Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Олив, Алгебры Ли, интегрируемость и физика элементарных частиц,
ТМФ, 2000, том 123, номер 2, 294–298

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:12:38

© 2000 г.

Д. И. Олив*

АЛГЕБРЫ ЛИ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

С болью от утраты я вспоминаю мои научные и личные контакты с Мишей. Я описываю, как его идеи повлияли на мои исследования и привели к результатам, которые, возможно, были бы ему интересны.

Рассматривается построение явных общих решений для уравнений конформной теории поля Тоды, ассоциированной с произвольной простой группой Ли. Этот результат был обобщен во многих отношениях и, в частности, для аффинных теорий полей Тоды, ассоциированных с аффинными алгебрами Каца–Мури. Эти теории предсказывают богатый спектр частиц – как квантовых возбуждений, так и солитонов. Физические свойства этих частиц можно непосредственно связать с математическими структурами.

Памяти Миши Савельева

В 1998 г., незадолго до своей безвременной кончины Миша провел несколько месяцев в Бразилии, в Институте теоретической физики Университета штата Сан-Паулу, где его принимал мой бывший аспирант Луиз Агостиньо Феррейра. Последний написал мне о выдающемся вкладе Миши в теорию интегрируемых моделей: “Его (с Лезновым) метод построения общих решений нелинейных теорий является крупным достижением, которое оказало влияние на всех нас. Он был очень открытым человеком, всегда готовым поделиться своими соображениями и выслушать мнение других. С ним было приятно сотрудничать”. Эти слова кажутся мне удачными, и я могу только искренне к ним присоединиться.

Впервые я встретился с Мишей в 1978 г. на конференции в Рейнхардсбрунне (тогда ГДР, ныне объединенная Германия). Там я познакомился с его совместной с Лезновым работой, и многие ее аспекты оказали на меня в дальнейшем глубокое влияние. Тогда я интересовался самодуальными уравнениями (или уравнениями Богомольного) для монополярных решений в теориях со спонтанным нарушением калибровочной симметрии и электромагнитной дуальностью вообще.

Лезнов и Савельев показали, как сферически-симметричные решения в теориях большого объединения с калибровочной группой G связаны с уравнениями Тоды, ассоциированными с этой группой и, следовательно, разрешимыми. Думаю, что это была одна из первых установленных связей между дуальностью и интегрируемостью. Мое представление этой работы на школе в Бонне годом позже, вероятно, оказало влияние на

*Physics Dept, University of Wales Swansea, Mittag-Leffler Institute, Djursholm, Swansea

Вернера Нама при выводе им уравнений монополя.

Первоначально уравнения Тоды не обнаруживали очевидной связи с теорией алгебр Ли, однако вскоре такие связи были замечены. Сперва была найдена взаимосвязь с конечномерными алгебрами Ли, а Лезнов и Савельев с сотрудниками расширили эти представления, сформулировав их для аффинных алгебр Каца–Мули и затем для других типов бесконечномерных алгебр и супералгебр. По сути предмет этой заметки – показать, какой вклад внес Миша в исследование до сих пор не вполне понятых связей между алгебрами Ли (в широком смысле), интегрируемостью и физикой элементарных частиц.

После той встречи в Рейнхардсбрунне более двадцати лет назад я регулярно имел удовольствие встречаться с Мишей – дважды в Сванси, дважды в Кембридже, в Лондоне, в Париже, в ЦЕРНе и в других местах. Летом 1981 г. я посетил его в Протвине и храню в качестве сувенира фотографию, запечатлевшую нас обоих на пляже после купания в местной речке. Последняя наша встреча произошла два года назад в Институте Ньютона в Кембридже. В связи с моим шестидесятилетием он прислал подарок, который занял место на моей книжной полке.

Опишем коротко метод Лезнова–Савельева. Простейшее уравнение Тоды соответствует теории поля Лиувилля в двумерном пространстве-времени:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2\partial_+ \partial_- \phi = -e^\phi.$$

Как было хорошо известно самому Лиувиллю, это уравнение обладает конформной симметрией. Лезнов и Савельев поняли, что, кроме того, существует соответствующая структура алгебры Ли $SU(2)$. Исследуя этот вопрос, они нашли известное общее решение в виде

$$e^{-\frac{\phi}{2}} = \frac{1 + AB}{2\sqrt{A'B'}}, \quad A = A(x^+), \quad B = B(x^-),$$

где A и B суть произвольные функции координат светового конуса $x^\pm = (t \pm x)/\sqrt{2}$. Лезнов и Савельев сопоставили любой простой алгебре Ли g уравнения Тоды конформной теории поля

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi = -\sum e^{\alpha_i \cdot \phi},$$

где суммирование ведется по всем простым корням α_i алгебры g . Следует считать, что поля ϕ образуют вектор-столбец из $r = \text{rank } g$ элементов. Эти уравнения по-прежнему конформно-инвариантны, и их общее решение может быть записано аналогично [1]

$$e^{-\lambda_i \cdot \phi} = \langle \lambda_i | \text{групповые множители} | \lambda_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Здесь кет-вектор означает фундаментальный вес, определяемый из условий $2\lambda_i \cdot \alpha_j / \alpha_j^2 = \delta_{ij}$, где α_j – простой корень. Таким образом, решения снова строятся с помощью теории представлений группы Ли G . Появление группы Ли в этом контексте связано с тем фактом, что существуют соответствующие калибровочные потенциалы с нулевой кривизной, принимающие значения в этой алгебре Ли. Каждый групповой множитель в общем решении зависит от выбора координат светового конуса. Когда решение не зависит от времени t , оно описывает сферически-симметричные магнитные монополи в теориях большого объединения [2].

Возможен ряд расширений этой идеи, в частности ее применение к случаю аффинных “нетвистованных” алгебр Каца–Мули, $g \rightarrow \hat{g}$. Необходимая модификация состоит в добавлении к упоминавшимся простым корням “расширенного корня” $\alpha_0 = -\psi$, где ψ есть “высший корень” g . Таким образом, к правой части уравнения Тоды конформной теории поля добавляется член $e^{-\psi \cdot \phi}$. Позднее было показано, что это приводит к интегрируемой деформации в смысле Замолотчикова [3]. Добавочный член “деформирует” конформно-инвариантную теорию поля и делает ее интегрируемой теорией с бесконечным числом законов сохранения, которые остаются в качестве “реликтов” конформной симметрии. Простейший случай реализуется, когда $g = SU(2)$, и в результате деформации уравнения Лиувилля получается аффинное уравнение Тоды, более известное как уравнение sh-Гордон.

Михайлов, Ольшанецкий и Переломов интерпретировали [4] эти связанные уравнения как уравнения, описывающие квантовые поля, которые могут рождать частицы, и рассчитали массы этих частиц. Наличие массы является, конечно, следствием нарушения конформной симметрии. Корриган и его сотрудники [5, 6] нашли красивую трактовку формулы для масс частиц: массы r частиц пропорциональны компонентам вектора Перрона–Фробениуса – собственного вектора матрицы Картана для g , соответствующего ее низшему собственному значению. В силу теоремы Перрона–Фробениуса (применимой, поскольку недиагональные элементы матрицы отрицательны или равны нулю) все компоненты этого вектора никогда не обращаются в нуль и имеют одинаковый знак, что как раз и требуется для такой физической интерпретации.

Аффинные полевые уравнения Тоды интегрируемы в том смысле, что они определяют условия нулевой кривизны, принимающие значения в аффинной алгебре Каца–Мули. Более того, существует бесконечное число локальных законов сохранения. Наряду с компонентами импульса $P^\pm$ на световом конусе, которые несут значения “спина” ± 1 , существуют высшие сохраняющиеся величины. Эти последние несут целочисленные значения спина, равные так называемым экспонентам группы Ли G по модулю ее числа Кокстера h .

Вся эта физическая структура связана с красивой математической конструкцией, называемой главной градуировкой аффинной алгебры Каца–Мули. Это альтернатива так называемой однородной градуировке, более знакомой физикам благодаря ее связи с алгеброй токов. Каждая простая алгебра Ли содержит главную подалгебру $SO(3)$ (т.е., по существу, наибольшую из таких подалгебр), и мы будем обозначать ее генератор, принадлежащий подалгебре Картана, как T^3 . Однородная градуировка определяется сопряженным действием операции $d_H = -L_0$, где L_m суть генераторы Вирасоро. В противоположность этому главная градуировка определяется присоединенным действием операции $d_P = T_0^3 - hL_0$.

Важную роль в главной градуировке играет бесконечномерная подалгебра алгебры $\hat{g}$, известная как главная подалгебра Гейзенберга. Ее генераторы обозначаются через E_M , причем значения, принимаемые индексом M , суть экспоненты g по модулю числа Кокстера h . Коммутационные соотношения имеют вид

$$[E_M, E_N] = xM\delta_{M+N,0}, \quad [d_P, E_M] = ME_M,$$

где x – значение центрального члена. Все это очень напоминает осцилляторы в теории

струн (где, однако, индекс пробегает все целые значения). В силу сказанного выше о законах сохранения, если положить x равным нулю, то эта алгебра окажется изоморфной расширенной алгебре Пуанкаре, описывающей пространственно-временные симметрии в аффинной полевой теории Тоды $\hat{g}$. В частности, d_P соответствует бусту Лоренца.

Естественно выбрать в качестве оставшихся генераторов те, которые диагонализуют главную подалгебру Гейзенберга при коммутировании. Это может быть сделано с помощью величин $F(\alpha, \rho)$ (α – корень g , ρ – комплексное число):

$$[E_M, F(\alpha, \rho)] = \alpha \cdot q(M) \rho^M F(\alpha, \rho).$$

Коэффициенты $q(M)$, по сути дела, являются собственными векторами матрицы Картана для g с $M = 1$, что соответствует случаю Перрона–Фробениуса. Этот набор генераторов переполнен, и они подчиняются следующим соотношениям:

$$e^{\frac{2\pi i T_0^3}{h}} F(\alpha, \rho) e^{\frac{-2\pi i T_0^3}{h}} = F(\sigma(\alpha), \rho) = F(\alpha, \rho e^{\frac{2\pi i}{h}}).$$

Здесь σ обозначает элемент группы Вейля для g , известный как элемент Кокстера, который можно получить как произведение отражений в простых корнях. Его порядок, действительно, равен h . Корни g распадаются на r орбит по h элементов в каждой. Это означает, что достаточно рассматривать r величин F , соответствующих разумному выбору одного представителя для каждой из этих орбит. Этот набор задает (с точностью до знака) все простые корни.

Решение Лезнова–Савельева может быть расширено на эту более общую ситуацию. Однако особенно интересен случай, когда ищутся солитонные решения. Если константам связи приписываются мнимые значения, то уравнение sh-Гордон переходит в уравнение sin-Гордон, солитонные решения которого хорошо известны. Оказывается, что такая процедура обеспечивает все аффинные полевые уравнения Тоды вырожденными вакуумами, наличие которых является необходимым предварительным условием существования солитонных решений.

Те из общих решений, которые описывают конфигурацию приходящих солитонов, сталкивающихся и затем расходящихся, являются достаточно специальными, поскольку асимптотически они состоят из изолированных сгустков энергии. Использование этого граничного условия радикально упрощает общее решение Лезнова–Савельева и приводит к тому, что Миша назвал “солитонной специализацией”:

$$e^{-i\lambda_j \cdot \phi} = \frac{\langle \Lambda_j | e^{-\mu E_1 x^+} g(0) e^{-E_{-1} x^-} | \Lambda_j \rangle}{\langle \Lambda_0 | e^{-\mu E_1 x^+} g(0) e^{-E_{-1} x^-} | \Lambda_0 \rangle^{m_j}}.$$

Поскольку эти выражения снова включают представления с наивысшим весом, центральный член x принимает положительное интегральное значение, соответствующее уровню рассмотренного представления. В числителе представление со старшим весом Λ_j – фундаментальным весом для $\hat{g}$ – имеет уровень m_j . Таким образом, уровни в числителе и знаменателе совпадают. “Групповой элемент” $g(0)$ содержит информацию о солитоне. Это произведение факторов $e^{QF(\alpha, \rho)}$, каждый из которых отвечает одному

солитону, Q определяет координату, а ρ — его быстроту. Существуют r типов солитонов, соответствующих r орбитам действия группы Кокстера.

Приведенное выше выражение является очень общим (оно применимо к любому числу солитонов для любого из наборов аффинных полевых уравнений Тоды) и тем не менее очень простым. В практических расчетах его нетрудно явно оценить (оно сводится к известным результатам для уравнения $\sin$ -Гордона), что позволяет получить непосредственно ряд физических характеристик. Это связано с тем, что опасные выглядящие экспоненты e^{QF} содержат конечное число членов при разложении в степенной ряд. Все степени F выше уровня x исчезают, а старший из оставшихся членов, $F^x/x!$, является вершинным оператором, т.е. оператором экспоненцирования главной подалгебры Гейзенберга. Поэтому легко видеть, что асимптотическое поведение решения в прошлом и будущем корректно.

Поскольку есть r различных величин F (см. выше), то существуют ровно r видов солитонов, что соответствует числу видов частиц, порожденных полями. Массы этих частиц оказываются пропорциональными компонентам вектора Перрона–Фробениуса матрицы Картана для g . Если g не принадлежит ADE-типу, то матрица Картана не симметрична и имеет разные левые и правые собственные векторы, связанные с обменом корней и кокорней, как и предполагает дуальность [7]. Временные запаздывания солитонов при столкновениях могут быть найдены непосредственно из упоминавшихся выше вершинных операторов.

Квантовая трактовка этой картины все еще содержит много нерешенных вопросов. Эта работа, выполненная моими соавторами и мной в 1992–1994 г. [8–10], была основана на ранее опубликованных результатах Миши и вызвала его интерес. Его интересовала возможность применения такого подхода к полевым уравнениям Тоды более общего вида, что привело к нашей совместной работе [11]. Мой последний научный контакт с ним был, когда он прислал мне письмо с изложением своих мыслей о квантовании описанной здесь картины. Я глубоко сожалею, что не ответил, пока это было еще не поздно.

Список литературы

- [1] A. N. Leznov, M. V. Saveliev. Lett. Math. Phys. 1979. V. 3. P. 489–494.
- [2] A. N. Leznov, M. V. Saveliev. Lett. Math. Phys. 1979. V. 3. P. 207–211.
- [3] A. B. Zamolodchikov. Adv. Stud. Pure Math. 1989. V. 19. P. 641–674.
- [4] A. V. Mikhailov, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov. Commun. Math. Phys. 1981. V. 79. P. 473–488.
- [5] H. W. Braden, E. Corrigan, P. E. Dorey, P. Sasaki. Phys. Lett. B. 1989. V. 227. P. 411–416.
- [6] H. W. Braden, E. Corrigan, P. E. Dorey, P. Sasaki. Nucl. Phys. B. 1990. V. 338. P. 689–746.
- [7] P. Goddard, J. Nuyts, D. I. Olive. Nucl. Phys. B. 1977. V. 125. P. 1–28.
- [8] D. I. Olive, N. Turok, J. W. R. Underwood. Nucl. Phys. B. 1993. V. 401. P. 663–697.
- [9] D. I. Olive, N. Turok, J. W. R. Underwood. Nucl. Phys. B. 1993. V. 409. P. 509–546.
- [10] M. A. C. Kneipp, D. I. Olive. Nucl. Phys. B. 1993. V. 408. P. 565–578.
- [11] D. I. Olive, M. V. Saveliev, J. W. R. Underwood. Phys. Lett. B. 1993. V. 311. P. 117–122.