Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Борисов, О некоторых сингулярных возмущениях периодических операторов, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 2, 207–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6040>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:36:07

© 2007 г.

Д. И. Борисов*

О НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрены два примера сингулярных возмущений периодического дифференциального оператора на оси. Первым примером является быстроосциллирующий потенциал с компактным носителем, вторым – дельта-потенциал с малой комплексной константой связи. Подробно исследованы структура и асимптотическое поведение спектра возмущенных операторов.

Ключевые слова: возмущение, периодический оператор, спектр, асимптотика.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что возмущение периодического оператора Шредингера быстроубывающим потенциалом оставляет неподвижным существенный спектр, в лакунах которого появляются изолированные собственные значения. Отметим, например, работы [1], [2], где были доказаны необходимые и достаточные условия существования таких собственных значений, а также приведен ряд результатов о количестве собственных значений в заданной лакуне. Отдельный интерес представляет случай, когда возмущающий потенциал умножен на малую константу связи. Такая задача в одномерном случае была рассмотрена в работе [2], где было показано, что в каждой лакуне существует не более двух собственных значений, а также были приведены необходимые и достаточные условия, определяющие точное количество собственных значений в заданной лакуне. В работе [3] эти результаты существенно обобщены и расширены на случай произвольного малого регулярного возмущения, которое описывается оператором вида $\varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon$, где ε – малый положительный параметр. Этот оператор был локализован в том смысле, что областью его определения являлось пространство $W_2^2(Q)$, где Q – некоторый фиксированный конечный интервал, а областью значений – пространство $L_2(\mathbb{R}; Q) := \{u: u \in L_2(\mathbb{R}), \text{supp } u \subseteq \overline{Q}\}$. Оператор $\mathcal{L}_\varepsilon: W_2^2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R}; Q)$ предполагался ограниченным равномерно по ε . В работе [3] был подробно изучен спектр возмущенного оператора и доказан ряд утверждений качественного характера, а также исследовалось асимптотическое поведение спектра при $\varepsilon \rightarrow 0$.

*Башкирский государственный педагогический университет, Уфа, Россия.
E-mail: borisovdi@yandex.ru

В настоящей работе мы рассматриваем два примера *сингулярных* возмущений одномерного периодического оператора. Основным отличием от работы [3] является то, что эти возмущения нельзя представить в виде $\varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon$, где оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ удовлетворяет требованиям упомянутой работы. Именно в этом смысле мы понимаем здесь сингулярность рассматриваемых возмущений.

Первым примером, который мы рассматриваем, является возмущение быстроосциллирующим потенциалом – один из простейших примеров сингулярного возмущения из теории усреднения. Оператор умножения на такой потенциал не стремится к нулю равномерно по ε , а потому для такого возмущения не выполнены условия работы [3].

Второй пример – возмущение δ -потенциалом с малой комплексной константой связи. Данное возмущение нельзя представить в виде $\varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon$, где $\mathcal{L}_\varepsilon$ удовлетворяет требованиям работы [3]. Основная причина состоит в том, что область определения возмущенного оператора не совпадает с областью определения предельного периодического оператора; более того, она зависит от малого параметра.

В работе будет показано, что в обоих случаях можно построить специальное преобразование возмущенного оператора и свести исходную задачу к случаю регулярного возмущения, рассмотренного в работе [3]. Такое преобразование позволит нам распространить результаты этой работы и на рассматриваемые здесь сингулярные возмущения. Отметим также, что частный случай возмущения оператора $-d^2/dx^2$ конечным быстроосциллирующим потенциалом рассматривался в статье [4]. В настоящей работе при изучении первого примера мы применяем аналогичную технику и обобщаем результаты работы [4].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Обозначим через

$$\mathcal{H}_0 := -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q$$

самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$, где $p = p(x)$ – 1-периодическая кусочно-непрерывно дифференцируемая вещественная функция, удовлетворяющая оценке $p(x) \geq p_0 > 0$; $q = q(x)$ – 1-периодическая кусочно-непрерывная вещественная функция. Без ограничения общности всюду в работе предполагаем, что $p(0) = 1$.

Как уже было сказано во введении, мы рассматриваем два примера сингулярных возмущений оператора $\mathcal{H}_0$. В первом примере возмущенный оператор имеет вид

$$\mathcal{H}_\varepsilon := \mathcal{H}_0 + \varepsilon^{-a} V\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где $0 \leq a < 1$ – некоторая константа, $V = V(x, \xi) \in C^3(\mathbb{R}^2)$ – комплекснозначная T -периодичная по ξ функция такая, что $\text{supp } V(\cdot, \xi) \subseteq Q$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$ и

$$\int_0^T V(x, \xi) d\xi = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Здесь Q – некоторый фиксированный ограниченный интервал.

Во втором примере возмущением является δ -потенциал вида $\varepsilon\beta\delta(x - x_0)$, где $\beta \in \mathbb{C}$ – некоторая ненулевая константа, x_0 – некоторая фиксированная точка. Строго возмущенный оператор определим следующим образом:

$$\mathcal{H}_\varepsilon u := \left(-\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q \right) u, \quad x \neq x_0,$$

где область определения состоит из функций $u \in W_2^1(\mathbb{R}) \cap W_2^2(-\infty, x_0) \cap W_2^2(x_0, +\infty)$, удовлетворяющих условию

$$u'(x_0 + 0) - u'(x_0 - 0) = \frac{\varepsilon\beta}{p(x_0)} u(x_0). \quad (2.2)$$

Число $u(x_0)$ определено корректно в силу вложения $W_2^1(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$. Отметим, что в обоих примерах возмущенные операторы, вообще говоря, не являются ни самосопряженными, ни симметричными.

Целью работы является изучение поведения спектра возмущенных операторов при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для формулировки основных результатов нам понадобятся дополнительные обозначения. Символами $\sigma(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)$, $\sigma_r(\cdot)$ обозначим соответственно спектр, непрерывный, точечный и остаточный спектры. Пусть $\theta_i = \theta_i(x, \lambda)$ – решения уравнения

$$\left(-\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q \right) v = \lambda v, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\theta_1(0, \lambda) = 1, \quad \theta_1'(0, \lambda) = 0, \quad \theta_2(0, \lambda) = 0, \quad \theta_2'(0, \lambda) = 1,$$

где λ – спектральный параметр. Хорошо известно, что оператор $\mathcal{H}_0$ имеет зонный спектр

$$\sigma(\mathcal{H}_0) = \sigma_c(\mathcal{H}_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [\mu_n^+, \mu_{n+1}^-],$$

где числа

$$\mu_0^+ < \mu_1^- \leq \mu_1^+ < \mu_2^- \leq \mu_2^+ < \mu_3^- \leq \mu_3^+ < \dots$$

– простые собственные значения уравнения (2.3) на отрезке $[0, 1]$ с краевыми условиями

$$\phi_n^\pm(0) + (-1)^{n+1} \phi_n^\pm(1) = 0, \quad \phi_n^{\pm'}(0) + (-1)^{n+1} \phi_n^{\pm'}(1) = 0.$$

Собственные функции $\phi_n^\pm$ выберем вещественными и продолжим 1-периодично для четных n и 1-антипериодично для нечетных n .

Непрерывный спектр оператора $\mathcal{H}_0$ имеет полубесконечную лауну $(-\infty, \mu_0^+)$ и, вообще говоря, внутренние лауны (μ_n^-, μ_n^+) , $n \geq 1$. Если $\mu_n^- = \mu_n^+$ для некоторого n , то соответствующая лауна отсутствует. Всюду далее под $\mu_n^\pm$ мы будем понимать только края лаун в непрерывном спектре оператора $\mathcal{H}_0$, исключая из рассмотрения случай $\mu_n^- = \mu_n^+$.

Если $\mu_n^\pm$ – край некоторой лакуны, то соответствующую собственную функцию $\phi_n^\pm$ нормируем следующим образом:

$$|\phi_n^\pm(0)|^2 + |\phi_n^{\pm'}(0)|^2 = |\theta_1'(\mu_n^\pm)| + |\theta_2(\mu_n^\pm)|.$$

Из теоремы 2.3.1, сформулированной в книге [5], следует, что правая часть данного условия не равна нулю (см. также п. 1 леммы 5.3 из работы [3]). Отметим также, что данная нормировка фиксирует функцию $\phi_n^\pm$ с точностью до знака.

Для $a \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$ обозначим $S_\delta(a) := \{\lambda \in \mathbb{C}: |\arg(\lambda - a)| < \delta\}$.

Основные результаты работы выглядят следующим образом.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0 + \varepsilon^{-a}V(x, x/\varepsilon)$ или $\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0 + \varepsilon\beta\delta(x - x_0)$. Выполнены равенства $\sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon) = \sigma_c(\mathcal{H}_0)$, $\sigma_r(\mathcal{H}_\varepsilon) = \emptyset$. Существуют положительные функции $\delta_i = \delta_i(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} 0$, $i = 1, 2$, такие, что $\sigma_p(\mathcal{H}_\varepsilon) \subset S_{\delta_2(\varepsilon)}(\mu_0^+ - \delta_1(\varepsilon))$ для достаточно малых ε . Точечный спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ состоит из не более чем счетного числа простых собственных значений, не имеющих конечных точек накопления. Непрерывный спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ не содержит вложенных собственных значений. При $\varepsilon \rightarrow +0$ каждое собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ либо сходится к одному из краев лакуны в непрерывном спектре оператора $\mathcal{H}_0$, либо стремится к бесконечности. К каждому краю лакуны в непрерывном спектре сходится не более чем одно собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим, что теорема 2.1 не исключает наличия собственных значений, стремящихся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow +0$. Вместе с тем не утверждается, что такие собственные значения обязательно существуют. Вопрос о существовании подобных собственных значений остается открытым.

Обозначим

$$\gamma_n^\pm := \left| \frac{d\theta_1}{d\lambda}(1, \mu_n^\pm) + \frac{d\theta_2'}{d\lambda}(1, \mu_n^\pm) \right|.$$

Если $\mu_n^\pm$ – край лакуны в непрерывном спектре, то $\gamma_n^\pm > 0$ (см. теорему 2.3.1 из книги [5]).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\mathcal{H}_\varepsilon := \mathcal{H}_0 + \varepsilon^{-a}V(x, x/\varepsilon)$, $\mu_n^\pm$ – край лакуны в непрерывном спектре оператора $\mathcal{H}_0$ и $\operatorname{Re} k_n^\pm \neq 0$, где

$$k_n^\pm := \pm \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n^\pm}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\phi_n^\pm(x))^2}{p(x)} \int_0^T \left(\int_0^\xi V(x, t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T tV(x, t) dt \right)^2 d\xi dx. \quad (2.4)$$

Тогда при достаточно малых ε оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ имеет собственное значение $\lambda_{\varepsilon, n}^\pm$, сходящееся к $\mu_n^\pm$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, если и только если $\operatorname{Re} k_n^\pm > 0$. Асимптотика данного собственного значения имеет вид

$$\lambda_{\varepsilon, n}^\pm = \mu_n^\pm \mp \varepsilon^{4-4a} (k_n^\pm)^2 + O(\varepsilon^{5-5a}).$$

Для соответствующей собственной функции верна асимптотическая формула

$$\psi_{\varepsilon, n}^\pm(x) = \phi_n^\pm(x) + O(\varepsilon^{2-2a})$$

в норме $W_2^1(\alpha_1, \alpha_2)$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Отметим, что техника работы позволяет получить асимптотику собственной функции в условиях теоремы 2.2 и в норме $W_2^2(\alpha_1, \alpha_2)$. Первая поправка этой асимптотики имеет вид $\varepsilon^2 f(x, x/\varepsilon)$, где f – некоторая достаточно гладкая функция, 1-периодичная по второй переменной. Вместе с тем формула для этой функции громоздка, а ее вывод требует объемных технических вычислений. Мы не приводим их в работе, чтобы не перегружать текст.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если потенциал V веществен, то в условиях теоремы 2.2 существует только собственное значение $\lambda_{\varepsilon,n}^+$ возле правого края лакуны. Если потенциал V чисто мнимый, то существует только собственное значение $\lambda_{\varepsilon,n}^-$ возле левого края лакуны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Отметим, что теорема 2.2 не дает ответа о существовании либо отсутствии собственного значения $\lambda_{\varepsilon,n}^\pm$ в случае $\operatorname{Re} k_n^\pm = 0$. В таком критическом случае этот вопрос остается открытым.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\mathcal{H}_\varepsilon := \mathcal{H}_0 + \varepsilon\beta\delta(x - x_0)$, $\mu_n^\pm$ – край лакуны в непрерывном спектре. Тогда при достаточно малых ε оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ имеет собственное значение $\lambda_{\varepsilon,n}^\pm$, сходящееся к $\mu_n^\pm$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, если и только если $\phi_n^\pm(x_0) \neq 0$ и $\pm \operatorname{Re} \beta < 0$. Асимптотика данного собственного значения имеет вид

$$\lambda_{\varepsilon,n}^\pm = \mu_n^\pm \mp \frac{\varepsilon^2 \beta^2 (\phi_n^\pm(x_0))^4}{4\gamma_n^\pm} (1 + O(\varepsilon^2)). \quad (2.5)$$

Для соответствующей собственной функции верна асимптотика

$$\psi_{\varepsilon,n}^\pm(x) = \phi_n^\pm(x) + \varepsilon \phi_{n,1}^\pm(x) + O(\varepsilon^2),$$

$$\phi_{n,1}^\pm(x) := \frac{\beta \phi_n^\pm(x_0)}{2} \begin{cases} \theta_1(x, \mu_n^\pm) \theta_2(x_0, \mu_n^\pm) - \theta_2(x, \mu_n^\pm) \theta_1(x_0, \mu_n^\pm), & x < x_0, \\ \theta_2(x, \mu_n^\pm) \theta_1(x_0, \mu_n^\pm) - \theta_1(x, \mu_n^\pm) \theta_2(x_0, \mu_n^\pm), & x > x_0, \end{cases}$$

в нормах $W_2^1(\alpha_1, \alpha_2)$ и $W_2^2((\alpha_1, \alpha_2) \setminus (x_0 - \alpha_3, x_0 + \alpha_3))$ для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Следует подчеркнуть, что оценки остатков в асимптотических разложениях для собственных значений и собственных функций, приведенных в теоремах 2.2, 2.3, неравномерны по номеру n . Также отметим, что функции $\phi_n^\pm, \phi_{n,1}^\pm$ в асимптотиках для собственных функций не являются элементами $L_2(\mathbb{R})$, а потому данные асимптотики даны в нормах пространств Соболева на конечных интервалах.

3. БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ

В настоящем разделе мы докажем теорему 2.1 для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0 + \varepsilon^{-a}V(x, x/\varepsilon)$, а также теорему 2.2 и следствие 2.1. Для доказательства нам понадобится вспомогательная

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathcal{H}$ – линейный оператор в некотором гильбертовом пространстве, $\mathcal{B}$ – линейный ограниченный оператор в том же пространстве, для которого существует ограниченный обратный, и оператор $\tilde{\mathcal{H}} := \mathcal{B}^{-1}\mathcal{H}\mathcal{B}$ замкнут. Тогда оператор $\mathcal{H}$ замкнут и

$$\sigma_p(\mathcal{H}) = \sigma_p(\tilde{\mathcal{H}}), \quad \sigma_c(\mathcal{H}) = \sigma_c(\tilde{\mathcal{H}}), \quad \sigma_r(\mathcal{H}) = \sigma_r(\tilde{\mathcal{H}}).$$

Утверждение данной леммы проверяется непосредственными вычислениями на основе определений замкнутости оператора, непрерывного, точечного и остаточного спектров.

Основной идеей исследования поведения спектра оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ является построение специального оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ такого, что оператор $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon := \mathcal{B}_\varepsilon^{-1} \mathcal{H}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon$ удовлетворял бы требованиям работы [3]. С учетом леммы 3.1 подобное преобразование позволит применить общие результаты цитированной работы и доказать теоремы 2.1–2.3 и следствие 2.1. Для удобства читателя вначале мы приведем результаты работы [3], которые будут использованы далее.

Обозначим

$$\mathcal{L}_\varepsilon := b_1(x, \varepsilon) \frac{d}{dx} + b_0(x, \varepsilon), \quad (3.1)$$

где функции b_i ограничены равномерно по x и ε и для достаточно малых ε справедливы вложения $\text{supp } b_i(\cdot, \varepsilon) \subseteq [a_1, a_2]$, где $a_i \in \mathbb{R}$ не зависят от ε . Пусть $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon = \mathcal{H}_0 - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon$ – оператор в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Применение результатов примера 1 работы [3] к оператору $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ приводит к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3.1. *Оператор $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ замкнут. Выполнены равенства $\sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon) = \sigma_c(\mathcal{H}_0)$, $\sigma_r(\mathcal{H}_\varepsilon) = \emptyset$. Существуют положительные функции $\delta_i = \delta_i(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} 0$, $i = 1, 2$, такие, что $\sigma_p(\mathcal{H}_\varepsilon) \subset S_{\delta_2(\varepsilon)}(\mu_0^+ - \delta_1(\varepsilon))$ для достаточно малых ε . Точечный спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ состоит из не более чем счетного числа простых собственных значений, не имеющих конечных точек накопления. Непрерывный спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ не содержит вложенных собственных значений. При $\varepsilon \rightarrow +0$ каждое собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ сходится к одному из краев лакун в непрерывном спектре оператора $\mathcal{H}_0$ либо стремится к бесконечности. К каждому краю лакуны в непрерывном спектре сходится не более чем одно собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$.*

Пусть $\mu_n^\pm$ – край лакуны в спектре оператора $\mathcal{H}_0$. Обозначим

$$k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} := \pm \frac{(\mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(a_1, a_2)}}{2\sqrt{\gamma_n^\pm}}, \quad k_{n,\varepsilon}^{\pm,2} := \pm \frac{(\mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{G}_n^\pm \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(a_1, a_2)}}{2\sqrt{\gamma_n^\pm}},$$

где $\mathcal{G}_n$ – интегральный оператор, определенный на $L_2(a_1, a_2)$:

$$(\mathcal{G}_n^\pm f)(x) := \int_{a_1}^{a_2} G_n^\pm(x, t) f(t) dt,$$

$$G_n^\pm(x, t) := \frac{1}{2} \begin{cases} \theta_1(t, \mu_n^\pm) \theta_2(x, \mu_n^\pm) - \theta_1(x, \mu_n^\pm) \theta_2(t, \mu_n^\pm), & t > x, \\ \theta_1(x, \mu_n^\pm) \theta_2(t, \mu_n^\pm) - \theta_1(t, \mu_n^\pm) \theta_2(x, \mu_n^\pm), & t < x. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение (см. теоремы 2.7, 2.8 работы [3]).

ТЕОРЕМА 3.2. *Если*

$$\text{Re}(k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} + \varepsilon k_{n,\varepsilon}^{\pm,2}) \geq C(\varepsilon) \varepsilon^2, \quad C(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} +\infty, \quad (3.2)$$

то при достаточно малых ε оператор $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ имеет собственное значение $\lambda_{\varepsilon,n}^\pm$, сходящееся к $\mu_n^\pm$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Асимптотики данного собственного значения и соответствующей собственной функции имеют вид

$$\lambda_{\varepsilon,n}^\pm = \mu_n^\pm \mp \varepsilon^2 (k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} + \varepsilon k_{n,\varepsilon}^{\pm,2})^2 + O(\varepsilon^4 |k_{n,\varepsilon}^{\pm,1}| + \varepsilon^5), \quad (3.3)$$

$$\psi_{\varepsilon,n}^\pm = \phi_n^\pm + \varepsilon \mathcal{G}_n^\pm \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm + O(\varepsilon^2), \quad (3.4)$$

где последняя понимается в норме $W_2^2(\alpha_1, \alpha_2)$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Если

$$\operatorname{Re}(k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} + \varepsilon k_{n,\varepsilon}^{\pm,2}) \leq -C(\varepsilon)\varepsilon^2, \quad C(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} +\infty, \quad (3.5)$$

то оператор $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ не имеет собственных значений, сходящихся к $\mu_n^\pm$.

Докажем теорему 2.1 в случае быстроосциллирующего потенциала. Обозначим

$$b(x, \xi) := \frac{1}{p(x)} \int_0^\xi (\xi - t)V(x, t) dt + \frac{\xi}{Tp(x)} \int_0^T tV(x, t) dt.$$

Используя условие (2.1), нетрудно проверить, что функция $b \in C^2(\mathbb{R}^2)$ является T -периодическим по ξ решением уравнения

$$p(x) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} b(x, \xi) = V(x, \xi). \quad (3.6)$$

Так как $\operatorname{supp} V(\cdot, \xi) \subseteq Q$, где, напомним, Q – некоторый фиксированный ограниченный интервал, то аналогичное вложение верно и для функции b .

Пусть $\mathcal{B}_\varepsilon$ – оператор умножения на функцию $(1 + \varepsilon^{2-a}b(x, x/\varepsilon))$. Ясно, что оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ ограничен и при достаточно малых ε ограниченно-обратим как оператор в $L_2(\mathbb{R})$ и $\mathcal{B}_\varepsilon W_2^2(\mathbb{R}) = W_2^2(\mathbb{R})$. Обозначим $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon := \mathcal{B}_\varepsilon^{-1} \mathcal{H}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon$. Прямые вычисления проверяется, что $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon = \mathcal{H}_0 - \varepsilon^{1-a} \mathcal{L}_\varepsilon$, где оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ определяется равенством (3.1) со следующими коэффициентами:

$$b_1 = \frac{2\varepsilon p}{1 + \varepsilon^{2-a}b} \frac{db}{dx}, \quad b_0 = \frac{1}{1 + \varepsilon^{2-a}b} \left(\varepsilon \frac{dp}{dx} \frac{db}{dx} + 2p \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial \xi} + \varepsilon p \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - \varepsilon^{1-a} b V \right).$$

Здесь и всюду далее до конца раздела в качестве аргументов функций b и V берутся x и x/ε , если не сказано иное. Символ db/dx означает полную производную по x функции $b(x, x/\varepsilon)$. Так как

$$\begin{aligned} b_1(x, \varepsilon) &= \frac{2p(x)}{1 + \varepsilon^{2-a}b(x, \frac{x}{\varepsilon})} \left(\varepsilon \frac{\partial b}{\partial x} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \frac{\partial b}{\partial \xi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right), \\ b_0(x, \varepsilon) &= \frac{1}{1 + \varepsilon^{2-a}b(x, \frac{x}{\varepsilon})} \left(\frac{dp}{dx}(x) \left(\varepsilon \frac{\partial b}{\partial x} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \frac{\partial b}{\partial \xi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) + 2p \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial \xi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon p(x) \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - \varepsilon^{1-a} b \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) V \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right), \end{aligned}$$

то из гладкости функций b и p следует, что функции b_i кусочно-непрерывны и ограничены равномерно по x и ε . Из вложения $\operatorname{supp} b(\cdot, \xi) \subseteq Q$ и приведенных формул

для b_i следует, что $\text{supp } b_i(\cdot, \varepsilon) \subseteq Q$ для достаточно малых ε . Следовательно, оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ отображает $W_2^1(Q)$ в $L_2(\mathbb{R}; Q)$ и ограничен равномерно по ε . Поэтому оператор $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ удовлетворяет всем предположениям работы [3], если ε^{1-a} рассматривать как новый малый параметр. Для завершения доказательства теперь осталось применить теорему 3.1 и учесть затем лемму 3.1.

Докажем теорему 2.2. С учетом леммы 3.1 и теоремы 3.2 достаточно исследовать существование и асимптотическое поведение собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$, введенного в доказательстве предыдущей теоремы. В данном случае в качестве малого параметра в (3.2)–(3.4) следует понимать ε^{1-a} . С учетом этого факта неравенства (3.2), (3.5) и асимптотики (3.3), (3.4) принимают вид

$$\text{Re}(k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} + \varepsilon^{1-a} k_{n,\varepsilon}^{\pm,2}) \geq C(\varepsilon) \varepsilon^{2-2a}, \quad (3.7)$$

$$\text{Re}(k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} + \varepsilon^{1-a} k_{n,\varepsilon}^{\pm,2}) \leq -C(\varepsilon) \varepsilon^{2-2a}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon,n}^\pm &= \mu_n^\pm \mp \varepsilon^{2-2a} (k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} + \varepsilon^{1-a} k_{n,\varepsilon}^{\pm,2})^2 + O(\varepsilon^{4-4a} |k_{n,\varepsilon}^{\pm,1}| + \varepsilon^{5-5a}), \\ \psi_{\varepsilon,n}^\pm &= \phi_n^\pm + \varepsilon^{1-a} \mathcal{G}_n^\pm \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm + O(\varepsilon^{2-2a}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из определений оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ и функции $\phi_n^\pm$ следует, что в норме $L_2(Q)$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm &= (1 + \varepsilon^{2-a} b) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm + O(\varepsilon^{2-a}) = \\ &= -\varepsilon^{a-1} (1 + \varepsilon^{2-a} b) (\mathcal{H}_0 - \mu_n^\pm - \varepsilon^{1-a} \mathcal{L}_\varepsilon) \phi_n^\pm + O(\varepsilon^{2-a}) = \\ &= -\varepsilon^{a-1} (\mathcal{H}_0 - \mu_n^\pm + \varepsilon^{-a} V) (1 + \varepsilon^{2-a} b) \phi_n^\pm + O(\varepsilon^{2-a}) = \\ &= -\varepsilon (\mathcal{H}_0 - \mu_n^\pm) b \phi_n^\pm - \varepsilon^{-1} V (1 + \varepsilon^{2-a} b) \phi_n^\pm + O(\varepsilon^{2-a}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Подставляя это представление в формулу для $k_{\varepsilon,n}^{\pm,1}$ и интегрируя по частям с учетом финитности b , получаем

$$k_{\varepsilon,n}^{\pm,1} = \mp \frac{\varepsilon^{-1}}{2\sqrt{\gamma_n^\pm}} (V(1 + \varepsilon^{2-a} b) \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} + O(\varepsilon^{2-a}).$$

Из этой формулы, гладкости V , леммы из работы [4], (2.1), (3.6) и T -периодичности функции $b(x, \cdot)$ выводим

$$\begin{aligned} (V(1 + \varepsilon^{2-a} b) \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} &= \varepsilon^{2-a} \int_{\mathbb{R}} (\phi_n^\pm(x))^2 \int_0^T b(x, \xi) V(x, \xi) d\xi dx + O(\varepsilon^3), \\ \int_0^T b(x, \xi) V(x, \xi) d\xi &= p(x) \int_0^T b(x, \xi) \frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2}(x, \xi) d\xi = -p(x) \int_0^T \left(\frac{\partial b}{\partial \xi}(x, \xi) \right)^2 d\xi = \\ &= -\frac{1}{p(x)} \int_0^T \left(\int_0^\xi V(x, t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T t V(x, t) dt \right)^2 d\xi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$k_{\varepsilon,n}^{\pm,1} = \varepsilon^{1-a} k_n^\pm + O(\varepsilon^{2-a}), \quad (3.11)$$

где $k_{\varepsilon,n}^\pm$ определяется формулой (2.4). Из равенства (3.10) и определения оператора $\mathcal{G}_n^\pm$ следует, что в норме $W_2^2(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, верно соотношение

$$\mathcal{G}_n^\pm \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm = -\varepsilon b \phi_n^\pm - \varepsilon^{-1} \mathcal{G}_n^\pm V \phi_n^\pm + O(\varepsilon^{1-a}).$$

С учетом уравнения (3.6) нетрудно проверить, что

$$V\phi_n^\pm = \varepsilon^2 \frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} b\phi_n^\pm - \varepsilon^2 \frac{d}{dx} \left(2p \frac{\partial}{\partial x} b\phi_n^\pm + b\phi_n^\pm \frac{dp}{dx} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p b\phi_n^\pm.$$

Интегрируя теперь по частям и используя очевидное равенство $\theta_1(x, \mu_n^\pm) \theta_2'(x, \mu_n^\pm) - \theta_2(x, \mu_n^\pm) \theta_1'(x, \mu_n^\pm) = p^{-1}(x)$, получаем, что

$$\varepsilon^{-1} \mathcal{G}_n^\pm V\phi_n^\pm = -\varepsilon b\phi_n^\pm + O(\varepsilon)$$

в норме $W_2^1(\alpha_1, \alpha_2)$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\mathcal{G}_n^\pm \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm = O(\varepsilon^{1-a})$$

в норме $W_2^1(\alpha_1, \alpha_2)$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. С учетом определения оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ заключаем, что $\|\mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{G}_n^\pm \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm\|_{L_2(Q)} = O(\varepsilon^{1-a})$, а потому $k_{n,\varepsilon}^{\pm,2} = O(\varepsilon^{1-a})$. Из (3.11) теперь вытекает, что

$$k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} + \varepsilon^{1-a} k_{n,\varepsilon}^{\pm,2} = \varepsilon^{1-a} k_n^\pm + O(\varepsilon^{2-2a}).$$

Таким образом, в случае $\operatorname{Re} k_n^\pm > 0$ справедливо неравенство (3.7), а в случае $\operatorname{Re} k_n^\pm < 0$ – неравенство (3.8), где в обоих случаях $C(\varepsilon) = \varepsilon^{(a-1)/2}$. Отсюда, из (3.9) и определения оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ следует утверждение теоремы.

Следствие 2.1 вытекает непосредственно из теоремы 2.2. Достаточно лишь учесть, что если V – вещественнозначная функция, то $k_n^+ > 0$, $k_n^- < 0$, а если V – чисто мнимая функция, то $k_n^+ < 0$, $k_n^- > 0$.

4. δ -ПОТЕНЦИАЛ

В данном разделе мы изучим спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0 + \varepsilon\beta\delta(x - x_0)$ и докажем для него теоремы 2.1, 2.3.

Для доказательства теоремы 2.1 в случае δ -потенциала определим оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ как умножение на функцию $(1 + \varepsilon b(x))$, где

$$b(x) := \frac{\beta}{2p(x_0)} \chi(x) |x - x_0|,$$

χ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице в малой окрестности точки x_0 и обращающаяся в нуль вне некоторой большей окрестности. Функция b финитна, бесконечно дифференцируема во всех точках вещественной оси, кроме x_0 , в которой ее производная имеет разрыв первого рода:

$$b'(x_0 \pm 0) = \pm \frac{\beta}{2p(x_0)}, \quad b(x_0) = 0. \quad (4.1)$$

Оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ ограничен и при достаточно малых ε ограниченно-обратим как оператор в $L_2(\mathbb{R})$.

Обозначим $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon := \mathcal{B}_\varepsilon^{-1} \mathcal{H}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon$ и докажем, что оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ взаимно однозначно отображает пространство $W_2^2(\mathbb{R})$ на область определения оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$. Пусть

$v \in W_2^2(\mathbb{R})$; положим $u := \mathcal{B}_\varepsilon v$. Ясно, что $u \in W_2^1(\mathbb{R}) \cap W_2^2(-\infty, x_0) \cap W_2^2(x_0, +\infty)$. Условие (2.2) следует из (4.1) и вложения $W_2^2(\mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R})$. Пусть теперь u принадлежит области определения оператора $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$; обозначим $v := \mathcal{B}_\varepsilon^{-1}u = u/(1 + \varepsilon b)$. Очевидно, что $v \in W_2^1(\mathbb{R}) \cap W_2^2(-\infty, x_0) \cap W_2^2(x_0, +\infty)$, а потому $v \in C^1(-\infty, x_0] \cap C^1[x_0, +\infty)$. Учитывая (2.2) и (4.1), нетрудно проверить, что

$$v'(x_0 + 0) = v'(x_0 - 0).$$

Используя это равенство и интегрируя по частям, получаем

$$(v, \zeta'')_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{x_0} v \bar{\zeta}'' dx + \int_{x_0}^{+\infty} v \bar{\zeta}'' dx = \int_{-\infty}^{x_0} \bar{\zeta} v'' dx + \int_{x_0}^{+\infty} \bar{\zeta} v'' dx$$

для любой функции $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Следовательно, существует вторая обобщенная производная функции v , которая совпадает со второй обобщенной производной этой функции на $(-\infty, x_0)$ и $(x_0, +\infty)$. Таким образом, $v \in W_2^2(\mathbb{R})$.

Прямыми вычислениями непосредственно проверяется, что оператор $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ имеет вид $\mathcal{H}_0 - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon$, где оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ определяется формулой (3.1) со следующими коэффициентами:

$$b_1 = \frac{2pb'}{1 + \varepsilon b}, \quad b_0 = \frac{(pb')'}{1 + \varepsilon b}, \quad x \neq x_0.$$

Ясно, что функции b_i ограничены равномерно по x и ε . Применяя теперь теорему 3.1 к оператору $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ и учитывая лемму 3.1, приходим к утверждению теоремы.

Теорему 2.3 можно было бы доказать аналогично теореме 2.2 с использованием оператора $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$, построенного в доказательстве предыдущей теоремы. Вместе с тем здесь мы воспользуемся несколько иным подходом.

Для оператора $(\mathcal{H}_0 - \lambda)$ нетрудно выписать функцию Грина, выразив ее через функции θ_i . Положим $\lambda = \mu_n^\pm \mp k^2$, где k – малый комплексный параметр, и обозначим через $\Gamma_n^\pm(x, t, k)$ функцию Грина, соответствующую $\lambda = \mu_n^\pm \mp k^2$. Отметим ряд свойств этой функции, установленных в лемме 7.1 работы [3]. Функция $\Gamma_n^\pm$ может быть продолжена по $k \in \mathbb{C}$, так что она оказывается мероморфной по k функцией, имеющей полюс в точке $k = 0$. Первые члены ряда Лорана этой функции в точке $k = 0$ имеют вид

$$\Gamma_n^\pm(x, t, k) = \pm \frac{\phi_n^\pm(x) \phi_n^\pm(t)}{2k \sqrt{\gamma_n^\pm}} + G_n^\pm(x, t) + \dots \quad (4.2)$$

При $x \rightarrow \pm\infty$ функция $\Gamma_n^\pm$ ведет себя следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_n^\pm(x, t, k) &= k^{-1} e^{-k \varkappa_n^\pm(k)x} \Phi_{n,\pm}^+(x, t, k), & x \rightarrow +\infty, \\ \Gamma_n^\pm(x, t, k) &= k^{-1} e^{k \varkappa_n^\pm(k)x} \Phi_{n,\pm}^-(x, t, k), & x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где функции $\Phi_{n,\pm}^\pm$ и $\varkappa_n^\pm(k)$ голоморфны по k и 1-периодичны по x , и $\varkappa_n^\pm(0) > 0$, $\Phi_{n,\pm}^\pm(x, t, 0) \neq 0$. Справедливо равенство

$$\Gamma_n^\pm(x_0, x_0, k) = \pm \frac{(\phi_n^\pm(x_0))^2}{2k \sqrt{\gamma_n^\pm}} + k f_n^\pm(k^2), \quad (4.4)$$

где $f_n^\pm$ – голоморфная функция такая, что $f_n^\pm(t) \in \mathbb{R}$, если $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\lambda_{\varepsilon,n}^\pm$ – собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, сходящееся к $\mu_n^\pm$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Тогда соответствующая собственная функция является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q - \mu_n^\pm \pm k^2 \right) \psi &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}, \\ \psi(x_0 + 0) &= \psi(x_0 - 0), \quad \frac{d\psi}{dx}(x_0 + 0) - \frac{d\psi}{dx}(x_0 - 0) = \frac{\varepsilon\beta}{p(x_0)} \psi(x_0), \end{aligned} \quad (4.5)$$

и ведет себя при $x \rightarrow +\infty$ так же, как и функция $\Gamma_n^\pm$ (см. (4.3)). Здесь число k выбирается из условия $\operatorname{Re} k \varkappa_n^\pm(k) > 0$, что в силу (4.3) обеспечивает принадлежность функции $\psi_{\varepsilon,n}^\pm$ к области определения оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$. Следовательно, функция $\psi_{\varepsilon,n}^\pm$ может быть представлена в виде

$$\psi_{\varepsilon,n}^\pm(x) = k \Gamma_n^\pm(x, x_0, k). \quad (4.6)$$

Такой выбор обеспечивает выполнение уравнения и первого из краевых условий в (4.5). Подставим теперь (4.6) во второе из краевых условий в (4.5) и учтем равенство

$$\frac{\partial \Gamma_n^\pm(x_0 + 0, x_0, k)}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_n^\pm(x_0 - 0, x_0, k)}{\partial x} = -\frac{1}{p(x_0)}.$$

Тогда получим следующее уравнение:

$$k = -\varepsilon\beta k \Gamma_n^\pm(x_0, x_0, k). \quad (4.7)$$

Данное уравнение определяет те значения k , при которых краевая задача (4.5) имеет нетривиальное решение, ведущее себя на бесконечности аналогично (4.3) (но без множителя k^{-1}). Более того, данное решение определяется формулой (4.6). С учетом (4.4) уравнение (4.7) можно переписать в виде

$$k = \mp \frac{\varepsilon\beta(\phi_n^\pm(x_0))^2}{2\sqrt{\gamma_n^\pm}} - \varepsilon\beta k^2 f_n^\pm(k^2). \quad (4.8)$$

Используя теорему Руше, аналогично доказательству леммы 7.2 в работе [3] нетрудно показать, что последнее уравнение имеет единственный корень $k_{\varepsilon,n}^\pm$, сходящийся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$. Так как

$$k(1 + \varepsilon\beta k f_n^\pm(k^2)) = \mp \frac{\varepsilon\beta(\phi_n^\pm(x_0))^2}{2\sqrt{\gamma_n^\pm}},$$

то данный корень имеет асимптотику

$$k_{\varepsilon,n}^\pm = \mp \frac{\varepsilon\beta(\phi_n^\pm(x_0))^2}{2\sqrt{\gamma_n^\pm}} (1 + O(\varepsilon^2)). \quad (4.9)$$

Если $\mp(\phi_n^\pm(x_0))^2 \operatorname{Re} \beta > 0$, то $\operatorname{Re} k_{\varepsilon,n}^\pm > 0$, и потому $\operatorname{Re} k_{\varepsilon,n}^\pm \varkappa_n^\pm(k_{\varepsilon,n}^\pm) > 0$. Следовательно, соответствующее нетривиальное решение задачи (4.5) принадлежит области

определения оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, и потому $\lambda_{\varepsilon,n}^\pm = \mu_n^\pm \mp (k_{\varepsilon,n}^\pm)^2$ – собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, сходящееся к $\mu_n^\pm$. Асимптотика (2.5) теперь следует из (4.9). Асимптотика соответствующей собственной функции вытекает из (4.2), (4.6), (4.9).

Если $\mp (\phi_n^\pm(x_0))^2 \operatorname{Re} \beta < 0$, то из (4.9) следует, что $\operatorname{Re} k_{\varepsilon,n}^\pm < 0$, $\operatorname{Re} k_{\varepsilon,n}^\pm \kappa_n^\pm(k_{\varepsilon,n}^\pm) < 0$. Если $\phi_n^\pm(x_0) = 0$, то из (4.9) вытекает, что $k_{\varepsilon,n} = 0$, $k_{\varepsilon,n}^\pm \kappa_n^\pm(k_{\varepsilon,n}^\pm) = 0$. Таким образом, в этих случаях нетривиальное решение задачи (4.5) не принадлежит области определения оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, и данный оператор не имеет собственного значения, сходящегося к $\mu_n^\pm$.

Пусть теперь $\phi_n^\pm(x_0) \neq 0$, $\beta = i\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}$. Корень уравнения (4.8) представим в виде $k = \varepsilon\tilde{\beta}\tilde{k}$ и подставим это равенство в (4.8). Тогда получим

$$\tilde{k} \mp \frac{(\phi_n^\pm(x_0))^2}{2\sqrt{\gamma_n^\pm}} + \varepsilon^2 \beta^2 \tilde{k}^2 f_n^\pm(-\varepsilon^2 \beta^2 \tilde{k}^2) = 0.$$

Используя теперь вещественность функции $f_n^\pm(-\varepsilon^2 \beta^2 \tilde{k}^2)$ и теорему об обратной функции, нетрудно показать, что последнее уравнение имеет единственный вещественный корень $\tilde{k}_{\varepsilon,n}$, стремящийся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$. Следовательно, $k_{\varepsilon,n}^\pm = i\varepsilon\tilde{\beta}\tilde{k}_{\varepsilon,n}^\pm$. Тогда $\mu_n^\pm \mp \varepsilon^2 k_{\varepsilon,n}^2 = \mu_n^\pm \pm \varepsilon^2 \tilde{\beta}^2 (\tilde{k}_{\varepsilon,n}^\pm)^2$, и $\mu_n^+ + \varepsilon^2 \tilde{\beta}^2 (\tilde{k}_{\varepsilon,n}^+)^2 \in [\mu_n^+, \mu_{n+1}^-]$, $\mu_n^- - \varepsilon^2 \tilde{\beta}^2 (\tilde{k}_{\varepsilon,n}^-)^2 \in [\mu_{n-1}^+, \mu_n^-]$. Следовательно, число $\mu_n^\pm \mp \varepsilon^2 k_{\varepsilon,n}^2$ не может быть собственным значением оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, так как в силу теоремы 2.1 данный оператор не имеет вложенных собственных значений.

Благодарности. Автор благодарен рецензенту за полезные замечания, позволившие улучшить статью и, в частности, усилить теорему 2.3.

Работа выполнена при поддержке стипендии “Marie Curie International Fellowship” в рамках 6-й Европейской рамочной программы (MIF1-СТ-2005-006254) и частичной поддержке РФФИ (гранты № 06-01-00138, 05-01-97912-р_агидель).

Список литературы

- [1] Ф. С. Рофе-Бекетов, *ДАН СССР*, **156**:3 (1964), 515–518; В. А. Желудев, *Пробл. матем. физ.*, **2** (1967), 108–123; **3** (1968), 31–48.
- [2] F. Gesztesy, B. Simon, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **335**:1 (1993), 329–340.
- [3] D. Borisov, R. Gadyl'shin, *On spectrum of a periodic operator with a small localized perturbation*, [math.SP/0609195](#).
- [4] Д. И. Борисов, Р. Р. Гадыйльшин, *ТМФ*, **147**:1 (2006), 58–63.
- [5] M. S. P. Eastham, *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*, Scottish Acad. Press, Edinburg, 1973.

Поступила в редакцию 8.09.2006,
после доработки 23.10.2006