Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Матвеев, П. Ж. Топалов, Геодезическая эквивалентность метрик как частный случай интегрируемости геодезических потоков, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 2, 285–293

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf602>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:14:12

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МЕТРИК КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

Рассмотрена связь между геодезически эквивалентными метриками и интегрируемыми геодезическими потоками. Если две различные метрики на одном многообразии имеют одинаковые геодезические, то геодезические потоки этих метрик допускают достаточно много интегралов (специального вида) в инволюции и наоборот. Существует также квантовый вариант этого результата: если две метрики на одном многообразии имеют одинаковые геодезические, то оператор Бельтрами–Лапласа Δ для каждой метрики допускает достаточно много линейных дифференциальных операторов, коммутирующих с Δ . Отсюда следует, что топология многообразия (с двумя различными метриками с одинаковыми геодезическими) должна быть достаточно проста. Кроме того, из непропорциональности метрик в точке следует непропорциональность метрик почти во всех точках.

Памяти Михаила Владимировича Савельева

Приведем основное для нас определение. Пусть $g = (g_{ij})$ и $\bar{g} = (\bar{g}_{ij})$ – гладкие метрики на одном и том же многообразии M^n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Метрики g и $\bar{g}$ геодезически эквивалентны, если они имеют одни и те же геодезические (рассматриваемые как непараметризованные кривые).

В 1869 г. Дини [1] сформулировал задачу локальной классификации геодезически эквивалентных метрик и решил ее в размерности два. В 1896 г. Леви-Чивита [2] получил локальное описание геодезически эквивалентных метрик на многообразиях произвольных размерностей. Многие интересные результаты в этой области получили Пенлеве, Вейль, Картан, Широков, Кобаяши, Синюков, Петров, Вензи, Микеш, Аминова (см. библиографию в [3, 4]).

Предлагаемый нами подход помогает ответить на следующие вопросы:

1. Какие замкнутые многообразия допускают геодезически эквивалентные метрики [5]?

*Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия.

E-mail: matveev@mail.cgu.chel.su

†Department of Differential Equations, Institute of Mathematics and Informatics, BAS, Sofia, Bulgaria. E-mail: topalov@math.bas.bg

2. Сколько имеется метрик, геодезически эквивалентных данной [4]?

Вначале приведем два простых примера геодезически эквивалентных метрик на замкнутых многообразиях. Всегда существует простейший пример, который не интересен для нашего рассмотрения: произвольная метрика g геодезически эквивалентна метрике Cg , где C – постоянная.

Первый нетривиальный в этом смысле пример следующий. Возьмем тор $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ и рассмотрим систему координат $x^1, \dots, x^n$ на T^n , где x^k – циклическая координата на k -й окружности. Теперь рассмотрим метрики

$$ds_1^2 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2, \quad ds_2^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (dx^i)(dx^j),$$

где (a_{ij}) – положительно-определенная симметричная матрица. Очевидно, что метрики ds_1^2 и ds_2^2 геодезически эквивалентны и, вообще говоря, не пропорциональны.

Второй нетривиальный пример принадлежит Бельтрами [6, 7]. Рассмотрим сферу

$$\sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1,$$

где $x^1, \dots, x^{n+1}$ – стандартные координаты в евклидовом пространстве R^{n+1} . Возьмем линейное преобразование $L: R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$ пространства R^{n+1} и рассмотрим соответствующее проективное преобразование l сферы. Пусть x – точка на сфере. Рассмотрим луч $[0, x)$, где 0 – начало координат в R^{n+1} . Очевидно, что образ $L([0, x))$ также является лучом с началом в нуле. Пусть луч $L([0, x))$ и сфера пересекаются в точке y . По определению положим $l(x) = y$. Другими словами, отображение l дается формулой

$$l(x) = \frac{Lx}{\|Lx\|}.$$

Легко видеть, что отображение l сохраняет геодезические на сфере. Действительно, геодезические на сфере являются пересечениями со сферой плоскостей, которые проходят через начало координат. Линейное отображение L переводит плоскости в плоскости, следовательно, проективное отображение l переводит геодезические в геодезические. Тогда стандартная метрика g_{st} на сфере и метрика l^*g_{st} являются геодезически эквивалентными.

Отметим следующее общее свойство этих двух примеров: геодезические потоки метрик полностью интегрируемы в том смысле, что существует n интегралов в инволюции. Основной результат данной работы заключается в том, что указанное свойство является общим для всех геодезически эквивалентных метрик общего положения.

Обозначим через G линейный оператор $g^{-1}\bar{g} = (g^{i\alpha}\bar{g}_{\alpha j})$. Другими словами, оператор G “переводит” метрику $\bar{g}$ в g : для произвольных векторов $\nu, \xi \in T_{x_0}M^n$ скалярное произведение $\bar{g}(\xi, \nu)$ векторов ξ и ν в метрике $\bar{g}$ равно скалярному произведению $g(G\xi, \nu)$ векторов $G\xi$ и ν в метрике g .

Рассмотрим характеристический многочлен

$$\det(G - \mu E) = c_0 \mu^n + c_1 \mu^{n-1} + \dots + c_n.$$

Коэффициенты $c_1, \dots, c_n$ являются гладкими функциями на многообразии M^n , а $c_0 \equiv (-1)^n$. Рассмотрим функции $I_k: TM^n \rightarrow R$, $k = 0, \dots, n-1$, задаваемые общей формулой

$$I_k(\xi) = \left(\frac{\det(g)}{\det(\bar{g})} \right)^{\frac{k+2}{n+1}} g(S_k \xi, \xi),$$

где S_k — линейный оператор:

$$S_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^k c_i G^{k-i+1},$$

а $g(\nu, \xi)$ обозначает скалярное произведение касательных векторов ν и ξ в метрике g .

ТЕОРЕМА 1 [8]. *Если метрики g и $\bar{g}$ на M^n геодезически эквивалентны, то функции I_k являются интегралами геодезических потоков метрики g и попарно коммутируют (если мы отождествим с помощью g касательное и кокасательное расслоения над M^n и рассмотрим каноническую симплектическую форму на кокасательном расслоении).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Интеграл

$$I_0 = \left(\frac{\det(g)}{\det(\bar{g})} \right)^{\frac{2}{n+1}} \bar{g}(\xi, \xi)$$

был получен Пенлеве [2]. Интеграл I_{n-1} есть интеграл энергии (умноженный на минус два). Интегралы $I_1, I_2, \dots, I_{n-2}$, по-видимому, являются новыми.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В двумерном случае теорема 1 следует из результатов Пенлеве [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 3 [8]. Метрики $g, \bar{g}$ строго непропорциональны, если характеристический многочлен $\det(G - \mu E)$ не имеет кратных корней. Легко показать, что если метрики $g, \bar{g}$ геодезически эквивалентны и строго непропорциональны в некоторой точке, то в касательном расслоении достаточно малой окрестности этой точки интегралы I_k почти всюду функционально независимы.

Теорема 1 позволяет приложить теорию интегрируемых геодезических потоков к теории геодезически эквивалентных метрик и наоборот.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предположим, что многообразие M^n связно. Пусть метрики $g, \bar{g}$ на M^n геодезически эквивалентны и строго непропорциональны, по крайней мере, в одной точке на M^n . Тогда метрики строго непропорциональны почти всюду на M^n .*

ТЕОРЕМА 2. Пусть $g, \bar{g}$ – метрики на многообразии M^n . Пусть функции $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$ почти всюду функционально независимы и коммутируют (если мы отождествим с помощью g касательное и кокасательное расслоения над M^n и рассмотрим каноническую симплектическую форму на кокасательном расслоении). Тогда метрики g и $\bar{g}$ геодезически эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В двумерном случае теорема 2 была сформулирована в книге [9].

ТЕОРЕМА 3 [10]. Если вещественно-аналитическое замкнутое многообразие M^n с вещественно-аналитической метрикой удовлетворяет, по крайней мере, одному из условий: а) группа $\pi_1(M^n)$ не является почти коммутативной; б) $\dim H_1(M^n; \mathbf{Q}) > \dim M^n$, то геодезический поток на M^n не является аналитически интегрируемым.

СЛЕДСТВИЕ 2 [8]. Пусть M^n – замкнутое вещественно-аналитическое многообразие, снабженное двумя вещественно-аналитическими метриками g и $\bar{g}$, которые геодезически эквивалентны и строго непропорциональны, по крайней мере, в одной точке. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ содержит коммутативную подгруппу конечного индекса, а размерность гомологической группы $H_1(M^n; \mathbf{Q})$ не превосходит n .

СЛЕДСТВИЕ 3 [8]. Пусть метрики g и $\bar{g}$ на замкнутой поверхности с отрицательной эйлеровой характеристикой геодезически эквивалентны. Тогда $g = C\bar{g}$, где C – константа.

СЛЕДСТВИЕ 4 [8]. Пусть метрики g и $\bar{g}$ на торе T^2 геодезически эквивалентны. Если они пропорциональны в точке $x \in T^2$, то $g = C\bar{g}$, где C – положительная постоянная.

СЛЕДСТВИЕ 5 [8]. Пусть метрики g и $\bar{g}$ на сфере S^2 геодезически эквивалентны. Тогда имеются только три возможности:

- а) метрики пропорциональны ровно в двух точках;
- б) метрики пропорциональны ровно в четырех точках;
- в) метрики полностью пропорциональны, т.е. $g = C\bar{g}$, где C – положительная постоянная.

В первом случае метрики допускают векторное поле Киллинга.

Приведем конструкцию, которая по орбитальному диффеоморфизму между двумя гамильтоновыми системами дает их интегралы.

Пусть v и $\bar{v}$ – гамильтоновы системы на симплектических многообразиях (N, ω) и $(\bar{N}, \bar{\omega})$ с гамильтонианами H и $\bar{H}$ соответственно. Рассмотрим изоэнергетические поверхности

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in N : H(x) = h\}, \quad \bar{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \bar{N} : \bar{H}(x) = \bar{h}\},$$

где h и $\bar{h}$ – регулярные значения соответственно функций H и $\bar{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что диффеоморфизм $\phi: Q \longrightarrow \overline{Q}$ *орбитальный*, если он переводит орбиты системы v в орбиты системы $\bar{v}$.

Для данного орбитального диффеоморфизма мы можем инвариантным образом построить интегралы. Обозначим через σ и $\bar{\sigma}$ ограничение форм ω и $\bar{\omega}$ соответственно на Q и $\overline{Q}$. Рассмотрим форму $\phi^*\bar{\sigma}$ на Q .

ЛЕММА 1 [11]. *Поток v сохраняет форму $\phi^*\bar{\sigma}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производная Ли L_v формы $\phi^*\bar{\sigma}$ вдоль векторного поля v удовлетворяет уравнению

$$L_v \phi^* \bar{\sigma} = d[\iota_v \phi^* \bar{\sigma}] + \iota_v d[\phi^* \bar{\sigma}].$$

Оба члена в правой части равны нулю. Поскольку форма $\bar{\omega}$ замкнута, форма $\bar{\sigma}$ также замкнута и $d[\phi^* \bar{\sigma}] = \phi^*(d\bar{\sigma}) = 0$. Так как диффеоморфизм переводит орбиты в орбиты, он переводит ядро формы σ в ядро формы $\bar{\sigma}$, так что $\iota_v \phi^* \bar{\sigma} = 0$. Лемма 1 доказана.

Очевидно, что ядра форм σ и $\phi^*\bar{\sigma}$ совпадают (в пространстве $T_x Q$ в каждой точке $x \in Q$) с линейной оболочкой вектора v . Следовательно, эти формы индуцируют два невырожденных тензорных поля на фактор-расслоении $TQ/\langle v \rangle$. Обозначим соответствующие формы на $TQ/\langle v \rangle$ также буквами $\sigma, \bar{\sigma}$.

ЛЕММА 2. *Характеристический многочлен оператора $(\sigma)^{-1}(\phi^*\bar{\sigma})$ на $TQ/\langle v \rangle$ сохраняется потоком v .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку поток v сохраняет гамильтониан H и форму ω , он сохраняет и форму σ . Так как поток v сохраняет обе формы, он сохраняет характеристический многочлен оператора $(\sigma)^{-1}(\phi^*\bar{\sigma})$. Лемма 2 доказана.

Поскольку обе формы являются кососимметричными, каждый корень характеристического многочлена оператора $(\sigma)^{-1}(\phi^*\bar{\sigma})$ имеет четную кратность. Тогда характеристический многочлен представляет собой квадрат многочлена $\delta^{n-1}(t)$ степени $n-1$. Поэтому многочлен $\delta^{n-1}(t)$ также сохраняется потоком v . Таким образом, коэффициенты многочлена $\delta^{n-1}(t)$ являются интегралами системы v .

Геометрические потоки геодезически эквивалентных метрик можно рассматривать как орбитально эквивалентные системы. Многообразие $N = \overline{N} = TM^n$, формы $\omega, \bar{\omega}$ определяются как

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} d[g_{ij}\xi^j dx^i], \quad \bar{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} d[\bar{g}_{ij}\xi^j dx^i],$$

а орбитальный диффеоморфизм ϕ задается соотношением

$$\phi(x, \xi) = \left(x, \xi \frac{\|\xi\|_g}{\|\xi\|_{\bar{g}}} \right).$$

Прямыми вычислениями мы получаем формулу для интегралов I_k из теоремы 1.

Рассмотрим следующий вопрос: есть ли интересные примеры геодезически эквивалентных метрик на замкнутых многообразиях? Из приведенной ниже теоремы 4 (принадлежащей главным образом Синюкову [12]) можно получить конструкцию, которая

по паре геодезически эквивалентных метрик дает другую пару геодезически эквивалентных метрик. Начиная с метрики постоянной кривизны на сфере мы получаем метрику эллипсоида и метрику пуассоновой сферы.

Пусть $g, \bar{g}$ – римановы метрики на многообразии M^n . Рассмотрим линейный оператор $B: TM^n \rightarrow TM^n$, задаваемый как

$$B_j^i = \left(\frac{\det(\bar{g})}{\det(g)} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{g}^{ip} g_{pj}.$$

По определению положим метрику gB равной $g_{ip} B_j^p$, метрику $\bar{g}B$ равной $\bar{g}_{ip} B_j^p$. Другими словами, произведение $gB(\xi, \nu)$ произвольных векторов $\xi, \nu \in T_{x_0} M^n$ равно $g(B\xi, \nu)$, а скалярное произведение $\bar{g}B(\xi, \nu)$ равно $\bar{g}(B\xi, \nu)$. Очевидно, что линейный оператор B самосопряжен относительно метрик g и $\bar{g}$, а метрики gB и $\bar{g}B$ корректно определены.

ТЕОРЕМА 4. *Метрики g и $\bar{g}$ геодезически эквивалентны тогда и только тогда, когда метрики gB и $\bar{g}B$ геодезически эквивалентны.*

Ясно, что метрики g и $\bar{g}$ строго непропорциональны (почти всюду) тогда и только тогда, когда метрики gB и $\bar{g}B$ строго непропорциональны (почти всюду). Таким образом, если мы имеем пару геодезически эквивалентных метрик g и $\bar{g}$, то можем построить другую пару геодезически эквивалентных метрик. Применяя это построение еще раз, мы получаем еще одну пару геодезически эквивалентных метрик. Естественнo обозначить ее через $gB^2, \bar{g}B^2$, поскольку

$$gB^2(\xi, \nu) = g(B^2\xi, \nu), \quad \bar{g}B^2(\xi, \nu) = \bar{g}(B^2\xi, \nu).$$

Можно действовать по-другому и рассмотреть метрики gB^{-1} и $\bar{g}B^{-1}$, задаваемые как

$$gB^{-1}(\xi, \nu) = g(B^{-1}\xi, \nu), \quad \bar{g}B^{-1}(\xi, \nu) = \bar{g}(B^{-1}\xi, \nu).$$

Они также геодезически эквивалентны.

Для начала этого процесса требуется исходная пара геодезически эквивалентных метрик g и $\bar{g}$. Возьмем пару g_{st} и l^*g_{st} из второго примера. Тогда метрика gB является метрикой эллипсоида, а $\bar{g}B^2$ – метрикой пуассоновой сферы. Варьируя линейный оператор L , можно получить метрики всех возможных эллипсоидов и пуассоновых сфер.

ТЕОРЕМА 5 (независимо полученная Табачниковым [13]). *Ограничение евклидовой метрики*

$$(dx^1)^2 + \dots + (dx^{n+1})^2$$

на стандартный эллипсоид

$$E^n = \left\{ (x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) \in R^{n+1} : \frac{(x^1)^2}{a_1} + \dots + \frac{(x^{n+1})^2}{a_{n+1}} = 1 \right\}$$

геодезически эквивалентно ограничению метрики

$$\frac{1}{\left(\frac{x^1}{a_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x^{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2} \left(\frac{(dx^1)^2}{a_1} + \dots + \frac{(dx^{n+1})^2}{a_{n+1}} \right)$$

на тот же эллипсоид.

Согласно работе [14] метрику пуассоновой сферы можно рассматривать как ограничение метрики

$$\frac{1}{\frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \dots + \frac{(x^{n+1})^2}{a_{n+1}^2}} ((dx^1)^2 + \dots + (dx^{n+1})^2)$$

на эллипсоид

$$E^n = \left\{ (x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) \in R^{n+1}: \frac{(x^1)^2}{a_1} + \dots + \frac{(x^{n+1})^2}{a_{n+1}} = 1 \right\}.$$

ТЕОРЕМА 6 [15]. *Ограничение метрики*

$$\frac{1}{\frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \dots + \frac{(x^{n+1})^2}{a_{n+1}^2}} ((dx^1)^2 + \dots + (dx^{n+1})^2)$$

на эллипсоид

$$E^n = \left\{ (x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) \in R^{n+1}: \frac{(x^1)^2}{a_1} + \dots + \frac{(x^{n+1})^2}{a_{n+1}} = 1 \right\}$$

геодезически эквивалентно ограничению метрики

$$a_1(dx^1)^2 + \dots + a_{n+1}(dx^{n+1})^2 - (x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + \dots + x^{n+1} dx^{n+1})^2$$

на тот же эллипсоид.

Рассмотрим проблему квантовой интегрируемости оператора Бельтрами–Лапласа для геодезически эквивалентных метрик и разделения переменных. Возьмем оператор Бельтрами–Лапласа $\Delta := g^{ij} \nabla_i \nabla_j$, где ∇ обозначает ковариантную производную, соответствующую метрике g . Рассмотрим дифференциальные операторы

$$\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_{n-1}: C^2 \rightarrow C^0,$$

задаваемые общей формулой

$$\mathcal{I}_k := g^{ij} \nabla_i \left(\frac{\det(g)}{\det(\bar{g})} \right)^{\frac{k+2}{n+1}} (S_k)_j^p \nabla_p.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Оператор $\mathcal{I}_{n-1}$ есть в точности оператор $-\Delta$.

ТЕОРЕМА 7. *Если метрики g и $\bar{g}$ на M^n геодезически эквивалентны, то операторы $\mathcal{I}_k$ попарно коммутируют. Если многообразие M^n замкнуто, то операторы $\mathcal{I}_k$ являются самосопряженными.*

СЛЕДСТВИЕ 6. *Предположим, что многообразие M^n связно. Предположим, что метрики g и $\bar{g}$ на M^n геодезически эквивалентны. Они строго непропорциональны, по крайней мере, в одной точке M^n тогда и только тогда, когда операторы $\mathcal{I}_0, \dots, \mathcal{I}_{n-1}$ линейно независимы.*

Таким образом, если многообразие замкнуто и если метрики g и $\bar{g}$ на нем геодезически эквивалентны и строго непропорциональны, по крайней мере, в одной точке, то мы имеем полную квантовую интегрируемость оператора Бельтрами–Лапласа метрики g .

Очевидно, что символами операторов $\mathcal{I}_k$ являются I_k . Тогда если операторы $\mathcal{I}_k$ коммутируют, то и функции I_k тоже коммутируют.

СЛЕДСТВИЕ 7. *Предположим, что многообразие M^n связно. Пусть g и $\bar{g}$ – метрики на нем. Пусть операторы $\mathcal{I}_k$ коммутируют и пусть они линейно независимы. Тогда метрики g и $\bar{g}$ геодезически эквивалентны.*

Квантовая интегрируемость означает, что существует счетный базис

$$\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m, \dots\}$$

в пространстве $L_2(M^n)$ такой, что каждое ϕ_m – это собственная функция каждого оператора $\mathcal{I}_k$.

Более того, в нашем случае переменные можно разделить. Точнее, любая функция ϕ из базиса Φ является собственной функцией каждого оператора $\mathcal{I}_k$, и поэтому представляет собой решение системы n дифференциальных уравнений в частных производных

$$\mathcal{I}_k \phi = \lambda_k \phi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1)$$

Разделение переменных означает, что в окрестности почти любой точки существуют координаты $(x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$ такие, что в этих координатах система (1) эквивалентна системе

$$\frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2} \phi = F_k(x^k, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \phi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

где функции F_k зависят от переменной x^k и параметров $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$. Тогда функция ϕ есть произведение

$$X_0(x^0)X_1(x^1) \dots X_{n-1}(x^{n-1}),$$

а каждое X_k – это решение k -го уравнения системы (2), так что мы свели систему дифференциальных уравнений в частных производных (1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2} X_k(x^k) = F_k(x^k, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) X_k(x^k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3)$$

Каково пространство метрик, геодезически эквивалентных данной? Если две метрики геодезически эквивалентны, то существует, по крайней мере, однопараметрическое семейство геодезически эквивалентных метрик, которое включает эти две метрики [16].

Можно показать, что (по крайней мере, в вещественно-аналитическом случае) множество метрик, геодезически эквивалентных данной, является многообразием.

Чему равна размерность этого многообразия? Даже локально существуют метрики, не допускающие (нетривиальных) геодезически эквивалентных метрик [4]. Кроме того, локально размерность этого пространства не превышает $(n+1)(n+2)/2$ и равна $(n+1)(n+2)/2$ только для метрик постоянной кривизны [4].

Пусть M^n замкнуто и пусть g и $\bar{g}$ геодезически эквивалентны и строго непропорциональны на почти всюду плотном множестве точек. Тогда геодезический поток метрики g полностью интегрируем, а почти все орбиты лежат на соответствующих торах Лиувилля. Предположим, что геодезический поток является нерезонансным. Тогда слоение Лиувилля однозначно определено и все интегралы геодезического потока коммутируют с интегралами $I_0, \dots, I_{n-1}$. Кроме того, примем, что у торов Лиувилля геодезического потока имеется достаточное количество каустик: почти каждая точка поверхности является пересечением n каустик. Тогда размерность пространства метрик (по модулю умножения на константу), геодезически эквивалентных метрике g , равна единице.

Геодезические потоки метрик эллипсоида и пуассоновой сферы удовлетворяют всем этим условиям.

Благодарности. Работа частично поддержана MESCS', грант № MM-810/98.

Список литературы

- [1] *U. Dini.* Ann. Math. Ser. 2. 1869. V. 3. P. 269–293.
- [2] *T. Levi-Civita.* Ann. Mat. Ser. 2^a. 1896. V. 24. P. 255–300.
- [3] *А. В. Аминова.* УМН. 1993. Т. 48. № 2. С. 107–164.
- [4] *J. Mikesh.* J. Math. Sci. 1996. V. 78. № 3. P. 311–333; Геодезические отображения римановых и аффинно-связных пространств. В сб.: Итоги науки и техники. Сер.: Современная математика и ее приложения. Геометрия-2. Ред. Н. М. Остиану. М.: ВИНТИ, 1994. Т. 11. С. 112–148.
- [5] *Й. Микеш.* ДАН СССР. 1989. Т. 305. № 3. С. 534–536.
- [6] *E. Beltrami.* Ann. Mat. 1865. V. 1. № 7.
- [7] *E. Beltrami.* Ann. Mat. 1868. V. 2. № 2. P. 232–255.
- [8] *P. J. Topalov, V. S. Matveev.* Geodesic equivalence and integrability. Preprint series of Max-Planck-Institut Math. № 74. Bonn: MPI, 1998.
- [9] *E. T. Whittaker.* A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Cambridge: Cambridge University Press, 1937.
- [10] *И. А. Тайманов.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 2. С. 429–435.
- [11] *П. Ж. Топалов.* Мат. сб. 1997. Т. 188. № 2. С. 137–157.
- [12] *Н. С. Синюков.* ДАН СССР. 1966. Т. 169. № 4. С. 770–772.
- [13] *S. Tabachnikov.* Projectively equivalent metrics, exact transverse line field and the geodesic flow on the ellipsoid. Preprint UofA-R-161. Fayetteville: University of Arkansas, 1998.
- [14] *А. В. Браилов.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 4. С. 661–674.
- [15] *P. J. Topalov.* Hierarchy of integrable geodesic flows. Preprint series of Max-Planck-Institut Math. № 115. Bonn: MPI, 1998.
- [16] *A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, V. S. Matveev.* Riemannian metrics with integrable geodesic flows on surfaces: local and global geometry. Preprint series of Max-Planck-Institut Math. № 122. Bonn: MPI, 1998.