Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Л. Ло, Ц. Чжан, Убывание кривой информации
в квантовых измерениях, *ТМФ*, 2007, том 151, но-
мер 1, 109–119

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6014>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:12:04

© 2007 г.

Шунь-Лун Ло*, Цян Чжан†

УБЫВАНИЕ КОСОЙ ИНФОРМАЦИИ В КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Доказано, что косая информация под действием неселективных квантовых измерений, которые не возмущают сохраняющуюся наблюдаемую, убывает. Выдвинута и доказана в случае двумерных квантовых систем гипотеза о том, что косая информация также убывает в результате селективных квантовых измерений.

Ключевые слова: оператор плотности, сохраняющаяся наблюдаемая, косая информация, квантовые измерения, аффинность, монотонность.

Вигнер и Янасе ввели величину

$$I(\rho, H) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}[\sqrt{\rho}, H]^2,$$

где tr обозначает след, а квадратные скобки – коммутатор, которую они называли косой информацией, для описания количества информации в квантовом состоянии ρ (представленном оператором плотности) на значениях наблюдаемых, не коммутирующих (косых) с сохраняющейся наблюдаемой H , такой как гамильтониан. Своим появлением данное понятие обязано исследованию квантовых измерений при наличии сохраняющейся величины [2]. Общее утверждение здесь состоит в том, что не коммутирующую с сохраняющейся величиной наблюдаемую измерить труднее, чем коммутирующую. Косую информацию можно интерпретировать как квантификацию (т.е. сведение качественных характеристик к количественным) некоторых аспектов теоремы Вигнера–Янасе–Араки, которая утверждает, что наблюдаемые, не коммутирующие с сохраняющейся величиной, не могут быть измерены точно [1]–[3].

*Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China. E-mail: luosl@amt.ac.cn

†Department of Mathematics, City University of Hong Kong, Hong Kong.
E-mail: mazq@math.cityu.edu.hk

Вигнер и Янасе доказали ряд фундаментальных свойств величины косой информации как теоретико-информационного понятия, за одним примечательным исключением: они упомянули о необходимости изучить изменения косой информации в результате квантовых измерений, но оставили этот вопрос неисследованным. Предлагая косую информацию как понятие для описания количества информации, Вигнер и Янасе выдвинули следующие основные постулаты, которым должно удовлетворять понятие количества информации, и затем частично доказали, а частично предугадали, что косая информация удовлетворяет всем этим требованиям [1], [4].

А. Если смешиваются две различные квантовые системы, то количество информации результирующей системы не должно превосходить среднее количество информации составляющих систем. Действительно, смешивая две системы, мы уничтожаем подлинную информацию о происхождении конкретного образца из той или иной системы. Косая информация $I(\rho, H)$ удовлетворяет данному требованию в силу выпуклости:

$$I(\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2, H) \leq \lambda_1 I(\rho_1, H) + \lambda_2 I(\rho_2, H),$$

где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_j \geq 0$, и ρ_j , $j = 1, 2$, – квантовые состояния.

Б. Количество информации составной системы, включающей в себя две некоррелированные подсистемы, должно равняться сумме количества информации каждой из компонент. Косая информация $I(\rho, H)$ действительно является аддитивной относительно тензорного произведения, именно

$$I(\rho_1 \otimes \rho_2, H_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_2) = I(\rho_1, H_1) + I(\rho_2, H_2),$$

где H_1 и H_2 – наблюдаемые соответственно для первой и второй подсистем, $\mathbf{1}$ обозначает (зависящий от подсистемы) тождественный оператор.

В. Количество информации в изолированной системе не должно зависеть от времени, поскольку эволюция такой системы полностью определяется начальным состоянием и унитарной динамикой, не сопровождающейся потерями информации. Для косой информации такая инвариантность имеет место, поскольку если ρ_t подчиняется уравнению Ландау–фон Неймана (постоянная Планка $\hbar$ взята равной единице) [5]

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho_t = [H, \rho_t], \quad \rho_0 = \rho, \quad (1)$$

то $I(\rho_t, H) = I(\rho, H)$ для любого t .

Г. Когда составная система разделяется на две подсистемы, количество информации должно, вообще говоря, убывать, поскольку любое знание о статистических корреляциях двух подсистем при рассмотрении их по отдельности будет утеряно. Полное описание этого постулата до сих пор кажется нечетким и достаточно сложным. Приемлемой математической формулировкой данного утверждения является супераддитивность косой информации в том смысле, что

$$I(\rho, H_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_2) \geq I(\rho_1, H_1) + I(\rho_2, H_2),$$

где ρ – двухкомпонентное состояние, $\rho_1 = \text{tr}_2 \rho$ и $\rho_2 = \text{tr}_1 \rho$ – частичные следы ρ по второй и первой подсистемам (и, следовательно, состояния первой и второй подсистем), соответственно. Вигнер и Янасе показали, что данное условие справедливо, по крайней мере в случае, когда состояние ρ является чистым [1].

Д. “Наконец, необходимо исследовать изменения количества информации в результате измерений. Мы, однако, не будем заниматься этим здесь.” – Это цитата из работы Вигнера и Янасе [1].

Интересные приложения косой информации обнаружались как в математике [6], так и в физике [7]–[9]. Попутно заметим, что поскольку косая информация сводится для чистых состояний к обычной дисперсии $V(\rho, H) = \text{tr} \rho H^2 - (\text{tr} \rho H)^2$ (но отличается от дисперсии для смешанных состояний), то возникает предположение, что дисперсия также может рассматриваться как величина, пригодная для описания количества информации, удовлетворяющая вышеупомянутым постулатам. Однако прямая проверка показывает, что дисперсия не удовлетворяет ни постулату А, ни постулату Г.

Проблема, сформулированная в пункте Д, касающаяся изменений косой информации в результате измерений, которая оставлена открытой Вигнером и Янасе, является исходным пунктом настоящего исследования. Данная проблема имеет фундаментальное значение в количественном исследовании теории квантовых измерений.

В соответствии с общими постулатами квантовой механики существуют квантовые измерения двух родов. Измерение первого рода обычно называется *неселективным*. Оно преобразует квантовое состояние, описываемое оператором плотности ρ , в другое квантовое состояние, описываемое оператором плотности

$$\Phi(\rho) = \sum_j E_j \rho E_j^\dagger. \quad (2)$$

Здесь операторы $\{E_j^\dagger E_j\}$ образуют разложение единицы, т.е. $\sum_j E_j^\dagger E_j = \mathbf{1}$. Заметим, что такое преобразование Φ также обычно называется квантовой операцией или вполне положительным отображением, сохраняющим след. Далее мы неизменно будем использовать эти обозначения. Обычные квантовые измерения возникают в результате выбора E_j в виде $\sqrt{m_j}$ для некоторого проектора или положительного оператора m_j .

Поскольку квантовые измерения обычно приводят к возмущению системы и, таким образом, разрушают некоторую внутреннюю информацию, можно предположить, что в результате таких процессов косая информация должна уменьшаться в том смысле, что

$$I(\Phi(\rho), H) \leq I(\rho, H). \quad (3)$$

В противоположность неселективным измерениям, существуют так называемые *селективные* измерения. Они преобразуют квантовое состояние ρ в ансамбль $\{\rho_j, \alpha_j\}$

по формуле

$$\rho_j = \frac{E_j \rho E_j^\dagger}{\alpha_j}, \quad \alpha_j = \text{tr } E_j \rho E_j^\dagger, \quad (4)$$

т.е. конечное квантовое состояние после селективного измерения описывается семейством операторов плотности $\{\rho_j\}$, каждый оператор плотности ρ_j встречается с вероятностью α_j . Конечная средняя косая информация после такого селективного измерения есть $\sum_j \alpha_j I(\rho_j, H)$, и можно предположить, что

$$\sum_j \alpha_j I(\rho_j, H) \leq I(\rho, H). \quad (5)$$

Однако если не налагать никаких дополнительных условий, то, как показывает следующий пример, ни одно из предполагаемых выше неравенств в общем случае не выполняется.

ПРИМЕР 1. Для $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_j > 0$, положим

$$\rho = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и возьмем

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $E_1^\dagger E_1 + E_2^\dagger E_2 = \mathbf{1}$, и операция $\Phi(\rho) = E_1 \rho E_1^\dagger + E_2 \rho E_2^\dagger$ определяет неселективное измерение, в то время как ансамбль $\{\rho_j, \alpha_j : j = 1, 2\}$ с ρ_j, α_j в виде (4) определяет селективное квантовое измерение.

Прямое вычисление теперь дает $\alpha_1 = \lambda_1$, $\alpha_2 = \lambda_2$ и

$$I(\rho, H) = 1 - 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}, \quad I(\Phi(\rho), H) = 1, \quad I(\rho_1, H) = 1, \quad I(\rho_2, H) = 1.$$

Следовательно, оба неравенства (3) и (5) нарушаются. По зрелому размышлению нарушение этих неравенств не кажется удивительным, поскольку квантовое измерение, помимо уничтожения внутренней информации состояния ρ , может также вносить возмущение в сохраняющуюся наблюдаемую H , а косая информация измеряет количество информации в состоянии ρ относительно H . На самом деле оба оператора E_1 и E_2 в приведенном примере не коммутируют с оператором H , и, таким образом, в этом случае квантовое измерение вносит возмущение в сохраняющуюся наблюдаемую.

Исходя из физической интуиции и более тщательного анализа, поскольку любое измерение возмущает систему и это обычно приводит к некоторой потере внутренней информации исходного состояния, можно ожидать, что если косая информация является полностью корректной теоретико-информационной величиной, то она будет убывать при любом квантовом измерении *до тех пор, пока это измерение не возмущает сохраняющуюся наблюдаемую*. Более точно, мы ожидаем, что если

потребовать, чтобы все операторы E_j коммутировали с оператором H , тогда неравенства (3) и (5) будут справедливы. Мы докажем, что неравенство (3) верно, и приведем веские основания в пользу того, что неравенство (5) также верно, доказав его для системы с одним спином (в двумерном случае). Для простоты мы будем полагать, что квантовая система имеет конечную размерность.

Прежде чем сформулировать наш основной результат, необходимо уточнить, что понимается под утверждением о том, что квантовое измерение не возмущает наблюдаемую H . Любое квантовое измерение Φ на квантовых состояниях, определенное в (2), естественным образом порождает сопряженное линейное отображение

$$\Phi^\dagger(A) = \sum_j E_j^\dagger A E_j$$

на пространстве наблюдаемых, определяемое формулой $\text{tr} \Phi(\rho)A = \text{tr} \rho \Phi^\dagger(A)$, где A – произвольная наблюдаемая. Существуют две естественные формулировки отсутствия возмущения. Первая состоит в том, что сопряженное отображение $\Phi^\dagger$ квантового измерения Φ оставляет наблюдаемую H инвариантной в том смысле, что $\Phi^\dagger(H) = H$. Вторая формулировка состоит в том, что отображение $\Phi^\dagger$ совместимо с наблюдаемой H в том смысле, что каждый оператор E_j коммутирует с оператором H . Возникает резонный вопрос: в каком отношении находятся эти два определения? Мы предполагаем, что для систем конечной размерности они эквивалентны, и можем легко доказать следующий несколько более слабый результат.

ЛЕММА. *Равенства $\Phi^\dagger(H) = H$ и $\Phi^\dagger(H^2) = H^2$ выполняются тогда и только тогда, когда каждый оператор E_j (а также $E_j^\dagger$) коммутирует с H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простые алгебраические преобразования дают

$$\begin{aligned} \sum_j [E_j, H]^\dagger [E_j, H] &= \sum_j (H E_j^\dagger E_j H - H E_j^\dagger H E_j - E_j^\dagger H E_j H + E_j^\dagger H^2 E_j) = \\ &= H^2 - H \Phi^\dagger(H) - \Phi^\dagger(H) H + \Phi^\dagger(H^2) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку каждый член $[E_j, H]^\dagger [E_j, H]$ является неотрицательным, отсюда следует, что $[E_j, H]^\dagger [E_j, H] = 0$ для любого j . Таким образом,

$$\|[E_j, H]\psi\|^2 = \langle \psi | [E_j, H]^\dagger [E_j, H] | \psi \rangle = 0$$

для любого чистого состояния $|\psi\rangle$. Но это означает, что $[E_j, H] = 0$ для любого j , что влечет также $[E_j^\dagger, H] = 0$.

Теперь результат, касающийся убывания косой информации при неселективных измерениях, которые не возмущают сохраняющуюся наблюдаемую, может быть сформулирован следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. *Если квантовое измерение Φ не возмущает сохраняющуюся наблюдаемую H в том смысле, что $\Phi^\dagger(H) = H$, $\Phi^\dagger(H^2) = H^2$ (или, эквивалентно, все операторы E_j коммутируют с H), то имеет место неравенство (3).*

Следующий результат представляет собой веский аргумент в пользу гипотетического неравенства (5), которое касается убывания косой информации при селективных квантовых измерениях.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Предположим, кроме того, что размерность соответствующего комплексного гильбертова пространства равна 2. Тогда имеет место неравенство (5).*

Благодаря выпуклости величины $I(\rho, H)$ по ρ (хорошо известный факт, предсказанный и доказанный Вигнером и Янасе [1], а также Либом) имеем

$$I(\Phi(\rho), H) \leq \sum_j \alpha_j I(\rho_j, H),$$

так что неравенство (5) влечет неравенство (3), и если бы мы могли доказать первое, то второе было бы его следствием. К сожалению, неравенство (5) остается в виде гипотезы, так как для него мы имеем лишь частичное доказательство.

Ниже мы приведем доказательства теорем 1 и 2. Обсуждение результатов и некоторые родственные вопросы представлены в конце статьи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Будем следовать работе [8] и определим аффинность (близость) двух квантовых состояний ρ и σ следующим образом:

$$A(\rho, \sigma) = \text{tr} \sqrt{\rho} \sqrt{\sigma}.$$

Можно непосредственно убедиться в том, что аффинность мультипликативна относительно тензорного произведения в том смысле, что

$$A(\rho_1 \otimes \rho_2, \sigma_1 \otimes \sigma_2) = A(\rho_1, \sigma_1) A(\rho_2, \sigma_2), \quad (6)$$

где ρ_1 и σ_1 – квантовые состояния одной системы, а ρ_2 и σ_2 – другой.

В соответствии с общими теоремами о представлении квантовых операций (квантовых измерений), как показано в работах [10], [11], можно записать квантовое измерение Φ в следующем альтернативном виде:

$$\Phi(\rho) = \text{tr}_a U(\rho \otimes \tau) U^\dagger,$$

где τ – состояние некоторой вспомогательной системы, U – унитарный оператор объединенной системы, а tr_a обозначает частичный след по вспомогательной системе. Теперь в силу теоремы 2 работы [8], где утверждается, что аффинность не уменьшается при взятии частичного следа, имеем

$$\begin{aligned} A(\Phi(\rho_t), \Phi(\rho)) &= A(\text{tr}_a U(\rho_t \otimes \tau) U^\dagger, \text{tr}_a U(\rho \otimes \tau) U^\dagger) \geq \\ &\geq A(U(\rho_t \otimes \tau) U^\dagger, U(\rho \otimes \tau) U^\dagger) = A(\rho_t \otimes \tau, \rho \otimes \tau) = \\ &= A(\rho_t, \rho) A(\tau, \tau) = A(\rho_t, \rho), \end{aligned}$$

где ρ_t – произвольное квантовое состояние, а последнее равенство следует из (6). Таким образом, показано, что аффинность не уменьшается при любом квантовом измерении Φ :

$$A(\Phi(\rho_t), \Phi(\rho)) \geq A(\rho_t, \rho). \quad (7)$$

Следует заметить, что хотя представленное выше свойство монотонности формально аналогично соответствующему свойству монотонности для точности [11], оно не может быть легко выведено из последнего (по поводу аккуратного сравнения аффинности и точности см. [8]).

Предположим теперь, что состояние ρ_t удовлетворяет уравнению Ландау–фон Неймана (1), тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} A(\rho_t, \rho) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr} \sqrt{\rho_t} \sqrt{\rho} = i \operatorname{tr} [\sqrt{\rho_t}, H] \sqrt{\rho},$$

что влечет за собой

$$\frac{\partial}{\partial t} A(\rho_t, \rho)|_{t=0} = i \operatorname{tr} [\sqrt{\rho}, H] \sqrt{\rho} = 0.$$

Более того,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(\rho_t, \rho) = i \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr} [\sqrt{\rho_t}, H] \sqrt{\rho} = i \operatorname{tr} [i [\sqrt{\rho_t}, H], H] \sqrt{\rho} = \operatorname{tr} [\sqrt{\rho_t}, H] [\sqrt{\rho}, H],$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(\rho_t, \rho)|_{t=0} = \operatorname{tr} [\sqrt{\rho}, H]^2 = -2I(\rho, H).$$

Следовательно, используя разложение в ряд Тейлора при малых значениях t , имеем

$$A(\rho_t, \rho) = 1 - t^2 I(\rho, H) + o(t^2). \quad (8)$$

Используя доказанную выше лемму, можно непосредственно проверить, что состояние $\Phi(\rho_t)$ также удовлетворяет уравнению Ландау–фон Неймана (1) с начальным значением $\Phi(\rho)$. С помощью аргументов, аналогичных использованным при выводе формулы (8), получаем для малых значений t

$$A(\Phi(\rho_t), \Phi(\rho)) = 1 - t^2 I(\Phi(\rho), H) + o(t^2). \quad (9)$$

Теперь, сравнивая формулы (8) и (9) и принимая во внимание неравенство (7), получаем желаемый результат (3). Доказательство завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Поскольку величина $I(\rho, H)$ является ковариантной в том смысле, что $I(U\rho U^\dagger, U H U^\dagger) = I(\rho, H)$ для любого унитарного оператора U , можно без ограничения общности работать в том представлении, в котором сохраняющаяся наблюдаемая H диагональна. Итак, пусть H имеет следующий матричный вид:

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}.$$

В такой постановке наиболее общий оператор плотности имеет вид

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & 1 - a_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \leq 1,$$

и $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ – матрицы Паули. Нетрудно вычислить $\sqrt{\rho}$:

$$\sqrt{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{1+|\mathbf{a}|} + \sqrt{1-|\mathbf{a}|})} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{1-|\mathbf{a}|^2} + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & 1 + \sqrt{1-|\mathbf{a}|^2} - a_3 \end{pmatrix}.$$

Прямое вычисление дает

$$I(\rho, H) = \frac{a_1^2 + a_2^2}{4(1 + \sqrt{1-|\mathbf{a}|^2})} (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2. \quad (10)$$

Теперь в силу доказанной выше леммы каждый оператор Крауса E_j коммутирует с H и поэтому должен иметь вид

$$E_j = \begin{pmatrix} u_j & 0 \\ 0 & v_j \end{pmatrix}, \quad u_j, v_j \in \mathbb{C}.$$

Условие $\sum_j E_j^\dagger E_j = \mathbf{1}$ влечет за собой

$$\sum_j |u_j|^2 = \sum_j |v_j|^2 = 1.$$

Из этого, в свою очередь, следует равенство

$$\sum_j (|u_j|^2 - |v_j|^2) = 0, \quad (11)$$

которое будет использовано в дальнейшем.

С помощью прямого вычисления имеем

$$E_j \rho E_j^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |u_j|^2(1 + a_3) & u_j \bar{v}_j(a_1 - ia_2) \\ \bar{u}_j v_j(a_1 + ia_2) & |v_j|^2(1 - a_3) \end{pmatrix},$$

$$\alpha_j = \text{tr } E_j \rho E_j^\dagger = \frac{1}{2} (|u_j|^2 + |v_j|^2)(1 + \theta_j a_3),$$

где $\theta_j \in [-1, 1]$ определяется следующим образом:

$$\theta_j = \frac{|u_j|^2 - |v_j|^2}{|u_j|^2 + |v_j|^2}. \quad (12)$$

Следовательно,

$$\rho_j = \frac{1}{\alpha_j} E_j \rho E_j^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\theta_j + a_3}{1 + \theta_j a_3} & \frac{2u_j \bar{v}_j}{|u_j|^2 + |v_j|^2} \frac{a_1 - ia_2}{1 + \theta_j a_3} \\ \frac{2\bar{u}_j v_j}{|u_j|^2 + |v_j|^2} \frac{a_1 + ia_2}{1 + \theta_j a_3} & 1 - \frac{\theta_j + a_3}{1 + \theta_j a_3} \end{pmatrix}.$$

По аналогии с равенством (10) легко получаем

$$\begin{aligned} I(\rho_j, H) &= \frac{(1 - \theta_j^2)(1 + \theta_j a_3)^{-2}(a_1^2 + a_2^2)(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)}{4\left(1 + \sqrt{1 - (1 + \theta_j a_3)^{-2}[(\theta_j + a_3)^2 + (1 - \theta_j^2)(a_1^2 + a_2^2)]}\right)} = \\ &= \frac{(1 - \theta_j^2)(a_1^2 + a_2^2)(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)}{4(1 + \theta_j a_3)\left(1 + \theta_j a_3 + \sqrt{1 - \theta_j^2}\sqrt{1 - |\mathbf{a}|^2}\right)}. \end{aligned}$$

Положив

$$f(\theta) = \frac{1 - \theta^2}{1 + \theta a_3 + \sqrt{1 - \theta^2}\sqrt{1 - |\mathbf{a}|^2}},$$

мы можем записать

$$I(\rho_j, H) = f(\theta_j) \frac{(a_1^2 + a_2^2)(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)}{4(1 + \theta_j a_3)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_j \alpha_j I(\rho_j, H) &= \sum_j \frac{1}{2}(|u_j|^2 + |v_j|^2)(1 + \theta_j a_3)I(\rho_j, H) = \\ &= \sum_j \frac{1}{2}(|u_j|^2 + |v_j|^2)f(\theta_j) \frac{(a_1^2 + a_2^2)(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)}{4} \leq \\ &\leq f\left(\sum_j \frac{1}{2}(|u_j|^2 + |v_j|^2)\theta_j\right) \frac{(a_1^2 + a_2^2)(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)}{4} = \\ &= f\left(\sum_j \frac{1}{2}(|u_j|^2 - |v_j|^2)\right) \frac{(a_1^2 + a_2^2)(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)}{4} = \\ &= f(0) \frac{(a_1^2 + a_2^2)(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)}{4} = I(\rho, H), \end{aligned}$$

где последнее и предпоследнее равенства следуют из соотношений (11) и (12), соответственно, а неравенство следует из вогнутости функции $f(\theta)$, в чем можно прямо удостовериться, показав, что $f''(\theta) \leq 0$ при $\theta \in [-1, 1]$. Действительно, имеем

$$f'(\theta) = -\frac{2\theta + a_3 + \theta^2 a_3 + \theta\sqrt{1 - \theta^2}\sqrt{1 - |\mathbf{a}|^2}}{(1 + \theta a_3 + \sqrt{1 - \theta^2}\sqrt{1 - |\mathbf{a}|^2})^2},$$

и после еще некоторых простых вычислений получаем

$$f''(\theta) = -\frac{2 - 2a_3^2 + (1 - |\mathbf{a}|^2) + (3 + 3\theta a_3)(1 - \theta^2)^{-1/2}\sqrt{1 - |\mathbf{a}|^2}}{(1 + \theta a_3 + \sqrt{1 - \theta^2}\sqrt{1 - |\mathbf{a}|^2})^3},$$

что, несомненно, не положительно, поскольку $\theta, a_3 \in [-1, 1]$. Доказательство завершено.

Интересно отметить, что в условиях теоремы 1 обычная дисперсия сохраняется при квантовом измерении, т.е. $V(\Phi(\rho), H) = V(\rho, H)$. Действительно, в силу циклического свойства следа и предположения, что H коммутирует с E_j и $E_j^\dagger$ при любом j ,

получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{tr} \Phi(\rho)H &= \sum_j \mathrm{tr} E_j \rho E_j^\dagger H = \sum_j \mathrm{tr} \rho E_j^\dagger H E_j = \\ &= \sum_j \mathrm{tr} \rho H E_j^\dagger E_j = \mathrm{tr} \rho H \left(\sum_j E_j^\dagger E_j \right) = \mathrm{tr} \rho H,\end{aligned}$$

и аналогично $\mathrm{tr} \Phi(\rho)H^2 = \mathrm{tr} \rho H^2$. Эти равенства влекут за собой сохранение дисперсии. Это может навести на мысль, что неравенство (3) в действительности является равенством. Следующий пример показывает, что в общем случае в (3) имеет место строгое неравенство.

ПРИМЕР 2. Для $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_j > 0$, положим

$$\rho = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\Phi(\rho) = E_1 \rho E_1^\dagger + E_2 \rho E_2^\dagger$, где

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда оба оператора E_1 и E_2 коммутируют с H , $\Phi^\dagger(H) = H$, $\Phi^\dagger(H^2) = H^2$, $E_1^\dagger E_1 + E_2^\dagger E_2 = \mathbf{1}$ и Φ является квантовым измерением. Прямое вычисление дает

$$I(\Phi(\rho), H) = 0 < I(\rho, H) = 1 - 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Из доказательства теоремы 2 нам известно, что в общем случае для двумерной системы имеет место строгое неравенство в (5), и это, конечно, означает выполнение строгого неравенства в (3) для таких систем в общей ситуации.

Доказанные теоремы можно воспринимать как своего рода неравенства, описывающие погрешность при обработке информации; эти теоремы имеют фундаментальное значение, поскольку квантовые измерения описывают наиболее общие физические процессы, которые могут иметь место в квантовой системе, включая унитарную эволюцию, обычные измерения, шум и декогерентность. В частности, для случая обычных квантовых измерений теоремы устанавливают основной результат, касающийся проблемы, поставленной Вигнером и Янасе (пункт Д).

Чтобы подвести итог, обратимся к поставленной Вигнером и Янасе проблеме, касающейся изменений косо́й информации в квантовых операциях. Было установлено, что при неселективных квантовых измерениях, которые не возмущают сохраняющуюся наблюдаемую, косая информация убывает. Данное утверждение является конкретным количественным выражением того общего, понятного на интуитивном уровне факта, что процессы обработки данных, такие как квантовые измерения, приводят к потере информации. Мы показали, что обычная дисперсия, несмотря на ее популярность, не является подходящей теоретико-информационной величиной

в случае, если рассмотрение включает смешанные состояния. Также была выдвинута гипотеза относительно убывания косо́й информации при селективных измерениях и представлено частичное ее доказательство.

Отметим в заключение, что в то время как условие $\Phi^\dagger(H) = H$ является существенным для наших теорем, естественно задаться вопросом, не является ли условие $\Phi^\dagger(H^2) = H^2$ избыточным и нельзя ли его опустить. Данный вопрос является достаточно интересным математическим вопросом, мы не рассматриваем его здесь.

Благодарности. Настоящая работа была поддержана NSFC (грант № 10571166) и City University of Hong Kong (грант № 7001520).

Список литературы

- [1] E. P. Wigner, M. Yanase, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **49** (1963), 910.
- [2] H. Araki, M. M. Yanase, *Phys. Rev.*, **120** (1960), 622; M. M. Yanase, *Phys. Rev.*, **123** (1961), 666.
- [3] K. Kakazu, S. Pascazio, *Phys. Rev. A*, **51** (1995), 3469.
- [4] E. P. Wigner, M. Yanase, *Canad. J. Math.*, **16** (1964), 397.
- [5] И. фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, М., 1964.
- [6] E. H. Lieb, *Adv. Math.*, **11** (1973), 267; A. Connes, E. Størmer, *J. Funct. Anal.*, **28** (1978), 187.
- [7] A. Wehrl, *Rev. Mod. Phys.*, **50** (1978), 221; III. Л. Лыо, *ТМФ*, **143:2** (2005), 231; S. Luo, *Phys. Rev. A*, **72** (2005), 042110; **73** (2006), 022324; S. Luo, Q. Zhang, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **50** (2004), 1778; Erratum, **51** (2005), 4432.
- [8] S. Luo, Q. Zhang, *Phys. Rev. A*, **69** (2004), 032106.
- [9] Z. Chen, *Phys. Rev. A*, **71** (2005), 052302.
- [10] K. Kraus, *States, effects, and operations. Fundamental notions of quantum theory*, Lecture Notes in Phys., **190**, Springer, Berlin, 1983; A. Peres, *Quantum theory: concepts and methods*, Fund. Theories Phys., **57**, Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [11] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

Поступила в редакцию 14.09.2006