Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Санига, М. Плана, М. Минаровеч, Проективная прямая над конечным фактор-кольцом $GF(2)[x]/\langle x^3 - x \rangle$ и квантовое зацепление. “Магические” квадрат и пентаграмма Мермина, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 2, 219–227

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6041>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 18:34:25

© 2007 г. М. Санига*, М. Плана†, М. Минаровеч*

ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ НАД КОНЕЧНЫМ ФАКТОР-КОЛЬЦОМ $GF(2)[x]/\langle x^3 - x \rangle$ И КВАНТОВОЕ ЗАЦЕПЛЕНИЕ. “МАГИЧЕСКИЕ” КВАДРАТ И ПЕНТАГРАММА МЕРМИНА

В 1993 г. Мермин дал удивительно простые доказательства теоремы Белла–Кохена–Шпеккера в гильбертовых пространствах размерностей 4 и 8, используя конструкции, которые с этого момента стали называться соответственно “магическим” квадратом Мермина–Переса и пентаграммой Мермина. Первая конструкция представляет собой (3×3) -массив девяти наблюдаемых, попарно коммутирующих в каждой строке и каждом столбце и организованных таким образом, что свойства их произведений вступают в противоречие со свойствами приписанных им собственных значений. Вторая конструкция представляет собой множество из десяти наблюдаемых, упорядоченных в пять групп по четыре элемента, расположенных вдоль пяти сторон пентаграммы, и характеризуется аналогичным противоречием. Найдено взаимно однозначное соответствие между операторами квадрата Мермина–Переса и точками проективной прямой над кольцом $GF(2) \otimes GF(2)$. При таком отображении понятие *взаимного коммутирования* трансформируется в понятие *взаимной удаленности*, и отличительный признак наблюдаемых из третьего столбца имеет свой аналог в характеристических свойствах координат соответствующих точек, оба координатных элемента которых одновременно либо являются делителями нуля, либо обратимы. Десять операторов пентаграммы Мермина отвечают особому подмножеству точек проективной прямой над кольцом $GF(2)[x]/\langle x^3 - x \rangle$. Однако в этом случае ситуация более запутанная, поскольку существуют две различные конфигурации, одинаково хорошо подходящие для наших целей. Одна конфигурация состоит из трех различных точек (суб)прямой над $GF(2)$, трех отвечающих им “точек Джекобсона” и четырех точек, обе координаты которых являются делителями нуля. Другая конфигурация содержит окрестность точки $(1, 0)$ (или, эквивалентно, точки $(0, 1)$). Отмечены также некоторые другие прямые над кольцами, которые могут иметь отношение к доказательствам теоремы Белла–Кохена–Шпеккера в более высоких размерностях.

*Astronomical Institute, Slovak Academy of Sciences Tatranská Lomnica, Slovak Republic.
E-mail: msaniga@astro.sk, milanmin@astro.sk

†Institut FEMTO-ST, CNRS, Département LPMO, Besançon, France.
E-mail: planat@lpmo.edu

Ключевые слова: проективная прямая над кольцом, отношения близости и удаленности, квадрат Мермина, пентаграмма Мермина, квантовое зацепление.

1. ВВЕДЕНИЕ

В первой части работы [1], после изложения основных свойств коммутативных колец с единицей, было введено важное алгебраическо-геометрическое понятие – проективная прямая, определенная над (конечным) кольцом. Это понятие было затем детально рассмотрено на примере двух достаточно элементарных проективных прямых над кольцами: прямой, определенной над фактор-кольцом $GF(2)[x]/\langle x^3 - x \rangle$, и прямой над кольцом $GF(2) \otimes GF(2)$, представляющим собой прямое произведение. Обе прямые содержат конечное число точек (соответственно 18 и 9), которые, как было показано, образуют три различные группы на основе так называемых отношений близости и удаленности и обладают рядом интересных свойств. В данной работе мы намерены продемонстрировать, что эти две замечательные геометрии над кольцами могут быть использованы для имитации структуры “магического” квадрата Мермина–Переса и пентаграммы Мермина – двух важнейших составляющих в одном из самых простых доказательств теоремы Белла–Кохена–Шпеккера (БКШ), представленных в настоящее время [2], [3].

Несколько лет назад Аравинд [4] показал, что 24 квантовых состояния (или луча), использованные Пересом в работе [5] для доказательства теоремы БКШ, тесно связаны с конфигурацией Рейе, состоящей из 12 точек и 16 прямых в классическом проективном пространстве, т.е. пространстве, определенном над полем. Додекаэдр Зимбы и Пенроуза [6] – это еще одна конфигурация со многими интересными классическими проективными свойствами, которая оказывается значимой при доказательствах теоремы БКШ. Настоящая работа, таким образом, может рассматриваться как естественное качественное распространение и/или обобщение геометрической аргументации в духе Аравинда и Зимбы–Пенроуза на область более абстрактных проективных геометрий, где поля заменены кольцами.

2. ТЕОРЕМА БКШ И ДВЕ КОНФИГУРАЦИИ МЕРМИНА

Квантовая механика, вообще говоря, налагает только статистические ограничения на результаты измерений, и поэтому весьма соблазнительно предположить, что она представляет собой неполную теорию, являясь следствием более полного описания в терминах так называемых скрытых параметров или “факторов реальности” [7]. Теорема БКШ утверждает, что такое описание невозможно [8], [9]. Она показывает, что любая теория со скрытыми параметрами в гильбертовом пространстве размерности ≥ 3 должна быть контекстуально зависимой, т.е. основываться не только на скрытых параметрах в изучаемой квантовой системе, но также и на аналогичных параметрах для измерительного прибора. Существуют многочисленные доказательства этой теоремы, отличающиеся друг от друга философской и технической сторонами дела, однако доказательства, предложенные Мерминым в работах [2], [3]

Рис. 1. “Магический” квадрат Мермина–Переса [2]. Эта конфигурация единственна с точностью до перестановки строк и столбцов.

для размерностей 4 и 8 выделяются как наиболее прямые и лаконичные среди всех имеющихся. Здесь нас не будут интересовать эти доказательства сами по себе, мы сконцентрируемся исключительно на двух замечательных конфигурациях наблюдаемых, которые играют в них ключевую и решающую роль.

Начнем с размерности 4 и, значит, с конфигурации, обычно именуемой “магическим” квадратом Мермина–Переса (см. [10]). Эта конфигурация, изображенная на рис. 1, представляет собой (3×3) -массив из девяти наблюдаемых для системы двух кубитов, где верхний индекс нумерует кубиты, а σ_x , σ_y , σ_z – матрицы Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Легко проверить, что каждая строка и каждый столбец состоят из трех попарно коммутирующих операторов и что произведение трех операторов в каждой строке и в каждом из первых двух столбцов равно $+I$ (единичной матрице), а произведение операторов третьего столбца равно $-I$. Теперь каждому оператору в квадрате можно приписать собственное значение ± 1 , и поскольку эти собственные значения должны удовлетворять тем же равенствам, что и сами операторы, их произведение в каждой строке и в любом из первых двух столбцов должно равняться $+1$, а в последнем столбце – -1 . Это, однако, невозможно, поскольку четность по строкам является положительной, а по столбцам – отрицательной; отсюда и название – “магический” квадрат. Переходя к размерности 8, Мермин [2] рассматривает три кубита вместо двух и использует десять соответствующих наблюдаемых, расположенных в вершинах пентаграммы, как показано на рис. 2. Четыре наблюдаемых, расположенных вдоль каждой из пяти сторон пентаграммы, взаимно коммутируют, а их произведение равно $+I$, за исключением горизонтальной стороны, для которой произведение соответствующих операторов равно $-I$. Поскольку те же равенства должны также выполняться для собственных значений, приписанных наблюдаемым, такая конфигурация не может существовать, потому что каждая наблюда-

Рис. 2. Пентаграмма Мермина [2]. Верхний индекс теперь нумерует три кубита.

емая и, следовательно, ее собственное значение принадлежат одновременно двум сторонам.

Две описанные выше конфигурации очень похожи друг на друга, так как обе они состоят из конечного числа множеств с одинаковым числом попарно коммутирующих наблюдаемых, причем одно из множеств занимает качественно иное положение по сравнению со всеми остальными. Возникает естественный вопрос: можно ли найти какую-нибудь иную алгебраическо-геометрическую конфигурацию, демонстрирующую аналогичное поведение? Ответ на этот вопрос утвердительный, и чтобы подтвердить это, необходимо вернуться к разделу 4 работы [1].

3. КВАДРАТ МЕРМИНА–ПЕРЕСА И ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ НАД КОЛЬЦОМ $GF(2) \otimes GF(2)$

Рассмотрим сначала геометрический аналог квадрата Мермина, который оказывается не чем иным, как $P\tilde{R}_{\diamond}(1)$ – проективной прямой, определенной над кольцом $GF(2) \otimes GF(2)$ [1]. Девять точек этой прямой (см. формулы (17) в работе [1]) могут быть упорядочены в (3×3) -массив, как показано на рис. 3. Этот массив обладает тем важным свойством, что все точки в каждой строке и в каждом столбце являются попарно удаленными. Кроме того, посмотрев внимательно на рис. 3, видим, что один триплет взаимно удаленных точек, расположенный в третьем столбце, отличается от всех остальных тем, что оба координатных элемента всех его трех точек имеют одинаковую природу, а именно: либо оба являются делителями нуля (точки $(x, x + 1)$ и $(x + 1, x)$), либо оба обратимы (точка $(1, 1)$). Сравнив рис. 1 и рис. 3

Рис. 3. Упорядочение точек прямой $PR_{\diamond}(1)$ в квадратный массив таким образом, что любые две точки в каждой строке и в каждом столбце являются удаленными.

и отождествив очевидным образом наблюдаемые квадрата Мермина–Переса с точками прямой $PR_{\diamond}(1)$, мы немедленно приходим к выводу, что понятие *взаимного коммутирования* переводится на язык геометрии над кольцами как понятие *взаимной удаленности* и что “особый характер” третьего столбца наблюдаемых имеет свой геометрический аналог в упомянутых выше свойствах, отличающих координаты соответствующих точек. Стоит еще упомянуть, что наблюдаемые третьей строки также приобретают в нашей картине характерный признак, ввиду того что они соответствуют точкам, представляющим не что иное, как вложение в прямую $PR_{\diamond}(1)$ обычной проективной прямой над полем $GF(2)$ ($PG(1, 2)$).

4. ПЕНТАГРАММА МЕРМИНА И ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ НАД КОЛЬЦОМ $GF(2)[x]/\langle x^3 - x \rangle$

Структура пентаграммы Мермина является более запутанной и сложной, чем структура квадрата, и ее отличительные черты, очевидно, должны быть перенесены на порождающие ее геометрии над кольцами. Соответствующая геометрия над кольцом теперь – геометрия проективной прямой $PR_{\diamond}(1)$, определенной над конечным фактор-кольцом $R_{\diamond} \equiv GF(2)[x]/\langle x^3 - x \rangle$ [1]. На самом деле здесь имеются две различные конфигурации из 10 точек, которые, как кажется, одинаково хорошо подходят для наших целей. Первая конфигурация содержит точку $(1, 0)$ (или, эквивалентно, точку $(0, 1)$) и девять точек ее окрестности ([1], формула (12)), упорядоченные так, как показано на рис. 4. Другая конфигурация состоит из трех различных точек (суб)прямой над $GF(2)$, а именно $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$, трех отвечающих им “точек Джекобсона”, соответственно $(1, x^2 + x)$, $(x^2 + x, 1)$ и $(1, x^2 + x + 1)$, и четырех точек, обе координаты которых являются делителями нуля, упорядочение которых показано на рис. 5.

В первом случае даже беглый взгляд на рис. 4 обнаруживает отличительное свойство горизонтальной стороны: координатными элементами всех четырех точек этой

Рис. 4. Образующее пентаграмму подмножество из десяти точек прямой $PR_{\diamond}(1)$, которое состоит из точки $(1, 0)$ и ее окрестности. Самая верхняя точка пентаграммы является “точкой Джекобсона” окрестности.

Рис. 5. Подмножество из десяти точек прямой $PR_{\diamond}(1)$, составленное из трех точек прямой $PG(1, 2)$, трех отвечающих им “точек Джекобсона” и четырех точек, обе координаты которых являются делителями нуля.

стороны являются исключительно делители нуля. Во втором случае отличительное свойство горизонтальной стороны не столь легко различимо, и, чтобы заметить его, мы должны задействовать отношения близости и удаленности [1] между соответствующими точками. Мы обнаруживаем, в частности, что четверки точек на каждой из оставшихся сторон обладают тем свойством, что одна из них удалена от каждой из оставшихся трех; для сторон, выходящих из верхней точки в направлениях вниз направо и вниз налево, такой точкой является точка $(1, 1)$, а для сторон, выходящих из самой правой и самой левой точек в направлениях соответственно вниз налево и вниз направо, роль такой точки играет точка $(1, x^2 + x + 1)$; для горизонтальной стороны, однако, такой точки не существует.

Можно ли каким бы то ни было образом провести различие между двумя конфигурациями? Положительный ответ может быть получен при рассмотрении индуцированного из кольца гомоморфизма прямой $PR_{\diamond}(1)$ в прямую $P\tilde{R}_{\diamond}(1)$ (см. (18) в работе [1]). Под действием этого гомоморфизма четыре точки горизонтальной стороны первой конфигурации (рис. 4) отображаются только в две различные точки (именно, в точки $(x, x + 1)$ и $(x + 1, x)$), в то время как для второй конфигурации (рис. 5) мы имеем четыре различные точки (две точки, указанные выше, и точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$). Поэтому “порожденный окрестностью” аналог пентаграммы Мермина представляется более привлекательным, так как его горизонтальная сторона гомоморфна (части) третьего (выделенного) столбца геометрического аналога “магического” квадрата Мермина–Переса (рис. 3), и в целом он “конденсируется” в окрестность точки $(1, 0)$, включая саму точку.

5. ДЕЛИТЕЛИ НУЛЯ И КВАНТОВОЕ ЗАЦЕПЛЕНИЕ

Для того чтобы полностью оценить значение наших аналогов “магических” конфигураций Мермина в геометриях над кольцами, покажем, что такие конфигурации не могут быть воспроизведены при помощи классических проективных прямых, т.е. проективных прямых над полями. Исследуем лишь случай квадрата, метод может быть легко распространен на случай пентаграммы.

С этой целью заметим, что на рис. 3 встречаются только четыре различных знака: 0 , 1 , x и $x + 1$; они, разумеется, суть элементы кольца $\tilde{R}_{\diamond}$ ([1], формула (6)). Если рассмотреть проективную прямую над полем с таким же количеством элементов, $GF(4) \cong GF(2)[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$ [11], то, повторяя рассуждения раздела 4 работы [1], находим, что такая прямая состоит только из пяти точек, а именно $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, x)$, $(1, x + 1)$ и $(0, 1)$, поскольку элементы (знаки) x и $x + 1$ представляют теперь обратимые элементы¹⁾. Для того чтобы получить требуемое количество точек, мы должны взять прямую, определенную над полем $GF(8) \cong GF(2)[x]/\langle x^3 + x + 1 \rangle$; однако заплатить за это придется введением в нашу схему дополнительных, избыточных знаков (включающих вторые степени x).

¹⁾Напомним (см., например, [11]), что поле не содержит делителей нуля за исключением тривиального (самого нуля).

Эта иллюстрация делает явным то, что демонстрируют, кажется, все предшествующие рассмотрения: именно благодаря наличию делителей нуля в нашем подходе мы в состоянии пролить некоторый свет на квантовую зацепленность, воплощенную в двух конфигурациях Мермина. Это утверждение может быть существенно усилено следующими наблюдениями. Мы можем по-другому объяснить “магический” квадрат Мермина–Переса (рис. 1), если заметим, что операторы каждой из трех его строк имеют общий (взаимно несмещенный) ортогональный базис *незацепленных* собственных состояний и то же справедливо для первых двух столбцов; в противоположность этому операторы третьего столбца имеют общие *максимально зацепленные* состояния. На рис. 3 мы видим, что именно в третьем столбце геометрического аналога “магического” квадрата наличие делителей нуля наиболее выражено. То же касается и пентаграммы Мермина (рис. 2), для которой операторы на горизонтальной стороне имеют общие *максимально зацепленные* состояния, и ее “порожденного окрестностью” аналога (рис. 4) с преобладанием делителей нуля вдоль горизонтальной стороны.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы провели замечательную, хотя на данном этапе до некоторой степени зыбкую, аналогию между структурой двух “магических” операторнозначных конфигураций, использованных Мерминым [2] для доказательства теоремы БКШ в размерностях 4 и 8, и множествами точек, которые представлены проективной прямой, определенной над кольцом $GF(2) \otimes GF(2)$, и субконфигурациями проективной прямой, определенной над кольцом $GF(2)[x]/\langle x^3 - x \rangle$. Краеугольным камнем алгебраическо-геометрической концепции, лежащим в основе такого соответствия, являются делители нуля и тесно связанные с ними отношения близости и удаленности [1], которые могут также привести к более глубокому пониманию квантового зацепления. Чтобы проверить это предположение, необходимо изучить более общие классы проективных прямых над кольцами, в частности те прямые, которые определены над кольцом $GF(q) \otimes \cdots \otimes GF(q)$ и/или кольцом $GF(q)[x]/\langle x^s - x \rangle$ при $q > 2$ и $s > 3$, и увидеть, действительно ли их свойства применимы для доказательства теоремы БКШ в гильбертовых пространствах более высокой размерности.

В заключение подчеркнем, что наши простые геометрии над кольцами могут оказаться совершенно правильной отправной точкой для более систематического геометрически ориентированного моделирования зацепленных квантовых состояний/систем. В этом смысле оказывается, что полученные в настоящей работе результаты, дополненные результатами, относящимися к другим конечным геометриям над кольцами (именно, к геометрии Хайлмслева), играют важную роль в исследовании свойств взаимно несмещенных базисов [12], [13] и оказывают немалую поддержку взгляду на квантовую механику как на “мир групп отношений” – точке

зрения, недавно предложенной и пропагандируемой Стакки с сотрудниками [14], которая является новой парадигмой, покоящейся исключительно на нединамическом, геометрическом объяснении квантовых явлений.

Благодарности. Настоящая работа поддержана Science and Technology Assistance Agency (Республика Словакия), контракт № APVT-51-012704, VEGA (Республика Словакия), грант № 2/6070/26, и ЕСО-NET (Франция), грант № 12651NJ “Теометрии над конечными кольцами и свойства взаимно несмещенных базисов”.

Список литературы

- [1] М. Санига, М. Плана, *ТМФ*, **151**:1 (2007), 44–53; [quant-ph/0603051](#).
- [2] N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.*, **65** (1993), 803–815.
- [3] N. D. Mermin, *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990), 3373–3376.
- [4] P. K. Aravind, *Found. Phys. Lett.*, **13** (2000), 499–519.
- [5] A. Peres, *J. Phys. A*, **24** (1991), 175–178.
- [6] J. Zimba, R. Penrose, *Stud. Hist. Philos. Sci.*, **24** (1993), 697–720.
- [7] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.*, **47** (1935), 777–780.
- [8] J. S. Bell, *Rev. Mod. Phys.*, **38** (1966), 447–452.
- [9] S. Kochen, E. P. Specker, *J. Math. Mech.*, **17** (1967), 59–88.
- [10] P. K. Aravind, *Amer. J. Phys.*, **72** (2004), 1303–1307.
- [11] J. W. P. Hirschfeld, *Projective Geometries over Finite Fields*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1998.
- [12] M. Saniga, M. Planat, *J. Phys. A*, **39** (2006), 435–440; [math-ph/0506057](#).
- [13] M. Saniga, M. Planat, *Int. J. Mod. Phys. B*, **20** (2006), 1885–1892.
- [14] W. M. Stuckey, M. Silberstein, M. Cifone, “Deflating quantum mysteries via the relational blockworld”, *Phys. Essays*, 2007 (to appear); [quant-ph/0503065](#).

Поступила в редакцию 21.07.2006