)$ и $\hat{C}(z; t)$ – монические полиномы степеней L и $L-1$, соответственно;

(б) монические полиномы $A, \hat{B}, \hat{C}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{A} &= (b_{-1} - z)A + \hat{B}, \\ \dot{\hat{B}} &= 2u_0(\hat{C} - A), \\ \dot{\hat{C}} &= (z - b_0)\hat{C} - \hat{B}; \end{aligned} \quad (7.5)$$

(в) дискриминант

$$\hat{H}(z) \equiv \hat{B}^2(z; t) - 4u_0A(z; t)\hat{C}(z; t) = u_0^2H(z; t) = \prod_{k=1}^{2L}(z - z_k),$$

являющийся моническим полиномом, не зависит от t , т.е. $\dot{\hat{H}}(z) = 0$;

(г) полином $A(z; t)$ удовлетворяет уравнению

$$2A\ddot{A} - \dot{A}^2 + 2V(z; t)A^2 + \hat{H}(z) = 0, \quad (7.6)$$

где

$$V(z; t) = u_0 + u_{-1} - \frac{(z - b_{-1})^2}{2};$$

(д) корни полинома $A(z; t) = \prod_{i=1}^{L-1}(z - a_i(t))$ простые и удовлетворяют уравнениям Дубровина [21]

$$\dot{A}(a_i) = \varepsilon_i \sqrt{\hat{H}(a_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, L-1, \quad (7.7)$$

где $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, или, эквивалентно,

$$\dot{a}_i = \varepsilon_i \frac{\sqrt{\hat{H}(a_i)}}{A'(a_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, L-1. \quad (7.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцировав (7.1) по t и исключив $\dot{F}$ с помощью равенства (3.1), получаем уравнения

$$\begin{aligned}\dot{A} + 2(z - b_0)A + u_0B &= q(z; t)A, \\ \dot{B} + (z - b_0)B + 2u_0C - 2A &= q(z; t)B(z; t), \\ \dot{C} - B &= q(z; t)C,\end{aligned}\tag{7.9}$$

где $q(z; t)$ – полином, появившийся в лемме. Сравнивая затем полиномы в левых и правых частях равенств (7.9), видим, что $\deg(B) = L$, $\deg(C) = \deg(A) = L - 1$, и

$$q(z; t) = z + \eta(t)$$

является моническим полиномом первой степени. Более того, сравнивая члены старшей степени, получаем $B(z; t) = -u_0^{-1}z^L + O(z^{L-1})$, $C(z; t) = u_0^{-1}z^{L-1} + O(z^{L-2})$ и, следовательно, полиномы $\hat{B}(z; t) = -u_0B(z; t)$, $\hat{C}(z; t) = u_0C(z; t)$ будут моническими. Это доказывает утверждение (а). Сравнивая члены следующей степени, получаем соотношение

$$\eta(t) = -b_0 - \frac{\dot{u}_0}{u_0} = b_{-1} - 2b_0.\tag{7.10}$$

Подставляя (7.10) в (7.9), приходим к системе уравнений (7.5) в утверждении (б).

Утверждения (в) и (г) вытекают непосредственно из (7.5). Из равенства (7.6) можно вывести следующее линейное дифференциальное уравнение третьей степени для $A(z; t)$:

$$\frac{d^3A}{dt^3} + 2V(z; t)\dot{A} + \dot{V}(z; t)A = 0,\tag{7.11}$$

совпадающее с уравнением Гамбье [22]. Оно решается благодаря замечательной связи с уравнением Штурма–Лиувилля

$$\ddot{\psi}(z; t) + \frac{1}{2}V(z; t)\psi(z; t) = 0,\tag{7.12}$$

замеченной независимо Аппелем и Ермаковым [23]. Точнее, если мы обозначим через $\phi(z; t)$ и $\chi(z; t)$ два независимых решения уравнения (7.12), то общее решение уравнения (7.11) может быть представлено линейной комбинацией

$$A(z; t) = \xi_1(z)\phi(z; t)^2 + \xi_2(z)\phi(z; t)\chi(z; t) + \xi_3(z)\chi(z; t)^2,\tag{7.13}$$

где $\xi_i(z)$ – произвольные функции z . Теперь общее решение уравнения Гамбье (7.6) представляется в виде (7.13) с ограничением

$$\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3 = \frac{\hat{H}(z)}{W^2(z)},\tag{7.14}$$

где

$$W(z) = \dot{\phi}(t; z)\chi(t; z) - \phi(t; z)\dot{\chi}(t; z)$$

– вронскиан решений уравнения (7.12) (очевидно, что $W(z)$ не зависит от t). Заметим, что уравнение Гамбье (7.6) играет ключевую роль в изучении конечнозонных

потенциалов уравнения Шредингера [6], [24], а также в решении связанной задачи для собственных значений при сингулярных граничных условиях, приводящих к дискретному спектру гамильтониана [25].

Для доказательства утверждения (д) перепишем уравнение (7.6) в виде

$$\frac{\dot{A}^2}{A^2} - 2\frac{\ddot{A}}{A} - 2V(z; t) = \frac{\hat{H}(z)}{A^2}. \quad (7.15)$$

Предположим, что $z = a_1$ является нулем полинома $A(z; t)$ кратности j , т.е. $A(z; t) = (z - a_1)^j \tilde{A}(z; t)$, $\tilde{A}(a_1; t) \neq 0$. Тогда левая часть равенства (7.15) имеет при $z = a_1$ полюс не выше второй степени. Правая часть (7.15) имеет полюс степени $2j > 2$, если $j > 1$. Следовательно, при $j > 1$ величина a_1 должна совпадать с одним из корней $\hat{H}(z)$, скажем, $a_1 = z_1$, и этот корень должен иметь соответствующую кратность > 1 . Более того, $\dot{a}_1 = 0$, поскольку $\hat{H}(z) = 0$. Таким образом, из уравнений (7.5) заключаем, что полиномы $A(z; t)$, $B(z; t)$, $C(z; t)$ имеют общий множитель $z - a_1$, что невозможно по нашим предположениям. Наконец, уравнения (7.7) или (7.8) прямо следуют из (7.6). Предложение доказано.

Обратимся теперь к условиям достаточности для появления уравнений Тоды из форм второй степени. Из теоремы 1 известно, что они эквивалентны уравнению Риккати (3.1) для функции Стильтеса с некоторыми фиксированными заранее коэффициентами $b_0(t) = c_1(t)$ и $u_0(t)$. Начнем рассмотрение с ортогональных полиномов $P_n(x; t)$, зависящих от некоторого параметра t , таких, что их функция Стильтеса $F(z)$ удовлетворяет уравнению (7.1) с некоторыми полиномами $A(z; t)$, $B(z; t)$, $C(z; t)$, также зависящими от t . Зафиксируем опять $A(z) = z^{L-1} + O(z^{L-2})$ в виде монического полинома и будем подразумевать, что полиномы B и C имеют степени L и $L - 1$, соответственно. Определим также монический дискриминант $\hat{H}(z) = H(z)/\zeta^2$, где $H(z) = B^2(z) - 4A(z)C(z)$. Очевидно, что

$$\hat{H}(z) = z^{2L} + O(z^{2L-1}) = \prod_{k=1}^{2L} (z - z_k).$$

Подставляя асимптотическое разложение (3.1) в (7.1), заключаем, что ведущие коэффициенты в полиномах $B(z; t)$ и $C(z; t)$ отличаются только знаком, т.е. для некоторого $\zeta \neq 0$

$$B = -\frac{\hat{B}}{\zeta}, \quad C = \frac{\hat{C}}{\zeta}, \quad (7.16)$$

где $\hat{B}(z) = z^L + \beta_1 z^{L-1} + O(z^{L-2})$ и $\hat{C}(z) = z^{L-1} + \gamma_1 z^{L-2} + O(z^{L-3})$ являются моническими полиномами. Для коэффициентов β_1 и γ_1 получаем ограничения

$$\gamma_1 - \beta_1 = c_1 = b_0, \quad (7.17)$$

которые будут полезны в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При заданной функции $b_0(t)$ определим $u_0 = \zeta(t)$, положим $b_{-1} = -\dot{u}_0/u_0 + b_0$ и будем подразумевать, что полиномы A , $\hat{B}$ и $\hat{C}$ удовлетворяют уравнениям (7.5). Тогда монический дискриминант $\hat{H}(z)$ не зависит от t , $\hat{H}(z) = 0$, а функция Стильтеса $F(z; t)$ удовлетворяет уравнению Риккати (3.1).

Это предложение доказывается непосредственно. Таким образом, уравнения (7.5) необходимы и достаточны для существования уравнений неограниченной цепочки Тоды для форм второй степени. На самом деле, существует значительно более строгое необходимое и достаточное условие для этого.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что монический дискриминант не зависит от t , т.е. $\dot{\hat{H}}(z) = 0$, и что все его нули простые, $z_i \neq z_k$, $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \dots, N$. Дополнительно будем подразумевать, что все нули полиномов $A(z) = (z - a_1) \times (z - a_2) \dots (z - a_{L-1})$ и $\hat{C}(z) = (z - e_1)(z - e_2) \dots (z - e_{L-1})$ простые и что a_i удовлетворяют уравнениям Дубровина (7.8) (или, эквивалентно, (7.7)). Тогда функция Стилтеса $F(z; t)$ удовлетворяет уравнению Риккати (3.1) и, следовательно, мы имеем уравнения Тоды (2.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря предложению 4 необходимо только показать, что уравнения (7.5) следуют из (7.8). Без потери общности можно подразумевать, что $\varepsilon_j = -1$ для всех j . Из равенства $\dot{H}_0 = 0$ находим условие

$$\hat{B}\dot{\hat{B}} = 2(\zeta\dot{\hat{A}}\hat{C} + \zeta\dot{\hat{A}}\hat{C} + \zeta\dot{\hat{A}}\hat{C}). \quad (7.18)$$

Подставляя $z = a_i$ в (7.18) и используя уравнения Дубровина (7.7), находим

$$\dot{\hat{B}}(a_i) = 2\zeta\hat{C}(a_i). \quad (7.19)$$

Степень полинома $\dot{\hat{B}}$ не больше $L - 2$. Действительно, $\dot{\hat{B}} = \dot{\beta}_1 z^{L-1} + O(z^{L-2})$. Но $\dot{\beta}_1 = 0$, как это видно из условия $\dot{\hat{H}} = 0$. Следовательно, из равенства (7.19) и простоты нулей $A(z)$ получаем соотношение

$$\dot{\hat{B}} = 2\zeta(\hat{C} - A) = 2u_0(\hat{C} - A), \quad (7.20)$$

совпадающее со вторым из уравнений (7.5).

Подставляя $z = e_i$ в (7.18), где e_i — простые нули полинома $\hat{C}(z)$, получаем

$$\dot{\hat{C}}(e_i) = -\hat{B}(e_i). \quad (7.21)$$

Полином $\hat{B} + \dot{\hat{C}}$ имеет степень L и нули $z = e_i$, $i = 1, 2, \dots, L - 1$. Следовательно,

$$\hat{B} + \dot{\hat{C}} = (z - \xi)\hat{C}(z) \quad (7.22)$$

с некоторым параметром ξ . Сравнивая члены $\propto z^{L-1}$ в (7.22), находим $\xi = b_0$ и

$$\dot{\hat{C}} = (z - b_0)\hat{C} - \hat{B}, \quad (7.23)$$

что совпадает с третьим из уравнений (7.5). Наконец, подставляя (7.20) и (7.23) в (7.18), приходим к первому из уравнений (7.5). Теорема доказана.

Таким образом, уравнения Дубровина (7.8) образуют необходимое и достаточное условия для существования уравнений Тоды для форм второй степени. Это утверждение было впервые доказано в работе [2]; доказательство, представленное в настоящей работе, существенно проще. Уравнения, аналогичные (7.8), естественным образом появляются во вполне интегрируемых системах, подобных системе Неймана на N -мерной сфере или геодезических на эллипсоиде [24]. Поэтому должна существовать внутренняя связь между формами второй степени и системами типа Неймана, но мы не рассматриваем ее здесь.

Если рассмотреть разложения в степенные ряды

$$A(z; t) = z^{L-1} + \sum_{i=1}^{L-1} \alpha_i(t) z^{L-i-1}, \quad \hat{H}(z) = z^{2L} + \sum_{i=1}^{2L} \kappa_i z^{2L-i}, \quad (7.24)$$

то очевидно, что коэффициенты κ_i не зависят от t . С помощью уравнения Гамбье (7.6) можно выразить рекуррентные коэффициенты b_{-1} и u_{-1} через α_i и κ_i :

$$b_{-1}(t) = \alpha_1(t) - \frac{\kappa_1}{2}, \quad u_{-1}(t) = \frac{1}{2} \left(\dot{\alpha}_1 - \alpha_1^2 + \alpha_2 + \frac{\kappa_1 \alpha_1}{2} - \frac{\kappa_2}{2} + \frac{\kappa_1^2}{8} \right). \quad (7.25)$$

Тогда коэффициенты $b_0(t)$ и $u_0(t)$ восстанавливаются как

$$u_0 = u_{-1} + \dot{b}_{-1} = u_{-1} + \dot{\alpha}_1, \quad b_0 = \frac{\dot{u}_0}{u_0} + b_{-1}. \quad (7.26)$$

Простейшие случаи соответствуют значениям $L = 1, 2$. Если $L = 1$, то проблема становится почти тривиальной: коэффициенты b_n , u_n не зависят от обеих переменных n и t (статическое решение уравнений Тоды). Соответствующие ортогональные полиномы совпадают со (сдвинутыми) полиномами Чебышева [2].

Случай $L = 2$ также был рассмотрен в работе [2]. Здесь мы снова изучим его, используя несколько другой подход. В этом случае имеем $A = z - a_1(t)$ и $\hat{H}(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = z^4 + \kappa_1 z^3 + \kappa_2 z^2 + \kappa_3 z + \kappa_4$. Мы подразумеваем, что все нули z_j полинома $H(z)$ различны. Уравнения Дубровина (7.8) сводятся к

$$\dot{a}_1^2 = \hat{H}(a_1). \quad (7.27)$$

Хорошо известно [23], что решение этого уравнения дается общей эллиптической функцией второго порядка, т.е. эллиптической функцией с двумя полюсами (с учетом кратностей) в фундаментальном параллелограмме периодов. Такая функция имеет много явных представлений. Мы выбираем следующее:

$$a_1(t) = \nu + \omega(\zeta(\omega t + p + r) - \zeta(\omega t + r)), \quad (7.28)$$

где $\zeta(z)$ – дзета-функция Вейерштрасса [23] и параметры ω , ν , p , r могут быть выражены через переменные $z_1, \dots, z_4$ и постоянную интегрирования (7.28). Функция $\zeta(z; g_2, g_3)$ определяется инвариантами эллиптической кривой g_2 , g_3 , связанными

с $z_1, \dots, z_4$. Ниже мы опускаем зависимость от них. Из соотношений (7.25) находим

$$\begin{aligned} b_{-1} &= -\nu - \frac{\kappa_1}{2} - \omega(\zeta(\omega t + r) - \zeta(\omega t + p + r)), \\ b_0 &= -\nu - \frac{\kappa_1}{2} - \omega(\zeta(\omega t - p + r) - \zeta(\omega t + r)), \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} u_{-1}(t) &= \omega^2(\wp(p) - \wp(\omega t + p + r)), \\ u_0(t) &= \omega^2(\wp(p) - \wp(\omega t + r)). \end{aligned} \quad (7.30)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Общее решение уравнений неограниченной цепочки Тоды для форм второй степени с $L = 2$ может быть представлено в виде*

$$\begin{aligned} b_n &= \omega(\zeta(\omega t - p(n+1) + r) - \zeta(\omega t - pn + r)) - \lambda, \\ u_n &= \omega^2(\wp(p) - \wp(\omega t - pn + r)) = \\ &= \omega^2 \frac{\sigma(\omega t - p(n+1) + r) \sigma(\omega t - p(n-1) + r)}{\sigma^2(p) \sigma^2(\omega t - pn + r)} \end{aligned} \quad (7.31)$$

с различными параметрами ω, p, r, λ и инвариантами g_2, g_3 ; здесь $\sigma(x)$ обозначает сигма-функцию Вейерштрасса.

Справедливость уравнений (2.3) легко проверяется с помощью хорошо известных соотношений между функциями Вейерштрасса

$$\frac{d}{dz} \zeta(z) = -\wp(z), \quad \frac{d}{dz} \ln \sigma(z) = \zeta(z).$$

Например, при $n = 0$ воспроизводятся соотношения (7.29) и (7.30), где $\lambda = \nu + \kappa_1/2$. В работе [2] это решение было представлено в терминах эллиптических функций Якоби. Наша форма (7.31) выглядит более естественно, поскольку она содержит явную зависимость от произвольных параметров ω, p, r, λ , имеющих простой физический смысл. Действительно, коэффициенты $u_n(t)$ и $b_n(t)$ зависят только от линейной комбинации $\omega t - pn$, указывающей, что эти решения представляют собой бегущие волны. Скорость этих волн равна $v = p/\omega$. Параметр r соответствует начальной фазе при $t = 0$. Параметр ω одновременно обозначает и частоту, и амплитуду волн; параметр p – волновое число. Наконец, произвольность параметра λ означает, что сдвиг $b_n(t) \rightarrow b_n(t) + \lambda$ не меняет уравнений Тоды. Эквивалентность между решениями работы [2] или оригинальной монографии Тоды [4] и (7.31) может быть установлена с помощью стандартных соотношений между эллиптическими функциями Вейерштрасса и Якоби [23].

Благодарности. Работа частично поддержана Австрийским фондом FWF (проект P16390-N04) и РФФИ (грант № 06-01-00191). Авторы признательны С. Туджimoto за полезные обсуждения и комментарии. А. С. Жеданов благодарен за гостеприимство университету И. Кеплера в Линце, во время пребывания в котором была выполнена часть этой работы. В. П. Спиридонов глубоко признателен институту математики им. М. Планка в Бонне за финансовую поддержку визита, во время которого были получены некоторые результаты этой статьи.

Список литературы

- [1] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Math. Appl., **13**, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [2] F. Peherstorfer, *J. Comput. Appl. Math.*, **133** (2001), 519–534.
- [3] G. A. Baker, P. Graves-Morris, *Padé approximants*, Parts I, II, Encyclopedia Math. Appl., **13, 14**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.
- [4] M. Toda, *Theory of nonlinear lattices*, Springer Ser. Solid-State Sci., **20**, Springer, Berlin, 1989.
- [5] J. Moser, “Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential – an integrable system”, *Dynamical systems, theory and applications*, Lecture Notes in Phys., **38**, Springer, Berlin, 1975, 467–497; K. Sogo, *J. Phys. Soc. Japan*, **62**:6 (1993), 1887–1894; K. L. Vaninsky, *J. Geom. Phys.*, **46** (2003), 283–307.
- [6] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [7] Е. М. Никишин, “Дискретный оператор Штурма–Лиувилля и некоторые проблемы теории функций”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **10**, 1984, 3–77; K. Aomoto, *RIMS Kokyuroku*, **1227** (2001), 14–60.
- [8] G. Teschl, *Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices*, Math. Surveys Monogr., **72**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [9] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta, Y. Yamada, *Funkcial. Ekvac.*, **44** (2001), 291–307.
- [10] N. Joshi, K. Kajiwara, M. Mazzocco, “Generating function associated with the determinant formula for the solutions of the Painlevé II equation”, *Complex analysis, dynamical systems, summability of divergent series and Galois theories. II*, Volume in honor of Jean-Pierre Ramis. Proc. conf. (Toulouse, France, September 22–26, 2003), Astérisque, **297**, ed. M. Loday-Richaud, Soc. Math. France, Paris, 2004, 67–78.
- [11] Y. Nakamura, A. Zhedanov, *J. Phys. A*, **37** (2004), 5849–5862.
- [12] S. Karlin, *Total positivity*, vol. I, Stanford Univ. Press, Stanford, California, 1968.
- [13] L. Vinet, A. S. Zhedanov, *J. Comput. Appl. Math.*, **172** (2004), 41–48.
- [14] Y. Kametaka, *Proc. Japan Acad. Ser. A*, **60** (1984), 145–148; 181–184.
- [15] K. Okamoto, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **34** (1987), 709–740.
- [16] Г. А. Натанзон, *Вестн. ЛГУ*, 1971, № 10, 22–28; *ТМФ*, **38**:2 (1979), 219–229.
- [17] O. V. Bychuk, V. P. Spiridonov, *Mod. Phys. Lett. A*, **5** (1990), 1007–1012.
- [18] N. M. Temme, *J. Comput. Appl. Math.*, **153** (2003), 441–462; [math.CA/0205065](#).
- [19] А. С. Жеданов, *ТМФ*, **82**:1 (1990), 11–17.
- [20] F. Peherstorfer, *SIAM J. Math. Anal.*, **21** (1990), 461–482; *J. Approx. Theory*, **64** (1991), 123–161; P. Maroni, *Adv. Comput. Math.*, **3**:1–2 (1995), 59–88.
- [21] Б. А. Дубровин, *УМН*, **36**:2 (1981), 11–80.
- [22] E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover, New York, 1956.
- [23] Э. Т. Уиттекер и Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Физматгиз, М., 1963.
- [24] J. Moser, *Integrable Hamiltonian systems and spectral theory*, Lezione Fermiane, Pisa, 1981.
- [25] S. Skorik, V. Spiridonov, *Phys. Lett. A*, **190** (1994), 90–95.

Поступила в редакцию 29.08.2006