Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Смирнов, О свойствах локализуемости высокосингулярных обобщенных функций, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 2, 179–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6038>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:38:50

© 2007 г.

А. Г. Смирнов*

О СВОЙСТВАХ ЛОКАЛИЗУЕМОСТИ ВЫСОКОСИНГУЛЯРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Исследованы свойства локализуемости обобщенных функций, определенных на широком классе пространств целых аналитических пробных функций. Использование данного класса, включающего все пространства Гельфанда–Шилова $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}^k)$ с $\beta < 1$, дает удобный язык для описания квантовых полей с высокосингулярным инфракрасным поведением. Показано, что для рассматриваемых аналитических функционалов может быть корректно определено понятие несущего конуса, заменяющее понятие носителя. В частности, доказано, что каждый функционал обладает однозначно определенным минимальным несущим конусом.

Ключевые слова: обобщенные функции, аналитические функционалы, инфракрасные сингулярности, несущие конусы, плюрисубгармонические функции, L_2 -оценки Хермандера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена изучению свойств локализуемости обобщенных функций, определенных на пространствах целых аналитических пробных функций. Обычное определение носителя обобщенной функции в этом случае неприменимо из-за отсутствия пробных функций с компактным носителем (эта трудность хорошо известна в теории гиперфункций, где используются вещественно-аналитические пробные функции; см., например, главу 9 книги [1]). Проблема отыскания адекватной замены понятию носителя важна для распространения вайтмановского аксиоматического подхода на квантовые калибровочные теории. Из-за сильных инфракрасных сингулярностей калибровочные поля, вообще говоря, корректно определены лишь при усреднении с целыми аналитическими функциями в импульсном пространстве (это верно, например, для модели Швингера в произвольной α -калибровке [2]) и, следовательно, не могут рассматриваться ни в рамках исходной вайтмановской формулировки [3], использующей распределения умеренного роста, ни в рамках более

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: smirnov@lpi.ru

общего подхода [4], основанного на фурье-гиперфункциях. В этой связи возникает проблема обобщения спектрального условия [5], стандартная формулировка которого в терминах вакуумных средних существенно использует понятие носителя обобщенной функции.

В работах [6], [7] исследовались свойства локализуемости функционалов, определенных на пространствах Гельфанда–Шилова S_α^β при $\beta < 1$ (см. [8] по поводу определения и свойств пространств S_α^β ; если $\beta < 1$, то S_α^β состоит из целых аналитических функций). Было показано, что для таких функционалов можно корректно ввести понятие несущего конуса, заменяющее понятие носителя. В частности, было доказано, что каждый элемент пространства $S_\alpha^{\beta}(\mathbb{R}^k)$ (топологического сопряженного к $S_\alpha^{\beta}(\mathbb{R}^k)$) обладает однозначно определенным минимальным несущим конусом. В данной статье результаты работ [6], [7] распространяются на более широкий класс пространств пробных функций, использовавшийся ранее при анализе спектральных свойств сумм бесконечных рядов по виковым степеням свободных полей с индефинитной метрикой [9]. Данный класс определяется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ – непрерывные, монотонно неограниченно возрастающие функции на полуоси $s \geq 0$, причем функция β выпукла и найдется такая константа $\varkappa > 0$, что функция $\alpha(s)/s^\varkappa$ не убывает при достаточно больших s . Для любых $A, B > 0$ обозначим через $\mathcal{E}_{\alpha, A}^{\beta, B}(\mathbb{R}^k)$ банахово пространство, состоящее из всех целых аналитических функций на $\mathbb{C}^k$ с конечной нормой

$$\sup_{z=x+iy \in \mathbb{C}^k} |f(z)| e^{\alpha(|x|/A) - \beta(B|y|)}.$$

Пространство $\mathcal{E}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^k)$ определим как объединение $\bigcup_{A, B > 0} \mathcal{E}_{\alpha, A}^{\beta, B}(\mathbb{R}^k)$, наделенное топологией индуктивного предела.

Для определенности норма $|\cdot|$ на $\mathbb{C}^k$ всюду будет предполагаться равномерной: $|z| = \max_{1 \leq j \leq k} |z_j|$. Если функция α выпукла, то пространства $\mathcal{E}_\alpha^\beta$ совпадают с пространствами типа W , описанными в главе 1 книги [10]. Если $\alpha(s) = s^{1/\mu}$ и $\beta(s) = s^{1/(\nu-1)}$, $\nu < 1$, то $\mathcal{E}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^k) = S_\mu^\nu(\mathbb{R}^k)$ (во избежание путаницы мы использовали обозначение S_μ^ν вместо стандартного S_α^β). Будем называть конус W конической окрестностью конуса U , если W имеет открытую проекцию¹⁾ и содержит U . Определение несущих конусов основано на введении наряду с пространствами $\mathcal{E}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^k)$ родственных пространств, ассоциированных с конусами в $\mathbb{R}^k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть U – непустой конус в $\mathbb{R}^k$, а функции α и β удовлетворяют условиям определения 1. Для любых $A, B > 0$ обозначим через $\mathcal{E}_{\alpha, A}^{\beta, B}(U)$ банахово пространство, состоящее из всех целых аналитических функций на $\mathbb{C}^k$ с конечной

¹⁾Проекция $\text{Pr } W$ конуса $W \subset \mathbb{R}^k$ есть по определению образ $W \setminus \{0\}$ при каноническом отображении из $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ на сферу $S_{k-1} = (\mathbb{R}^k \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+$; проекция W предполагается открытой в топологии указанной сферы. Отметим, что вырожденный конус $\{0\}$ является конусом с открытой (пустой) проекцией.

нормой

$$\|f\|_{U,A,B} = \sup_{z \in \mathbb{C}^k} |f(z)| e^{-\rho_{U,A,B}(z)},$$

где

$$\rho_{U,A,B}(x + iy) = -\alpha(|x/A|) + \beta(B|y|) + \beta(B\delta_U(x)), \quad (1)$$

а $\delta_U(x) = \inf_{x' \in U} |x - x'|$ – расстояние от x до U . Пространство $\mathcal{E}_\alpha^\beta(U)$ определим соотношением $\mathcal{E}_\alpha^\beta(U) = \bigcup_{A,B>0, W \supset U} \mathcal{E}_{\alpha,A}^{\beta,B}(W)$, где W пробегает по всем коническим окрестностям U и объединение наделяется топологией индуктивного предела.

При $U = \mathbb{R}^k$ определение 2 совпадает с определением 1. Везде ниже мы будем предполагать, что все рассматриваемые конусы непусты. Замкнутый конус K называется несущим конусом функционала $u \in \mathcal{E}'_\alpha(\mathbb{R}^k)$, если u обладает непрерывным продолжением на пространство $\mathcal{E}_\alpha^\beta(K)$. Следующая теорема представляет собой основной результат данной статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функции α и β удовлетворяют условиям определения 1. Если пространство $\mathcal{E}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^k)$ нетривиально (т.е. содержит ненулевые функции), то имеют место следующие утверждения.

1. Пространство $\mathcal{E}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^k)$ плотно в $\mathcal{E}_\alpha^\beta(U)$ для любого конуса $U \subset \mathbb{R}^k$.
2. Пусть K_1 и K_2 – замкнутые конусы в $\mathbb{R}^k$. Для любого $u \in \mathcal{E}'_\alpha(\mathbb{R}^k)$ с несущим конусом $K_1 \cup K_2$ найдутся такие функционалы $u_{1,2} \in \mathcal{E}'_\alpha(\mathbb{R}^k)$ с несущими конусами $K_{1,2}$, что $u = u_1 + u_2$.
3. Если каждый из конусов K_1 и K_2 является несущим для функционала $u \in \mathcal{E}'_\alpha(\mathbb{R}^k)$, то несущим будет и конус $K_1 \cap K_2$.

Следует отметить, что аналогичные результаты для пространств Гельфанда–Шилова S_μ^ν доказывались в работах [6], [7] по-разному для $\nu = 0$ и $0 < \nu < 1$. Подход, используемый в данной статье, позволяет рассматривать оба эти случая единообразно.

Утверждение 1 теоремы 1 показывает, что пространство функционалов с несущим конусом K естественным образом отождествляется с пространством $\mathcal{E}_\alpha^\beta(K)$. Из определения 2 следует, что

$$\mathcal{E}_\alpha^\beta(K) = \bigcup_{W \supset K} \mathcal{E}_\alpha^\beta(W),$$

где объединение берется по всем коническим окрестностям K и снабжается топологией индуктивного предела. Согласно утверждению 1 теоремы 1 отсюда вытекает, что K является несущим конусом функционала $u \in \mathcal{E}'_\alpha(\mathbb{R}^k)$ тогда и только тогда, когда u обладает непрерывным продолжением на пространство $\mathcal{E}_\alpha^\beta(W)$ для любой конической окрестности W конуса K . Из утверждения 3 теоремы 1 следует, что пересечение произвольного семейства $\{K_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ несущих конусов функционала $u \in \mathcal{E}'_\alpha(\mathbb{R}^k)$ снова является несущим конусом u . В самом деле, пусть W – коническая окрестность конуса $K = \bigcap_{\omega \in \Omega} K_\omega$. Как показывают стандартные соображения компактности (ср. доказательство утверждения А леммы 9 ниже), найдется такое

конечное семейство $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$, что $\tilde{K} = \bigcap_{j=1}^n K_{\omega_j} \subset W$. Согласно утверждению 3 теоремы 1 конус $\tilde{K}$ является несущим для u , и, следовательно, u обладает непрерывным продолжением на $\mathcal{E}_\alpha^\beta(W)$. Поэтому конус K является несущим для u . В частности, у каждого функционала $u \in \mathcal{E}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^k)$ имеется однозначно определенный минимальный несущий конус – пересечение всех несущих конусов u .

Доказательство теоремы 1 существенным образом опирается на использование L_2 -оценок Хермандера для решений неоднородных уравнений Коши–Римана²⁾ $\bar{\partial}_j \psi = \eta_j$, $j = 1, 2, \dots, k$. Указанные оценки гарантируют существование решения ψ , являющегося квадратично-интегрируемым с весом $e^{-\rho}/(1+|z|)^2$, при условии, что η_j квадратично-интегрируемы с весом $e^{-\rho}$, а ρ – плюрисубгармоническая функция на $\mathbb{C}^k$. Чтобы проиллюстрировать, как этот результат применяется в нашем случае, мы дадим краткий набросок доказательства утверждения 1.

Пусть $\chi(z)$ – гладкая функция на $\mathbb{C}^k$, обращающаяся в нуль при больших $|z|$ и равная единице в окрестности начала координат. Мы построим аппроксимирующую последовательность для $f \in \mathcal{E}_\alpha^\beta(U)$, полагая $f_n(z) = f(z)\chi(z/n) - \psi_n(z)$, где члены ψ_n вводятся для обеспечения аналитичности f_n . Это последнее условие означает, что ψ_n удовлетворяют уравнениям $\bar{\partial}_j \psi_n(z) = n^{-1}f(z)(\bar{\partial}_j \chi)(z/n)$. Поэтому можно использовать L_2 -оценки для доказательства того, что ψ_n могут быть выбраны настолько малыми, что $f_n \in \mathcal{E}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^k)$ и $f_n \rightarrow f$ в $\mathcal{E}_\alpha^\beta(U)$. Однако данная стратегия подразумевает использование норм типа L_2 , в то время как пространства $\mathcal{E}_\alpha^\beta(U)$ определяются при помощи норм, использующих верхние грани. Эта проблема разрешается в разделе 2, где выводится эквивалентное представление для $\mathcal{E}_\alpha^\beta(U)$ в терминах гильбертовых пространств. Другая сложность состоит в том, что весовые функции $e^{-\rho_{U,A,B}}$, фигурирующие в определении 2, не годятся для L_2 -оценок, поскольку функции $\rho_{U,A,B}$ не являются плюрисубгармоническими. Для преодоления этой трудности в разделе 3 строятся подходящие плюрисубгармонические аппроксимации для $\rho_{U,A,B}$. Доказательство теоремы 1 дано в разделе 4.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $\mathcal{E}_\alpha^\beta$ ПРИ ПОМОЩИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $A, B > 0$ и U – конус в $\mathbb{R}^k$. Обозначим через $H_{\alpha,A}^{\beta,B}(U)$ гильбертово пространство, состоящее из всех целых функций на $\mathbb{C}^k$, имеющих конечную норму

$$\|f\|'_{U,A,B} = \left[\int |f(z)|^2 e^{-2\rho_{U,A,B}(z)} d\lambda(z) \right]^{1/2}, \quad (2)$$

где $d\lambda$ – мера Лебега на $\mathbb{C}^k$, а $\rho_{U,A,B}$ определяется формулой (1). Обозначим через $\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,A}^{\beta,B}(U)$ пространство $\bigcap_{A'>A, B'>B} \mathcal{E}_{\alpha,A'}^{\beta,B'}(U)$, снабженное топологией, заданной нормами $\|\cdot\|_{U,A',B'}$.

²⁾Здесь и далее мы пользуемся сокращенным обозначением $\bar{\partial}_j$ для $\partial/\partial \bar{z}_j$.

ЛЕММА 1. Пусть $A, B > 0$, U – конус в $\mathbb{R}^k$, а функции α и β удовлетворяют условиям определения 1. Тогда $\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,A}^{\beta,B}(U)$ является ядерным пространством Фреше, совпадающим (как множество и топологически) с $\bigcap_{A'>A, B'>B} H_{\alpha,A'}^{\beta,B'}(U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,A}^{\beta,B}(U)$ принадлежит классу пространств $\mathcal{H}(M)$, введенному в работе [11]. Пространство $\mathcal{H}(M)$ (соответственно, $\mathcal{H}_p(M)$ при $p \geq 1$) задается³⁾ при помощи семейства $M = \{M_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ строго положительных непрерывных функций на $\mathbb{C}^k$ и состоит из всех целых аналитических функций на $\mathbb{C}^k$, имеющих конечные нормы

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^k} M_\gamma(z) |f(z)| \quad \left(\text{соответственно, } \left[\int (M_\gamma(z))^p |f(z)|^p d\lambda(z) \right]^{1/p} \right).$$

Предполагается, что: а) для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ найдутся такие $\gamma \in \Gamma$ и $C > 0$, что $M_\gamma \geq C(M_{\gamma_1} + M_{\gamma_2})$; б) существует такое счетное множество $\Gamma' \subset \Gamma$, что для любого $\gamma \in \Gamma$ найдутся такие $\gamma' \in \Gamma'$ и $C > 0$, что $CM_\gamma \leq M_{\gamma'}$. Пусть $\Gamma = \{(A', B') : A' > A, B' > B\}$ и $M_{A',B'}(z) = e^{-\rho_{U,A',B'}(z)}$. Тогда все приведенные выше условия выполнены, причем $\mathcal{H}(M) = \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,A}^{\beta,B}(U)$ и $\mathcal{H}_2(M) = \bigcap_{A',B'} H_{\alpha,A'}^{\beta,B'}(U)$. Согласно лемме 12 работы [11] $\mathcal{H}(M)$ является ядерным пространством Фреше, совпадающим с $\mathcal{H}_p(M)$ для любого $p \geq 1$, если выполнены следующие условия.

I. Для любого $\gamma \in \Gamma$ существует такое $\gamma' \in \Gamma$, что функция $M_\gamma(z)/M_{\gamma'}(z)$ суммируема на $\mathbb{C}^k$ и стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$.

II. Для любого $\gamma \in \Gamma$ найдутся такие $\gamma' \in \Gamma$, окрестность нуля $\mathcal{B}$ в $\mathbb{C}^k$ и $C > 0$, что $M_\gamma(z) \leq CM_{\gamma'}(z + \zeta)$ для любых $z \in \mathbb{C}^k$ и $\zeta \in \mathcal{B}$.

В рассматриваемом случае выполнение условий I и II вытекает из приводимых ниже лемм 2 и 3, соответственно. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть U – конус в $\mathbb{R}^k$, а функции α и β удовлетворяют условиям определения 1. Для любых $A' > A > 0$ и $B' > B > 0$ найдутся такие $\sigma, \tau > 0$, что

$$\rho_{U,A',B'}(z) - \rho_{U,A,B}(z) + C \geq \sigma|z|^\tau, \quad z \in \mathbb{C}^k, \quad (3)$$

где C – константа, а $\rho_{U,A,B}$ определяется формулой (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно считать, что $\beta(0) = 0$. Пусть $\varkappa$ удовлетворяет условиям определения 1, а $s_0 > 0$ таково, что $\alpha(s_0) > 0$, $\beta(s_0) > 0$ и функция $\mu(s) = \alpha(s)/s^\varkappa$ не убывает при $s \geq s_0$. При $|x| \geq A's_0$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{|x|}{A}\right) - \alpha\left(\frac{|x|}{A'}\right) &= \frac{|x|^\varkappa}{A^\varkappa} \mu\left(\frac{|x|}{A}\right) - \frac{|x|^\varkappa}{A'^\varkappa} \mu\left(\frac{|x|}{A'}\right) \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{A^\varkappa} - \frac{1}{A'^\varkappa}\right) \mu\left(\frac{|x|}{A}\right) |x|^\varkappa \geq \left(\frac{1}{A^\varkappa} - \frac{1}{A'^\varkappa}\right) \mu(s_0) |x|^\varkappa. \end{aligned}$$

³⁾ Данное здесь определение $\mathcal{H}(M)$ и $\mathcal{H}_p(M)$ является несколько менее общим по сравнению с определением, принятым в [11], но для наших целей его достаточно.

Поскольку $\beta(0) = 0$, выпуклость функции β влечет неравенство $\beta(s) \leq t\beta(s/t)$ для любых $s \geq 0$ и $0 < t \leq 1$. Отсюда следует, что $\beta(s)/s$ является неубывающей функцией. Поэтому при $|y| \geq s_0/B'$ имеем

$$\beta(B'|y|) - \beta(B|y|) \geq (B' - B) \frac{\beta(B'|y|)}{B'|y|} |y| \geq (B' - B) \frac{\beta(s_0)}{s_0} |y|.$$

Полагая $\tau = \min(1, \varkappa)$ и складывая оценки для α и β , находим, что неравенство (3) с $C = 0$ справедливо при больших $|z|$, если σ достаточно мало. Так как все рассматриваемые функции непрерывны, то, прибавляя к левой части достаточно большую положительную константу, получаем требуемую оценку для всех $z \in \mathbb{C}^k$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $R > 0$, U – конус в $\mathbb{R}^k$, α и β – неубывающие функции на $[0, \infty)$, а $\rho_{U,A,B}$ определяется формулой (1). Для любых $A' > A > 0$ и $B' > B > 0$ существует такая константа C , что

$$\rho_{U,A,B}(z + \zeta) \leq \rho_{U,A',B'}(z) + C, \quad z, \zeta \in \mathbb{C}^k, \quad |\zeta| \leq R.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно считать, что функции α и β неотрицательны. Тогда из монотонности α и β следует, что $\alpha((s+R)/A') \leq \alpha(s/A) + \alpha(R/(A'-A))$ и $\beta(B(s+R)) \leq \beta(B's) + \beta(RBB'/(B'-B))$. Пусть $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$ таковы, что $|\zeta| \leq R$. Так как $\delta_U(x + \xi) \leq \delta_U(x) + |\xi|$, то

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{|x|}{A'}\right) &\leq \alpha\left(\frac{|x + \xi| + R}{A'}\right) \leq \alpha\left(\frac{|x + \xi|}{A}\right) + \alpha\left(\frac{R}{A' - A}\right), \\ \beta(B|y + \eta|) + \beta(B\delta_U(x + \xi)) &\leq \beta(B'|y|) + \beta(B'\delta_U(x)) + 2\beta\left(\frac{RBB'}{B' - B}\right). \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получаем требуемую оценку.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f \in \mathcal{E}_\alpha^\beta(U)$, то $f(\cdot + \zeta) \in \mathcal{E}_\alpha^\beta(U)$ для любого $\zeta \in \mathbb{C}^k$.

Напомним, что пространства DFS (dual Fréchet–Schwartz) являются по определению индуктивными пределами последовательностей локально-выпуклых пространств с инъективными компактными связывающими отображениями (см. [12]).

ЛЕММА 4. Пусть U – конус в $\mathbb{R}^k$, а функции α и β удовлетворяют условиям определения 1. Тогда $\mathcal{E}_\alpha^\beta(U)$ – ядерное пространство DFS, совпадающее (как множество и топологически) с пространством

$$\bigcup_{A,B>0, W \supset U} H_{\alpha,A}^{\beta,B}(W),$$

где W пробегает по всем коническим окрестностям конуса U , а объединение наделяется топологией индуктивного предела.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A' > A > 0$, $B' > B > 0$, а $W \supset W'$ – конические окрестности U . Тогда имеются непрерывные вложения $\mathcal{E}_{\alpha,A}^{\beta,B}(W) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,A}^{\beta,B}(W) \rightarrow \mathcal{E}_{\alpha,A'}^{\beta,B'}(W')$, и, следовательно,

$$\mathcal{E}_{\alpha}^{\beta}(U) = \bigcup_{A,B>0, W \supset U} \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,A}^{\beta,B}(W). \quad (4)$$

Поскольку счетные индуктивные пределы ядерных пространств являются ядерными пространствами (см., например, [13], следствие теоремы III.7.4), ядерность пространства $\mathcal{E}_{\alpha}^{\beta}(U)$ вытекает из леммы 1. Так как все непрерывные отображения из ядерных пространств в банаховы пространства являются ядерными ([13], теорема III.7.2), то вложение $\mathcal{E}_{\alpha,A}^{\beta,B}(W) \rightarrow \mathcal{E}_{\alpha,A'}^{\beta,B'}(W')$ является ядерным как композиция ядерного и непрерывного отображений. Отсюда следует, что $\mathcal{E}_{\alpha}^{\beta}(U)$ – пространство DFS, поскольку ядерные отображения компактны ([13], следствие 1 теоремы III.7.1). В силу леммы 1 имеются непрерывные вложения $H_{\alpha,A}^{\beta,B}(W) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,A}^{\beta,B}(W) \rightarrow H_{\alpha,A'}^{\beta,B'}(W')$. Согласно (4) отсюда следует, что $\mathcal{E}_{\alpha}^{\beta}(U) = \bigcup_{A,B>0, W \supset U} H_{\alpha,A}^{\beta,B}(W)$. Лемма доказана.

3. ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ

Напомним, что норма $|\cdot|$ предполагается равномерной.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A, B > 0$, U – непустой конус в $\mathbb{R}^k$, α – непрерывная неубывающая функция на $[0, \infty)$, а β – непрерывная выпуклая неубывающая функция на $[0, \infty)$. Предположим, что существует такая не равная тождественно нулю целая функция φ на $\mathbb{C}$, что

$$|\varphi(z)| \leq e^{\beta(|B_0 y|) - \alpha(|x/A_0|)}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad (5)$$

при некоторых $A_0, B_0 > 0$. Тогда для любого $R > 0$ найдется такая плюрисубгармоническая функция ρ_R на $\mathbb{C}^k$, что

$$\begin{aligned} \rho_R(z) &\leq \rho_{\mathbb{R}^k, A', B'}(z) + \beta(2BeR), & z = x + iy \in \mathbb{C}^k, \\ \rho_R(z) &\leq \rho_{U, A', B'}(z), & z \in \mathbb{C}^k, \\ \rho_R(z) &\geq \rho_{U, A, B}(z) - H, & |x| \leq R, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\rho_{U, A, B}$ определяется формулой (1), H – не зависящая от R константа, $A' = 2A$ и $B' = (2ek + 1)B + 4kA_0B_0/A$. Если функция α вогнута, то можно положить $A' = A$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполнены условия теоремы 2, то существует такая плюрисубгармоническая функция ρ , что

$$\rho_{U, A, B}(z) - H \leq \rho(z) \leq \rho_{U, A', B'}(z), \quad z \in \mathbb{C}^k,$$

где $\rho_{U, A, B}$ дается формулой (1), H – константа, $A' = 2A$ и $B' = (2ek + 1)B + 4kA_0B_0/A$. Если функция α вогнута, то можно положить $A' = A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ_R удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда функция $\rho(z) = \overline{\lim}_{z' \rightarrow z} \sup_{R>0} \rho_R(z')$ является плорисубгармонической ([14], раздел II.10.3) и удовлетворяет требуемой оценке.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются две леммы.

ЛЕММА 5. Пусть α и β – непрерывные неубывающие функции на $[0, \infty)$ и существует не равная тождественно нулю целая аналитическая функция φ на $\mathbb{C}$, удовлетворяющая оценке

$$|\varphi(z)| \leq e^{\beta(|y|) - \alpha(|x|)}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Тогда найдутся такие плорисубгармоническая функция ρ на $\mathbb{C}^k$ и константа H , что

$$-\alpha(2|x|) - k\beta(4|y|) - H \leq \rho(z) \leq k\beta(4|y|) - \alpha(|x|), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}^k. \quad (8)$$

Если функция α вогнута, то существуют такие плорисубгармоническая функция ρ на $\mathbb{C}^k$ и константа H , что

$$-\alpha(|x|) - k\beta(2|y|) - H \leq \rho(z) \leq k\beta(2|y|) - \alpha(|x|), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}^k. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно считать, что $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ и $\varphi(0) \neq 0$ (если φ имеет нуль порядка n при $z = 0$, то можно заменить φ на $\tilde{\varphi}(z) = C\varphi(z)/z^n$; если C достаточно мало, то $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет (7)). Положим

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(z) &= \sup_{\zeta \in \mathbb{C}^k} \{ \Phi(z - \zeta) + M(\zeta) \}, \\ M(\zeta) &= \inf_{z' = x' + iy' \in \mathbb{C}^k} \{ -\Phi(z' - \zeta) + k\beta(4|y'|) - \alpha(|x'|) \}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\Phi(z) = \sum_{j=1}^k \ln |\varphi(2z_j)|$. Очевидно, имеем $\tilde{\rho}(z) \leq k\beta(4|y|) - \alpha(|x|)$. Так как Φ – плорисубгармоническая функция, то функция $\rho(z) = \overline{\lim}_{z' \rightarrow z} \tilde{\rho}(z')$ также является плорисубгармонической (см. [14], раздел II.10.3). Ввиду непрерывности функций α и β имеем $\tilde{\rho}(z) \leq \rho(z) \leq k\beta(4|y|) - \alpha(|x|)$, и нам остается показать, что $\tilde{\rho}(z) \geq -\alpha(2|x|) - k\beta(4|y|) - H$. Из (7) следует, что

$$-\Phi(z' - z) \geq \alpha(2|x' - x|) - k\beta(2|y' - y|), \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

и, полагая $H = -\Phi(0) = -k \ln |\varphi(0)|$, получаем

$$\tilde{\rho}(z) \geq -H + M(z) \geq \inf_{x', y' \in \mathbb{R}^k} \{ k\beta(4|y'|) - k\beta(2|y' - y|) + \alpha(2|x' - x|) - \alpha(|x'|) \} - H. \quad (11)$$

Поскольку обе функции α и β неотрицательны и монотонны, имеем

$$\beta(2|y'|) - \beta(|y' - y|) \geq -\beta(2|y|), \quad \alpha(2|x' - x|) - \alpha(|x'|) \geq -\alpha(2|x|). \quad (12)$$

Подставляя эти неравенства в (11), получаем требуемую оценку снизу для $\tilde{\rho}$. Таким образом, формула (8) доказана.

Пусть теперь функция α вогнута. Заменим $\beta(4|y'|)$ на $\beta(2|y'|)$ в определении $M(\zeta)$ (10) и модифицируем $\Phi(z)$, полагая $\Phi(z) = \sum_{j=1}^k \ln |\varphi(z_j)|$. Определяя $\tilde{\rho}$ и ρ так же, как и выше, получаем $\tilde{\rho}(z) \leq \rho(z) \leq k\beta(2|y|) - \alpha(|x|)$. Повторяя приведенные выше рассуждения, приходим к оценке

$$\tilde{\rho}(z) \geq \inf_{x', y' \in \mathbb{R}^k} \{k\beta(2|y'|) - k\beta(|y' - y|) + \alpha(|x' - x|) - \alpha(|x'|)\} - H. \quad (13)$$

Так как функция α вогнута и $\alpha(0) = 0$, то $\alpha(s+t) \leq \alpha(s) + \alpha(t)$ для любых $s, t \geq 0$. Отсюда следует, что $\alpha(|x+x'|) \leq \alpha(|x|) + \alpha(|x'|)$ для любых $x, x' \in \mathbb{R}^k$. Делая замену $x' \rightarrow x' - x$, находим, что $\alpha(|x' - x|) - \alpha(|x'|) \geq -\alpha(|x|)$. Подставляя эту оценку и первое из неравенств (12) в (13), получаем $\tilde{\rho}(z) \geq -\alpha(|x|) - k\beta(2|y|) - H$, что завершает доказательство (9).

ЛЕММА 6. Пусть U – конус в $\mathbb{R}^k$. Для любого $R > 0$ существует такая плюри-субгармоническая функция σ_R на $\mathbb{C}^k$, что

$$\sigma_R(z) \leq k|y| + R, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}^k, \quad (14)$$

$$\sigma_R(z) \leq k|y| + \delta_U(x), \quad z \in \mathbb{C}^k, \quad (15)$$

$$\sigma_R(z) \geq \delta_U\left(\frac{x}{e}\right), \quad |x| \leq R, \quad (16)$$

где $\delta_U(x) = \inf_{x' \in U} |x - x'|$ – расстояние от x до U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $a > 0$ определим субгармоническую функцию Θ_a на $\mathbb{C}$:

$$\Theta_a(z) = a \ln \left| \frac{\sin(z/a)}{z/a} \right|.$$

Эта функция удовлетворяет неравенствам

$$\Theta_a(iy) \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$\Theta_a(z) \leq |y| - a \ln^+ \left(\frac{|x|}{a} \right), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad (18)$$

где $\ln^+(r) = \max(\ln r, 0)$. В самом деле, поскольку

$$\Theta_a(iy) = a \ln \left(\frac{\operatorname{sh}(y/a)}{y/a} \right),$$

оценка (17) вытекает из неравенства $\operatorname{sh} y/y \geq 1$, $y \in \mathbb{R}$. Далее, из неравенств

$$|\sin z| \leq e^{|y|}, \quad \left| \frac{\sin z}{z} \right| \leq e^{|y|}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

следует, что

$$\left| \frac{\sin(z/a)}{z/a} \right| \leq e^{|y/a|} \min(1, a/|x|),$$

и, переходя к логарифмам, получаем (18). Положим теперь

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_R(z) &= \sup_{a>0, \xi \in \mathbb{R}^k, |\xi| \leq R} \{ \Phi_a(z - \xi) + M_a(\xi) \}, \\ M_a(\xi) &= \inf_{z'=x'+iy' \in \mathbb{C}^k} \{ -\Phi_a(z' - \xi) + k|y'| + \delta_U(x') \},\end{aligned}$$

где $\Phi_a(z) = \sum_{j=1}^k \Theta_a(z_j)$. Очевидно, $\tilde{\sigma}_R(z) \leq k|y| + \delta_U(x)$. Согласно неравенству (18) имеем $\Phi_a(z - \xi) \leq k|y|$ и, следовательно, $\tilde{\sigma}_R(z) \leq k|y| + \sup_{a>0, |\xi| \leq R} M_a(\xi)$. Поскольку $\Phi_a(0) = 0$, из определения M_a вытекает, что $M_a(\xi) \leq \delta_U(\xi)$. Поэтому $\tilde{\sigma}_R(z) \leq k|y| + R$. Так как Φ_a – плюрисубгармонические функции, то $\sigma_R(z) = \varlimsup_{z' \rightarrow z} \tilde{\sigma}_R(z)$ – также плюрисубгармоническая функция, а из непрерывности функций $\delta_U(x)$ и $|y|$ следует, что σ_R удовлетворяет (14) и (15). Из оценки (17) вытекает, что $\Phi_a(iy) \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^k$. Следовательно,

$$\tilde{\sigma}_R(z) \geq \sup_{a>0} (\Phi_a(iy) + M_a(x)) \geq \sup_{a>0} M_a(x), \quad |x| \leq R. \quad (19)$$

С помощью элементарных неравенств $\sum_{j=1}^k \ln^+ |x_j| \geq \ln^+ (|x|)$ и $\sum_{j=1}^k |y_j| \leq k|y|$ из оценки (18) получаем соотношение

$$M_a(x) \geq \inf_{x' \in \mathbb{R}^k} \left\{ a \ln^+ \left(\frac{|x'|}{a} \right) + \delta_U(x + x') \right\}. \quad (20)$$

Оценивая $\delta_U(x + x')$ снизу посредством $\max(\delta_U(x) - |x'|, 0)$ и вычисляя нижнюю грань по x' , получаем $M_a(x) \geq a \ln^+ (\delta_U(x)/a)$. Пусть $\delta_U(x) > 0$ и $a_0 = \delta_U(x)/e$. Ввиду (19) находим

$$\tilde{\sigma}_R(z) \geq M_{a_0}(x) \geq \delta_U(x)/e, \quad |x| \leq R. \quad (21)$$

Если $\delta_U(x) = 0$ и $|x| \leq R$, то оценка $\tilde{\sigma}_R(z) \geq \delta_U(x)/e$ также верна, так как ввиду (19) и (20) имеем $\tilde{\sigma}_R(z) \geq 0$. Отсюда следует неравенство (16), поскольку $\sigma_R \geq \tilde{\sigma}_R$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Без потери общности можно считать, что $\beta(0) = 0$. Положим $\rho'_R(z) = \beta(Be\sigma_R(z))$, где σ_R – плюрисубгармоническая функция, удовлетворяющая условиям леммы 6. Так как композиция неубывающей выпуклой функции с плюрисубгармонической функцией является плюрисубгармонической функцией (см. [15], теорема 3.2.18 и раздел 4.1), то ρ'_R – плюрисубгармоническая функция. Ввиду монотонности β неравенства (14)–(16) влекут оценки

$$\begin{aligned}\rho'_R(z) &\leq \beta(2Bek|y|) + \beta(2BeR), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}^k, \\ \rho'_R(z) &\leq \beta(2Bek|y|) + \beta(2Be\delta_U(x)), \quad z \in \mathbb{C}^k, \\ \rho'_R(z) &\geq \beta(\delta_U(Bx)), \quad |x| \leq R.\end{aligned} \quad (22)$$

В силу леммы 5 существуют такие плюрисубгармоническая функция ρ'' и константа H , что

$$-\alpha(|x/A|) - k\beta(D|y|) - H \leq \rho''(z) \leq k\beta(D|y|) - \alpha(|x/A'|), \quad (23)$$

где $D = 2A_0B_0/A$ и $A' = 2A$ ($A' = A$, если функция α вогнута). Положим $\rho_R(z) = \rho'_R(z) + \rho''(z) + k\beta(D|y|) + \beta(|By|)$. Функция ρ_R является плюрисубгармонической, поскольку $\beta(D|y|)$ и $\beta(|By|)$ – выпуклые и, следовательно, плюрисубгармонические функции. Оценки (6) с $B' = 2kD + (2ek + 1)B$ легко следуют из (22), (23) и неравенства

$$2k\beta(D|y|) + \beta(B|y|) + \beta(2Bek|y|) \leq \beta(B'|y|),$$

вытекающего из выпуклости β и условия $\beta(0) = 0$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Как и выше, будем обозначать через $d\lambda$ меру Лебега на $\mathbb{C}^k$. Доказательство теоремы 1 опирается на следующее утверждение, являющееся частным случаем теоремы 4.2.6 книги [15].

ЛЕММА 7. Пусть ρ – плюрисубгармоническая функция на $\mathbb{C}^k$ и $\eta_j, j = 1, 2, \dots, k$, – локально квадратично-интегрируемые функции на $\mathbb{C}^k$. Предположим, что

$$\int |\eta_j(z)|^2 e^{-\rho(z)} d\lambda(z) < \infty$$

для всех j и что η_j удовлетворяют (как обобщенные функции) условиям согласования $\bar{\partial}_j \eta_l = \bar{\partial}_l \eta_j$. Тогда у неоднородных уравнений Коши–Римана $\bar{\partial}_j \psi = \eta_j$ имеется локально квадратично-интегрируемое решение, удовлетворяющее оценке⁴⁾

$$2 \int |\psi(z)|^2 e^{-\rho(z)} (1 + |z|^2)^{-2} d\lambda(z) \leq k^2 \sum_{j=1}^k \int |\eta_j(z)|^2 e^{-\rho(z)} d\lambda(z).$$

Пусть ρ – измеримая локально ограниченная функция на $\mathbb{C}^k$. Обозначим через $L_2(\mathbb{C}^k, e^{-\rho} d\lambda)$ гильбертово пространство функций, квадратично-интегрируемых по мере $e^{-\rho} d\lambda$, а через H_ρ – замкнутое подпространство $L_2(\mathbb{C}^k, e^{-\rho} d\lambda)$, состоящее из целых аналитических функций.

ЛЕММА 8. Пусть ρ_0, ρ и ρ' – такие измеримые локально ограниченные функции на $\mathbb{C}^k$, что $\rho_0 \leq \rho'$ и $\rho \leq \rho'$. Предположим, что для любого $R > 0$ существует такая плюрисубгармоническая функция ρ_R , что

$$\rho_R(z) + 2 \ln(1 + |z|^2) \leq \rho'(z), \quad z \in \mathbb{C}^k, \quad (24)$$

$$\rho_R(z) + 2 \ln(1 + |z|^2) \leq \rho_0(z) + C_R, \quad z \in \mathbb{C}^k, \quad (25)$$

$$\rho_R(z) \geq \rho(z), \quad |z| \leq R, \quad (26)$$

где C_R – константа. Тогда H_ρ содержится в замыкании H_{ρ_0} в $H_{\rho'}$.

⁴⁾ Оценка в лемме 7 отличается от оценки в [15] множителем k^2 в правой части, возникающим из-за использования нами равномерной нормы вместо применявшейся в [15] евклидовой нормы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in H_\rho$ и χ – такая гладкая функция на $\mathbb{C}^k$, что $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(z) = 1$ при $|z| \leq 1$ и $\chi(z) = 0$ при $|z| \geq 2$. Положим $g_n(z) = f(z)\chi(z/n)$. Так как $\bar{\partial}_j g_n(z) = n^{-1}f(z)(\bar{\partial}_j \chi)(z/n)$ обращается в нуль при $|z| \geq 2n$, то из (26) следует, что

$$\int |\bar{\partial}_j g_n(z)|^2 e^{-\rho_{2n}(z)} d\lambda(z) \leq \int |\bar{\partial}_j g_n(z)|^2 e^{-\rho(z)} d\lambda(z) \leq \frac{a}{n^2} \|f\|_\rho^2, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

где $\|\cdot\|_\rho$ – норма в $L_2(\mathbb{C}^k, e^{-\rho} d\lambda)$ и $a = \sup_{z,j} |\bar{\partial}_j \chi(z)|^2$. В силу леммы 7 существует такая локально квадратично-интегрируемая функция ψ_n на $\mathbb{C}^k$, что $\bar{\partial}_j \psi_n = \bar{\partial}_j g_n$ и

$$\int |\psi_n|^2 e^{-\rho_{2n}(z)} (1 + |z|^2)^{-2} d\lambda(z) \leq \frac{k^3 a}{2n^2} \|f\|_\rho^2. \quad (27)$$

С учетом (25) отсюда вытекает, что $\|\psi_n\|_{\rho_0} < \infty$. Далее, имеем $\bar{\partial}_j(g_n - \psi_n) = 0$ и, следовательно, $g_n - \psi_n$ совпадает почти везде с некоторой целой аналитической функцией f_n . Так как g_n – функция с компактным носителем, то $\|g_n\|_{\rho_0} < \infty$ и, следовательно, $f_n \in H_{\rho_0}$. Поскольку $\rho \leq \rho'$, имеем

$$\|f - g_n\|_{\rho'}^2 \leq \int_{|z| \geq n} |f(z)|^2 e^{-\rho(z)} d\lambda(z).$$

Поэтому $g_n \rightarrow f$ в $L_2(\mathbb{C}^k, e^{-\rho'} d\lambda)$. В силу (24) и (27) имеем $\|\psi_n\|_{\rho'}^2 \leq k^3 a \|f\|_\rho^2 / (2n^2)$. Таким образом, $f_n \rightarrow f$ в $H_{\rho'}$ и лемма доказана.

Лемма 8 была доказана в работе [7] другим способом при дополнительном предположении о гладкости ρ_R . Приведенное здесь простое доказательство ближе к способу рассуждения, намеченному в разделе 5 работы [6].

Заметим, что рассматривавшиеся в разделе 2 пространства $H_{\alpha,A}^{\beta,B}(U)$ совпадают с H_ρ при $\rho = 2\rho_{U,A,B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

1. Пусть $f \in \mathcal{E}_\alpha^\beta(U)$. В силу леммы 4 существуют такие $A, B > 0$ и коническая окрестность W конуса U , что $f \in H_{\alpha,A}^{\beta,B}(W)$. Ввиду следствия 1 нетривиальность $\mathcal{E}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^k)$ влечет существование таких $A_0, B_0 > 0$ и $f_0 \in \mathcal{E}_{\alpha,A_0}^{\beta,B_0}(\mathbb{R}^k)$, что $f_0(0) \neq 0$ и $\|f_0\|_{\mathbb{R}^k, A_0, B_0} \leq 1$. Тогда целая функция $\varphi(z) = f_0(z, 0, \dots, 0)$ на $\mathbb{C}$ не равна тождественно нулю и удовлетворяет условию (5). Из леммы 2 и теоремы 2 следует, что функции $\rho = 2\rho_{W,A,B} - H$, $\rho_0 = 2\rho_{\mathbb{R}^k, A', B'}$ и $\rho' = 2\rho_{W, A', B'}$ удовлетворяют условиям леммы 8, если $A' > 2A$, $B' > (2ek + 1)B + 4kA_0B_0/A$ и константа H достаточно велика. В силу леммы 8 найдется последовательность $f_n \in H_{\alpha, A'}^{\beta, B'}(\mathbb{R}^k)$, сходящаяся к f в $H_{\alpha, A'}^{\beta, B'}(W)$. Согласно лемме 4 гильбертова топология пространства $H_{\alpha, A'}^{\beta, B'}(W)$ сильнее, чем топология, индуцированная из $\mathcal{E}_\alpha^\beta(U)$. Следовательно, $f_n \rightarrow f$ в $\mathcal{E}_\alpha^\beta(U)$.

2. Пусть $l: \mathcal{E}_\alpha^\beta(K_1 \cup K_2) \rightarrow \mathcal{E}_\alpha^\beta(K_1) \oplus \mathcal{E}_\alpha^\beta(K_2)$ и $m: \mathcal{E}_\alpha^\beta(K_1) \oplus \mathcal{E}_\alpha^\beta(K_2) \rightarrow \mathcal{E}_\alpha^\beta(K_1 \cap K_2)$ – непрерывные линейные отображения, переводящие f в (f, f) и (f_1, f_2) в $f_1 - f_2$, соответственно. Образ отображения l замкнут, так как в силу определения 2 справедливо равенство $\mathcal{E}_\alpha^\beta(K_1) \cap \mathcal{E}_\alpha^\beta(K_2) = \mathcal{E}_\alpha^\beta(K_1 \cup K_2)$ и, следовательно, $\text{Im } l = \text{Ker } m$.

В силу леммы 4 отсюда вытекает, что $\text{Im } l$ является пространством DFS⁵⁾. Пусть $u \in \mathcal{E}'_\alpha(\mathbb{R}^k)$ – функционал с несущим конусом $K_1 \cup K_2$, $\hat{u}$ – его непрерывное продолжение на $\mathcal{E}'_\alpha(K_1 \cup K_2)$. Согласно теореме об открытом отображении (см. [13], теорема IV.8.3; эта теорема применима, поскольку пространства DFS являются В-полными как сильные сопряженные рефлексивных пространств Фреше [12]) линейный функционал $\hat{u}l^{-1}$ непрерывен на $\text{Im } l$ и по теореме Хана–Банаха обладает непрерывным продолжением v на все пространство $\mathcal{E}'_\alpha(K_1) \oplus \mathcal{E}'_\alpha(K_2)$. Пусть v_1 и v_2 – ограничения v на $\mathcal{E}'_\alpha(K_1)$ и $\mathcal{E}'_\alpha(K_2)$, соответственно. Тогда для любого $f \in \mathcal{E}'_\alpha(K_1 \cup K_2)$ имеем $\hat{u}(f) = v(f, f) = v_1(f) + v_2(f)$. Это означает, что $u = u_1 + u_2$, где $u_{1,2}$ – ограничения $v_{1,2}$ на $\mathcal{E}'_\alpha(\mathbb{R}^k)$. По построению конусы $K_{1,2}$ являются несущими для $u_{1,2}$.

3. Пусть отображения l и m определены, как и выше, $u \in \mathcal{E}'_\alpha(\mathbb{R}^k)$ – функционал, для которого оба конуса K_1 и K_2 являются несущими, и $u_{1,2}$ – его непрерывные продолжения на $\mathcal{E}'_\alpha(K_{1,2})$. Предположим, что отображение m сюръективно. Тогда из теоремы об открытом отображении следует, что пространство $\mathcal{E}'_\alpha(K_1 \cap K_2)$ топологически изоморфно факторпространству $(\mathcal{E}'_\alpha(K_1) \oplus \mathcal{E}'_\alpha(K_2))/\text{Ker } m$. Определим непрерывный линейный функционал v на $\mathcal{E}'_\alpha(K_1) \oplus \mathcal{E}'_\alpha(K_2)$ соотношением $v(f_1, f_2) = u_1(f_1) - u_2(f_2)$. В силу утверждения 1 теоремы функционалы u_1 и u_2 совпадают на $\mathcal{E}'_\alpha(K_1 \cup K_2)$, и, следовательно, $\text{Ker } v \supset \text{Im } l$. Так как $\text{Ker } m = \text{Im } l$, то это включение влечет существование такого функционала $\hat{u} \in \mathcal{E}'_\alpha(K_1 \cap K_2)$, что $v = \hat{u}m$. Если $f_{1,2} \in \mathcal{E}'_\alpha(K_{1,2})$, то $\hat{u}(f_1) = v(f_1, 0) = u_1(f_1)$ и $\hat{u}(f_2) = v(0, -f_2) = u_2(f_2)$. Поэтому $\hat{u}$ служит непрерывным продолжением u на $\mathcal{E}'_\alpha(K_1 \cap K_2)$. Таким образом, доказательство утверждения 3 теоремы сводится к доказательству сюръективности m . Последняя вытекает из следующего результата о разложении пробных функций.

ТЕОРЕМА 3. Пусть пространство $\mathcal{E}'_\alpha(\mathbb{R}^k)$ нетривиально, K_1 и K_2 – замкнутые конусы в $\mathbb{R}^k$ и $f \in \mathcal{E}'_\alpha(K_1 \cap K_2)$. Тогда существуют такие $f_{1,2} \in \mathcal{E}'_\alpha(K_{1,2})$, что $f = f_1 + f_2$.

В следующей лемме собраны некоторые простые свойства конусов в $\mathbb{R}^k$, необходимые для доказательства теоремы 3.

ЛЕММА 9. Пусть K_1 и K_2 – замкнутые конусы в $\mathbb{R}^k$. Тогда:

А. Для любой конической окрестности W конуса $K_1 \cap K_2$ существуют такие конические окрестности $V_{1,2}$ конусов $K_{1,2}$, что $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 \subset W$ (черта обозначает замыкание).

Б. Если $K_1 \cap K_2 = \{0\}$, то найдется такое $\theta > 0$, что $\delta_{K_1}(x) \geq \theta|x|$ для любого $x \in K_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Обозначим через $\mathcal{C}$ множество всех конусов в $\mathbb{R}^k$, содержащих начало координат. По условию K_1 , K_2 и W принадлежат $\mathcal{C}$. Легко видеть,

⁵⁾Напомним, что прямые суммы конечных семейств пространств DFS и замкнутые подпространства пространств DFS есть снова пространства DFS (см. [12]).

что отображение $U \rightarrow \text{Pr } U$ является биекцией между $\mathcal{C}$ и множеством всех подмножеств сферы $\mathbb{S}_{k-1} = (\mathbb{R}^k \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+$. Обозначим через Q обратное к нему отображение. Нетрудно проверить, что оба отображения Pr и Q сохраняют замыкания, объединения и пересечения. Поэтому множества $\text{Pr } K_{1,2}$ замкнуты, и справедливо включение $\text{Pr } K_1 \cap \text{Pr } K_2 \subset \text{Pr } W$. Поскольку сфера $\mathbb{S}_{k-1}$ компактна, существуют такие открытые окрестности $O_{1,2}$ множеств $\text{Pr } K_{1,2}$ в $\mathbb{S}_{k-1}$, что $\overline{O}_1 \cap \overline{O}_2 \subset \text{Pr } W$. Положим $V_{1,2} = Q(O_{1,2})$. Тогда $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = Q(\overline{O}_1 \cap \overline{O}_2) \subset Q(\text{Pr } W) = W$.

Б. Пусть $K_2 \neq \{0\}$ (если $K_2 = \{0\}$, то утверждение верно для любого $\theta > 0$). Положим $F = \{x \in \mathbb{R}^k: x \in K_2 \text{ и } |x| = 1\}$ и $\theta = \inf_{x \in F} \delta_{K_1}(x)$. Так как множество F компактно и $F \cap K_1 = \emptyset$, то $\theta > 0$. Остается заметить, что $\delta_{K_1}(x) = |x| \delta_{K_1}(x/|x|) \geq \theta|x|$ для любого ненулевого $x \in K_2$.

ЛЕММА 10. Пусть $A, B > 0$, а U_1, U_2 и U – такие конусы в $\mathbb{R}^k$, что $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \{0\}$. Предположим, что пространство $\mathcal{E}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^k)$ нетривиально. Тогда для любого $f \in H_{\alpha, A}^{\beta, B}(U)$ найдутся такие $A', B' > 0$ и $f_{1,2} \in H_{\alpha, A'}^{\beta, B'}(U \cup U_{1,2})$, что $f = f_1 + f_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют такие конические окрестности $V_{1,2}$ конусов $\overline{U}_{1,2}$ и такие измеримые конусы $W_{1,2}$, что

$$W_1 \cup W_2 = \mathbb{R}^k, \quad W_1 \cap W_2 = \{0\}, \quad \overline{V}_\nu \cap \overline{W}_\nu = \{0\}, \quad \nu = 1, 2. \quad (28)$$

В самом деле, применяя утверждение А леммы 9 к замкнутым конусам $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ ⁶⁾, найдем такие конические окрестности $V_{1,2}$ конусов $\overline{U}_{1,2}$, что $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \{0\}$. Снова применяя утверждение А леммы 9 к $\overline{V}_{1,2}$, заключаем, что существует такая коническая окрестность W_2 конуса $\overline{V}_1$, что $\overline{V}_2 \cap \overline{W}_2 = \{0\}$. Положим $W_1 = (\mathbb{R}^k \setminus W_2) \cup \{0\}$. Тогда первые два соотношения в (28) очевидным образом выполнены, и $\overline{V}_1 \cap \overline{W}_1 = \overline{V}_1 \cap W_1 = \{0\}$, поскольку конус W_1 замкнут.

Пусть g_0 – такая неотрицательная гладкая функция на $\mathbb{R}^k$, что $g_0(x) = 0$ при $|x| \geq 1$ и

$$\int_{\mathbb{R}^k} g_0(x) dx = 1.$$

Определим гладкие функции g_1 и g_2 на $\mathbb{C}^k$ посредством соотношений

$$g_\nu(x + iy) = \int_{W_\nu} g_0(x - \xi) d\xi, \quad x, y \in \mathbb{R}^k, \quad \nu = 1, 2.$$

В силу (28) имеем $g_1 + g_2 = 1$. Применяя утверждение Б леммы 9 к замкнутым конусам $\overline{U}_\nu$ и $(\mathbb{R}^k \setminus V_\nu) \cup \{0\}$, заключаем, что существует такое $\theta \in (0, 1)$, что $\delta_{U_\nu}(x) \geq \theta|x|$ при $x \notin V_\nu$, $\nu = 1, 2$. Так как $\delta_U(x) \leq |x|$ для любого $x \in \mathbb{R}^k$, то

$$\delta_U(\theta x) \leq \min(\delta_U(x), \theta|x|) \leq \min(\delta_U(x), \delta_{U_\nu}(x)) = \delta_{U \cup U_\nu}(x), \quad x \notin V_\nu. \quad (29)$$

Пусть $\widetilde{W}_\nu = \{x \in \mathbb{R}^k: \delta_{W_\nu}(x) \leq 1\}$, $\nu = 1, 2$. Из (28) и утверждения Б леммы 9 вытекает, что найдется такое $\theta' > 0$, что $\delta_{W_\nu}(x) \geq \theta'|x|$ при $x \in \overline{V}_\nu$, $\nu = 1, 2$.

⁶⁾Заметим, что вырожденный конус $\{0\}$ является конической окрестностью самого себя.

Следовательно, $\delta_{W_\nu}(x) > 1$ для всех $x \in V_\nu$, удовлетворяющих условию $|x| \geq 1/\theta'$, т.е. множества $V_\nu \cap \widetilde{W}_\nu$ ограничены в $\mathbb{R}^k$. С учетом (29) отсюда следует, что

$$\delta_U(x) \leq \delta_{U \cup U_\nu} \left(\frac{x}{\theta} \right) + C, \quad x \in \widetilde{W}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \quad (30)$$

где C – константа. Отсюда находим

$$\delta_U(x) \leq \delta_{U \cup U_1 \cup U_2} \left(\frac{x}{\theta} \right) + C, \quad x \in \widetilde{W}_1 \cap \widetilde{W}_2. \quad (31)$$

Пусть $\tilde{f}_{1,2} = f g_{1,2}$. Так как функция f аналитична, то $\bar{\partial}_j \tilde{f}_1 = f \bar{\partial}_j g_1$, $j = 1, 2, \dots, k$. По определению g_ν имеем $\text{supp } g_\nu \subset \widetilde{W}_\nu$, $\nu = 1, 2$. Поскольку $g_1 + g_2 = 1$, отсюда следует, что $\text{supp } \bar{\partial}_j g_1 \subset \widetilde{W}_1 \cap \widetilde{W}_2$, и согласно (2), (30) и (31) находим

$$\|\tilde{f}_\nu\|'_{U \cup U_\nu, A, \tilde{B}} \leq \tilde{C} \|f\|'_{U, A, B}, \quad \|\bar{\partial}_j \tilde{f}_1\|'_{U \cup U_1 \cup U_2, A, \tilde{B}} \leq \tilde{C} \|f\|'_{U, A, B}, \quad \nu = 1, 2, \quad (32)$$

где $j = 1, 2, \dots, k$, $\tilde{B} = B/\theta$, а $\tilde{C}$ – положительная константа. Как было показано при доказательстве утверждения 1 теоремы 1, нетривиальность пространства $\mathcal{E}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^k)$ влечет существование целой функции φ на $\mathbb{C}$, удовлетворяющей условию (5). В силу леммы 2 и следствия 2 найдутся такие $A' \geq A$, $B' \geq \tilde{B}$ и плюрисубгармоническая функция ρ , что

$$\rho_{U \cup U_1 \cup U_2, A, \tilde{B}}(z) - H \leq \rho(z) \leq \rho_{U \cup U_1 \cup U_2, A', B'}(z) - \ln(1 + |z|^2), \quad z \in \mathbb{C}^k, \quad (33)$$

где H – константа. Из (32) и (33) следует, что

$$\int |\bar{\partial}_j \tilde{f}_1(z)|^2 e^{-2\rho(z)} d\lambda(z) < \infty.$$

В силу леммы 7 у неоднородных уравнений Коши–Римана $\bar{\partial}_j \psi = \bar{\partial}_j \tilde{f}_1$ есть такое локально квадратично-интегрируемое решение, что

$$\int |\psi(z)|^2 e^{-2\rho(z)} (1 + |z|^2)^{-2} d\lambda(z) < \infty. \quad (34)$$

Имеем $\bar{\partial}_j(\tilde{f}_1 - \psi) = \bar{\partial}_j(\tilde{f}_2 + \psi) = 0$, и, следовательно, существуют целые аналитические функции f_1 и f_2 , совпадающие почти везде с $\tilde{f}_1 - \psi$ и $\tilde{f}_2 + \psi$, соответственно. Из правого неравенства в (33) и условия (34) вытекает, что $\|\psi\|'_{U \cup U_1 \cup U_2, A', B'} < \infty$. Ввиду (32) отсюда следует, что $f_\nu \in H_{\alpha, A'}^{\beta, B'}(U \cup U_\nu)$, $\nu = 1, 2$. Для завершения доказательства остается заметить, что $f = f_1 + f_2$, поскольку непрерывные функции, совпадающие почти везде, равны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В силу леммы 4 существуют такие $A, B > 0$ и коническая окрестность W конуса $K_1 \cap K_2$, что $f \in H_{\alpha, A}^{\beta, B}(W)$. Согласно утверждению А леммы 9 найдутся такие конические окрестности $V_{1,2}$ конусов $K_{1,2}$, что $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \subset W$. Так как W имеет открытую проекцию, то конус $V = (\mathbb{R}^k \setminus W) \cup \{0\}$ замкнут. Применяя лемму 10 к замкнутым конусам $U_{1,2} = \bar{V}_{1,2} \cap V$ (очевидно, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$), найдем такие $A', B' > 0$ и $f_{1,2} \in H_{\alpha, A'}^{\beta, B'}(W \cup U_{1,2})$, что $f = f_1 + f_2$. Поскольку $W \cup U_{1,2} \supset V_{1,2}$, из леммы 4 следует, что $f_{1,2} \in \mathcal{E}_\alpha^\beta(K_{1,2})$. Это завершает доказательство теоремы 3 и утверждения 3 теоремы 1.

Благодарности. Данная работа была поддержана РФФИ (грант № 05-01-01049), INTAS (грант № 03-51-6346), Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-4401.2006.2) и грантом МК-1315.2006.1 Президента РФ.

Список литературы

- [1] Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. Т. 1. *Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986.
- [2] A. Z. Capri, R. Ferrari, *J. Math. Phys.*, **25** (1984), 141.
- [3] Р. Ф. Стритер, А. С. Вайтман, *PCT, спин и статистика и все такое*, Наука, М., 1966.
- [4] E. Brüning, S. Nagamachi, *J. Math. Phys.*, **30** (1989), 2340.
- [5] U. Moschella, F. Strocchi, *Lett. Math. Phys.*, **24** (1992), 103.
- [6] M. A. Soloviev, *Lett. Math. Phys.*, **33** (1995), 49.
- [7] M. A. Soloviev, *Commun. Math. Phys.*, **184** (1997), 579.
- [8] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*. Вып. 2. *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, М., 1958.
- [9] А. Г. Смирнов, М. А. Соловьев, *ТМФ*, **125**:1 (2000), 57.
- [10] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*. Вып. 3. *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Физматгиз, М., 1958.
- [11] A. G. Smirnov, *On topological tensor products of functional Fréchet and DF spaces*, [math.FA/0512611](#).
- [12] Н. Комatsu, *J. Math. Soc. Japan*, **19** (1967), 366.
- [13] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971.
- [14] В. С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964.
- [15] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, *Progr. Math.*, **127**, Birkhäuser, Boston, 1994.

Поступила в редакцию 3.10.2006