Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, Интегрируемые модели динамики продольно-поперечных акустических импульсов в парамагнитном кристалле, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 2, 228–247

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6042>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:51:39

© 2007 г.

С. В. Сазонов*, Н. В. Устинов†

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ В ПАРАМАГНИТНОМ КРИСТАЛЛЕ

Изучено взаимодействие продольно-поперечных акустических импульсов с системой парамагнитных примесей с эффективным спином $S = 1$, находящейся в статически деформированном кристалле. Показано, что динамика импульса, распространяющегося под произвольным углом к направлению статической деформации, и эффективных спинов подчиняется модифицированным редуцированным уравнениям Максвелла–Блоха и, если спектр акустического импульса перекрывает квантовые переходы между спиновыми подуровнями, модифицированному уравнению синус-Гордон. Эти уравнения обобщают модели, хорошо известные в теории метода обратной задачи рассеяния и в теории самоиндуцированной прозрачности, и также принадлежат к классу интегрируемых. Анализ солитонных решений показал, что взаимодействие импульсов со средой обнаруживает в данных моделях качественно новые особенности по сравнению со случаями сугубо поперечных или продольных акустических полей.

Ключевые слова: солитон, нелинейные интегрируемые уравнения, самоиндуцированная прозрачность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с 60-х годов прошлого столетия развитие нелинейной оптики в значительной степени стимулирует изучение вопросов интегрируемости уравнений математической физики. Открытие в 1967 г. явления самоиндуцированной прозрачности (СИП) [1] повлекло за собой бурные исследования математической структуры нелинейных уравнений, описывающих этот процесс [2], [3]. Связь уравнений СИП в случае бесконечно узкой спектральной линии и точного резонанса с уравнением синус-Гордон (СГ) сыграла в этих исследованиях существенную роль [2]. Схема Захарова–Шабата в методе обратной задачи рассеяния (МОЗР) [4], [5] была

*Российский научный центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия.
E-mail: barab@newmail.ru

†Томский государственный университет, Томск, Россия. E-mail: n_ustinov@mail.ru

впервые применена к нелинейному уравнению Шредингера [6], которое описывает распространение оптических импульсов в изотропных нерезонансных средах [7]. Альтернативный подход к изучению СИП, не использующий приближение медленно меняющихся огибающих, а основанный на приближении однонаправленного распространения (ОР) [8], породил редуцированную систему Максвелла–Блоха (РМБ) [9], также интегрируемую с помощью МОЗР.

Следует отметить, что нелинейные оптические явления находили через некоторое время свои аналоги в физической акустике. Так, вскоре после обнаружения оптической СИП был теоретически [10], [11] и экспериментально [10], [12] исследован ее акустический аналог в низкотемпературных кристаллах. В качестве резонансных объектов среды рассматривались парамагнитные примеси с эффективными спинами $S = 1/2$ [11] и $S = 1$ [10], [12], а зеемановское вырождение спиновых подуровней снималось приложением к кристаллу магнитного поля. При этом явление акустической СИП описывалось акустическими уравнениями СИП [10], а в случае точного резонанса – уравнением СГ [11].

Одним из основных направлений развития нелинейной оптики и физической акустики является генерация все более коротких импульсов. Сегодня уже можно говорить о фемтосекундной оптике и пикосекундной акустике как о сформировавшихся областях физической науки [13]. Важно, что столь короткие импульсы вмещают в себя всего несколько (вплоть до одного) периодов колебаний, а примененный к ним термин “предельно короткие импульсы” (ПКИ) можно считать устоявшимся. Описание распространения ПКИ в нелинейных средах потребовало отказа от приближения медленно меняющихся огибающих и использования вместо него приближений ОР, волновой прозачности и спектрального перекрытия (СП) как в оптических [14]–[16], так и в акустических задачах [17].

Акустические импульсы в твердых телах состоят из продольной и поперечной компонент. В парамагнитном кристалле они не только вызывают квантовые переходы между спиновыми подуровнями, но и сдвигают динамическим образом их частоту [18], [19]. Аналогичный эффект имеет место и для оптических импульсов, распространяющихся в среде полярных молекул, которые в стационарных состояниях обладают постоянными дипольными моментами (ПДМ). В простейших случаях динамика ПКИ в такой среде описывается скалярной моделью РМБ с ПДМ, обобщающей уравнения РМБ и также интегрируемой в рамках МОЗР [20]. Более общие векторные оптические и акустические модели были рассмотрены в работах [21]–[24]. В этих условиях описание нелинейной динамики поля и среды тоже проводится с помощью систем уравнений, обладающих свойством интегрируемости.

Как правило, взаимодействие продольно-поперечных акустических импульсов с парамагнитными центрами исследовалось в случае эффективного спина $S = 1/2$ вследствие относительной простоты модели. В то же время известно, что наиболее сильное взаимодействие с колебаниями кристаллической решетки испытывают парамагнитные ионы с эффективным спином $S = 1$ [19], поэтому использование последних наиболее предпочтительно с точки зрения возможных экспериментов.

В настоящей работе будут выведены и изучены системы уравнений, описывающие нелинейное распространение продольно-поперечных акустических ПКИ в системе эффективных спинов $S = 1$. Как и их различные частные случаи, уже изучавшиеся в ряде оптических и акустических задач, они также принадлежат к классу уравнений, интегрируемых с помощью МОЗР.

2. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим кубический кристалл, содержащий парамагнитные примеси с эффективным спином $S = 1$ и помещенный в поле однородной статической деформации $\mathcal{E}^{(0)}$. Пусть направление деформации кристалла параллельно оси z' , совпадающей с одной из его осей симметрии четвертого порядка. Оси x' и y' направим вдоль двух других осей симметрии кристалла и введем еще одну декартову систему координат, оси x и z которой повернуты относительно x' и z' на угол α , а ось y совпадает с y' . Будем считать, что акустический импульс распространяется в направлении оси z .

Взаимодействие спинов с полями упругой деформации (спин-фононное взаимодействие) осуществляется при $S \geq 1$ за счет механизма Ван-Флека [18]: поле деформации создает градиенты внутрикристаллического электрического поля, что, в свою очередь, воздействует на спиновые квантовые подуровни. При этом статическая деформация вызывает вследствие квадрупольного штарк-эффекта расщепление подуровней, снимая вырождение по модулю проекции $S_{z'}$ эффективного спина на ось z' , в результате чего образуются квантовые переходы. Поле деформации акустического импульса способно в данных условиях как индуцировать квадрупольные переходы между спиновыми подуровнями, так и вызывать динамический сдвиг частоты этих переходов.

Для определенности мы выберем статическую деформацию кристалла (сжатие или растяжение) так, что энергия состояния с $S_{z'} = 0$ меньше энергий состояний с $S_{z'} = \pm 1$. Основное состояние парамагнитного иона будем характеризовать порядковым номером 2, а уровни вырожденного возбужденного состояния – номерами 1 и 3. Тогда в представлении собственных функций оператора $\hat{S}_{z'}$ базисные спиновые матрицы будут определены следующим образом [19]:

$$\hat{S}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{z'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Пусть импульсы являются пространственно одномерными, т.е. все динамические переменные зависят только от координаты z и времени t . В этих условиях гамильтониан спина, находящегося в полях статической и динамической деформаций, имеет вид [18], [19]

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{S}_{z'}^2 + G_{\parallel} \mathcal{E}_{zz} \hat{S}_{z'}^2 + \frac{G_{\perp} [\mathcal{E}_{xz} (\hat{S}_x \hat{S}_z + \hat{S}_z \hat{S}_x) + \mathcal{E}_{yz} (\hat{S}_y \hat{S}_z + \hat{S}_z \hat{S}_y)]}{4}, \quad (2)$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, $\omega_0 = G_{\parallel} \mathcal{E}^{(0)} / \hbar$ – частота квантового перехода, $G_{\parallel} = G_{z'z'z'z'} = G_{x'x'x'x'} = G_{yyyy}$ и $G_{\perp} = G_{x'x'z'z'} = G_{x'x'yy} = G_{yyz'z'}$ – компоненты тензора взаимодействия спина с продольной (объемной) $\mathcal{E}_{zz} = \partial u_z / \partial z$ и поперечными (сдвиговыми) $\mathcal{E}_{xz} = \partial u_x / \partial z$ и $\mathcal{E}_{yz} = \partial u_y / \partial z$ составляющими поля деформации акустического импульса, u_x , u_y и u_z – соответствующие компоненты вектора локальных смещений $\mathbf{u}$. Матрицы $\hat{S}_x$ и $\hat{S}_z$ связаны с базисными спиновыми матрицами преобразованием поворота [10], [25]:

$$\hat{S}_x = \hat{S}_{x'} \cos \alpha - \hat{S}_{z'} \sin \alpha, \quad \hat{S}_z = \hat{S}_{z'} \cos \alpha + \hat{S}_{x'} \sin \alpha. \quad (3)$$

Для гамильтониана H_a свободного акустического поля имеем выражение

$$H_a = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\mathbf{p}^2}{\rho} + \rho a_{\parallel}^2 \mathcal{E}_{zz}^2 + \rho a_{\perp}^2 (\mathcal{E}_{xz}^2 + \mathcal{E}_{yz}^2) \right) d\mathbf{r}, \quad (4)$$

где $\mathbf{p}$ – вектор плотности импульса, соответствующий динамическим смещениям кристалла, ρ – его равновесная плотность, $a_{\parallel}$ и $a_{\perp}$ – линейные скорости продольного и поперечного звуков. Интегрирование проводится по всему объему кристалла.

Самосогласованную динамику упругого поля и эффективных спинов будем рассматривать, следуя стандартному полуклассическому подходу. В соответствии с ним поведение спинов описывается квантово-механическим уравнением для матрицы плотности $\hat{\rho}$:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (5)$$

а динамика поля деформации акустического импульса – уравнениями Гамильтона для сплошной среды:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}} (H_a + \langle \hat{H} \rangle), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta \mathbf{p}} (H_a + \langle \hat{H} \rangle), \quad (6)$$

где $\langle \hat{H} \rangle = \int n \langle \hat{H} \rangle d\mathbf{r}$, n – концентрация парамагнитных ионов, $\langle \hat{H} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{H})$ – квантовое среднее $\hat{H}$.

В уравнении (5) мы пренебрегли необратимой релаксацией, считая, что длительность акустического импульса меньше всех релаксационных времен. Также будем далее предполагать, что матрица плотности имела до прохождения импульса следующий вид:

$$\hat{\rho}|_{t \rightarrow -\infty} = \text{diag}(W_1, W_2, W_3),$$

где W_1 , W_2 и W_3 – начальные населенности спиновых подуровней.

Если начальные населенности уровней подчиняются распределению Больцмана (т.е. $W_3 = W_1$) и компонента деформации $\mathcal{E}_{yz}$ отсутствует на входе, то, как было показано в работе [24], она не генерируется внутри кристалла. Поэтому везде ниже мы рассматриваем только одну составляющую сдвиговой деформации $\mathcal{E}_{xz}$. Нетрудно показать, что в этих условиях коэффициенты матрицы плотности будут связаны соотношениями

$$\rho_{33} = \rho_{11}, \quad \rho_{31} = \rho_{13}, \quad \rho_{32} = -\rho_{12}, \quad \rho_{13} = W_1 - \rho_{11}.$$

С учетом данных соотношений уравнение (5) для спиновой динамики можно записать через блоховские переменные

$$U = -\frac{\rho_{12} + \rho_{21}}{\sqrt{2}}, \quad V = \frac{i(\rho_{12} - \rho_{21})}{\sqrt{2}}, \quad W = \frac{1 + W_2}{4} - \rho_{22}$$

следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = (\omega_0 + \Omega_2)V, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -(\omega_0 + \Omega_2)U + \Omega_1 W, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -\Omega_1 V, \quad (7)$$

где мы ввели обозначения

$$\Omega_1 = \frac{G_{\perp} \cos(2\alpha) \mathcal{E}_{xz} + G_{\parallel} \sin(2\alpha) \mathcal{E}_{zz}}{\hbar}, \quad \Omega_2 = \frac{G_{\parallel} \cos(2\alpha) \mathcal{E}_{zz} - G_{\perp} \sin(2\alpha) \mathcal{E}_{xz}}{\hbar}. \quad (8)$$

Из системы (7) видно, что динамические переменные Ω_1 и Ω_2 , составленные из суперпозиций продольной и поперечной компонент деформации акустического импульса, выполняют при взаимодействии с эффективными спинами строго различные функции. Первая переменная возбуждает квантовые переходы между спиновыми подуровнями, изменяя их населенности, вторая же вызывает динамический сдвиг частоты данных переходов. При $\alpha = 0$ и $\alpha = \pm 90^\circ$ имеем соответственно $\Omega_1 = \pm G_{\perp} \mathcal{E}_{xz}/\hbar$, $\Omega_2 = \pm G_{\parallel} \mathcal{E}_{zz}/\hbar$, т.е. при распространении в данных направлениях поперечная компонента импульса вызывает квантовые переходы, а продольная составляющая динамически сдвигает частоту переходов. Если же $\alpha = \pm 45^\circ$, то ситуация прямо противоположна. При этом $\Omega_1 = \pm G_{\parallel} \mathcal{E}_{zz}/\hbar$, $\Omega_2 = \mp G_{\perp} \mathcal{E}_{xz}/\hbar$. В случае же других значений угла α у компонент импульса нет строгого разделения функций. Упомянем в этой связи, что только при углах $\alpha = 0, \pm 45^\circ, \pm 90^\circ$ импульсные составляющие в кубическом кристалле являются строго поперечными или строго продольными; при других углах принято говорить о квазипродольной и квазипоперечных компонентах [26], что обусловлено свойствами симметрии кристалла.

Предположим, что линейные скорости продольной и поперечной акустических волн равны $a_{\parallel} = a_{\perp} = a$. Тогда из уравнений (6) получим

$$\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial z^2} = \frac{2nG^2}{\hbar\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U - qW), \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial z^2} = -\frac{nG^2}{\hbar\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (qU - 2(q^2 + d^2)W), \quad (10)$$

где

$$G^2 = G_{\perp}^2 \cos^2(2\alpha) + \frac{G_{\parallel}^2}{2} \sin^2(2\alpha), \quad q = \frac{2G_{\perp}^2 - G_{\parallel}^2}{4G^2} \sin(4\alpha), \quad d = \frac{G_{\perp} G_{\parallel}}{\sqrt{2} G^2}.$$

Отметим, что линейные скорости акустических волн равны, если компоненты тензора упругих постоянных в упруго-изотропном кристалле удовлетворяют соотношениям Коши [27].

При выполнении неравенства

$$\eta = \frac{n(G_{\perp}^2 + G_{\parallel}^2)}{\hbar\omega_0\rho a^2} \ll 1, \quad (11)$$

что обычно имеет место в парамагнитных кристаллах [26], правые части уравнений (9), (10) много меньше каждого из слагаемых в левых частях этих же уравнений. В этом случае можно пренебречь волной, отраженной от парамагнитных примесей, и применить к рассматриваемым уравнениям приближение ОР [8]. Введем для этого “локальное” время $\tau = t - z/a$ и “медленную” координату $\zeta = \eta z$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Отбрасывая слагаемые, пропорциональные η^2 , в левых частях уравнений (9), (10) будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2\frac{\eta}{a} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta},$$

а в правых –

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}.$$

Учитывая также уравнения (7) и нулевые значения поля импульса и его производных на бесконечности, получим после интегрирования по τ и возвращения к исходным переменным z и t

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} = \beta(\omega_0 + \Omega_2 + q\Omega_1)V, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} = -\beta[q(\omega_0 + \Omega_2 + q\Omega_1) + d^2\Omega_1]V, \quad (13)$$

где $\beta = nG^2/(\hbar\rho a^3)$.

Отметим, что из формул (12), (13) следует интеграл движения

$$(\omega_0 + \Omega_2 + q\Omega_1)^2 + d^2\Omega_1^2 = \omega_0^2(1 + f(\tau))^2, \quad (14)$$

где функция $f(\tau)$ определяется условиями на входе импульса в среду. Важным следствием существования данного интеграла являются ограничения на области значений переменных Ω_1 и Ω_2 . Так, если $f(\tau) = 0$, то получаем

$$|\Omega_1| \leq \frac{1}{|d|}, \quad -\omega_0 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{q^2}{d^2}}\right) \leq \Omega_2 \leq \omega_0 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{q^2}{d^2}}\right). \quad (15)$$

С помощью замены переменных $\{z, t, \Omega_1, \Omega_2\} \rightarrow \{z', t', \Omega'_1, \Omega'_2\}$, где

$$z' = z, \quad t' = \int_0^\tau |1 + f(\tau')| d\tau' + \frac{z}{a}, \quad \Omega'_1 = \frac{\Omega_1}{|1 + f(\tau)|}, \quad \Omega'_2 = \frac{\omega_0 + \Omega_2}{|1 + f(\tau)|} - \omega_0,$$

рассмотрение можно свести без потери общности к случаю $f(\tau) = 0$.

Уравнения (7), (12), (13) описывают динамику продольно-поперечных акустических импульсов в деформированном кристалле, содержащем парамагнитные примеси с эффективным спином $S = 1$. Ниже данную систему будем называть модифицированными уравнениями РМБ (МРМБ). Смысл этого названия станет ясен в разделе 4.

Уравнения МРМБ представляют интерес как с точки зрения их физических приложений, так и благодаря математическим свойствам. В случае $d = q = 0$ и $\Omega_2 = 0$ они, очевидно, совпадают с уравнениями РМБ для изотропной двухуровневой среды [9]. Если $d = 0$, $q \neq 0$, то можно положить $\Omega_2 = -q\Omega_1$. Возникающая при этом система сводится к уравнениям РМБ с ПДМ, интегрируемость которых с помощью МОЗР была установлена в работе [20]. Эти уравнения исследовались численно и аналитически в работах [28] и [29], соответственно, где было показано, что характер взаимодействия импульса со средой существенным образом зависит от знака его полярности. Также данные уравнения в этом случае определяют динамику квазипродольного звука в деформированном парамагнитном кристалле с эффективным спином $S = 1$ [30]. Кроме того, при $q = 0$, $d \neq 0$ уравнения МРМБ переходят в двухкомпонентные уравнения РМБ, которые описывают распространение векторных электромагнитных импульсов в оптически одноосной среде. Солитонные решения этих уравнений также обнаружили асимметрию по полярности одной из компонент сигнала [31]. Наконец, уравнения (7), (12) и (13) эквивалентны системе волновых и материальных уравнений, которая была выведена в работе [22] при рассмотрении динамики продольно-поперечных акустических импульсов в парамагнитном кристалле с эффективным спином $S = 1/2$ в присутствии внешнего магнитного поля. Также в этой работе было установлено, что данная система принадлежит к классу интегрируемых и имеет пару Лакса, коэффициенты которой являются многозначными функциями спектрального параметра. Ниже мы покажем, что у уравнений МРМБ есть пара Лакса с однозначной зависимостью коэффициентов от спектрального параметра, и построим для нее солитонные решения.

Заметим, что использование приближения медленно меняющихся огибающих в данной физической задаче тоже приводит к интегрируемой системе уравнений [24], которая была подробно изучена в связи с ее приложениями в когерентной оптике в работе [23].

3. МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ СТ

В этом разделе мы получим еще одно интегрируемое с помощью МОЗР уравнение, применив приближение СП [14] к уравнениям МРМБ. Пусть длительность импульса τ_p и частота ω_0 квантового перехода таковы, что выполняется неравенство

$$(\omega_0 \tau_p)^2 \ll 1. \quad (16)$$

Физический смысл данного неравенства состоит в том, что спектральная ширина $\Delta\omega \sim 1/\tau_p$ акустического импульса превышает частоту квантового перехода между

спиновыми подуровнями. В работах [14], [16] приближение СП использовалось при рассмотрении подобных задач для нелинейной динамики оптических импульсов.

Считая, что величины ω_0 и Ω_2 одного порядка, и учитывая неравенство (16), пренебрежем в уравнениях (7) слагаемыми, содержащими множитель $\omega_0 + \Omega_2$. Тогда, приняв во внимание начальное условие для $\hat{\rho}$, получим из уравнений (7)

$$V = W_0 \sin \theta, \quad W = W_0 \cos \theta, \quad (17)$$

где $\theta = \int_{-\infty}^t \Omega_1 dt'$, $W_0 = (1 - 3W_2)/4$ (при термодинамическом равновесии $W_0 < 0$).

Подставив первое из соотношений (17) в правую часть уравнения (12), придем после использования выражения (14) к модифицированному уравнению СГ (МСГ)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial T} = -b \sqrt{1 - \tau_c^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial T} \right)^2} \sin \theta, \quad (18)$$

где $T = \int_0^\tau |1 + f(\tau')| d\tau'$, $b = -\beta \omega_0 W_0$, $\tau_c = |d|/\omega_0$.

Уравнение (18) принадлежит к классу интегрируемых с помощью МОЗР. Впервые оно появилось при изучении свойств преобразований Беклунда уравнения СГ в работах [32], и дальнейшие его исследования велись в этом же направлении [33]. Недавно было показано, что МСГ в приближении СП описывает динамику предельно короткого электромагнитного импульса в системе несимметричных квантовых объектов типа квантовых ям или нитей [34], [35]. Заметим, что в нашем случае для описания распространения акустического импульса с помощью МСГ он должен обладать продольно-поперечной структурой. Если хотя бы одна из компонент поля деформации не взаимодействует с парамагнитными примесями ($G_{\parallel} = 0$ или $G_{\perp} = 0$), то $\tau_c = 0$, и уравнение (18) переходит в уравнение СГ.

В разделе 5 мы будем исследовать особенности динамики полей деформации и спинов, основываясь на солитонных решениях уравнений МРМБ и МСГ, а в заключение данного раздела сделаем замечание, касающееся области применимости уравнения МСГ. Используемое в разделе 2 приближение ОР предполагает малость правых частей уравнений (9) и (10) по сравнению с каждым из слагаемых в их левых частях. Тогда из уравнения (9) имеем

$$|\Omega_1| \gg \frac{nG^2}{\hbar \rho a^2} |U|.$$

Из уравнений (7) и (17) следует, что $U \sim \omega_0 \tau_p V \sim \omega_0 \tau_p W_0$. Полагая $W_0 \sim 1$, $|\Omega_1| \sim |\theta|/\tau_p \sim 1/\tau_p$ и принимая во внимание выражение для η из неравенства (11), перепишем последнее неравенство в виде

$$\eta(\omega_0 \tau_p)^2 \ll 1.$$

Это условие тоже позволяет применить приближение ОР к уравнениям (9) и (10) и, как видно из неравенства (16), является значительно менее жестким, нежели (11). Таким образом, описание динамики акустических импульсов с помощью уравнения (18) в данной задаче не предполагает, в отличие от системы МРМБ, обязательного выполнения неравенства (11).

4. ПАРЫ ЛАКСА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ

Система МРМБ (7), (12), (13) допускает представление в виде условия нулевой кривизны

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + [\hat{L}, \hat{A}] = 0, \quad (19)$$

в котором матрицы $\hat{L}$ и $\hat{A}$ имеют вид

$$\hat{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} L_{11} & i\lambda L_{12} \\ i\lambda L_{12}^* & -L_{11} \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \frac{\beta\tau_r}{2(1 + \tau_r^{-2} - \lambda^2)} \begin{pmatrix} A_{11} & i\lambda A_{12} \\ i\lambda A_{12}^* & -A_{11} \end{pmatrix} - \frac{\hat{L}}{a}.$$

Здесь λ – спектральный параметр,

$$L_{11} = \frac{\omega_0 + \Omega_2 + q\Omega_1}{\tau_r} + q\tau_r\Omega_1, \quad L_{12} = \omega_0 + \Omega_2 + (q + id)\Omega_1, \\ A_{11} = \frac{W}{\tau_r^2} - id\tau_r\lambda^2V + q(1 + \tau_r^{-2})U, \quad A_{12} = \frac{W}{\tau_r} + \frac{(q + id)U}{\tau_r} + \left(q - \frac{id}{\tau_r^2}\right)V,$$

τ_r – корень уравнения

$$q^2\tau_r^4 + (1 + q^2 - d^2)\tau_r^2 - d^2 = 0. \quad (20)$$

Уравнение (19) является условием совместности переопределенной системы линейных уравнений (пары Лакса)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \hat{L}\psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \hat{A}\psi, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\psi = \psi(t, z, \lambda) = (\psi_1, \psi_2)^T$ – векторное решение пары Лакса. В отличие от пары Лакса, найденной в работе [22], коэффициенты системы (21) являются однозначными функциями спектрального параметра.

Уравнение МСГ (18) также можно записать в виде условия нулевой кривизны

$$\frac{\partial \hat{L}_M}{\partial z} - \frac{\partial \hat{A}_M}{\partial T} + [\hat{L}_M, \hat{A}_M] = 0, \quad (22)$$

где

$$\hat{L}_M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} iu & \varkappa Q^* \\ \varkappa Q & -iu \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_M = -\frac{b}{2\varkappa} \begin{pmatrix} -i\varkappa\tau_c \sin \theta & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & i\varkappa\tau_c \sin \theta \end{pmatrix}, \\ Q = \sqrt{1 - \tau_c^2 u^2} + i\tau_c u, \quad u = \frac{\partial \theta}{\partial T},$$

$\varkappa$ – спектральный параметр. Соответствующая пара Лакса имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial T} &= \hat{L}_M \xi, \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} &= \hat{A}_M \xi, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\xi = \xi(T, z, \varkappa) = (\xi_1, \xi_2)^T$ – векторное решение.

Переопределенные системы (21) и (23) связаны с парами Лакса соответственно системы РМБ с ПДМ [20] и уравнения СГ калибровочными преобразованиями [5]. Таким образом, системы (7), (12), (13) с $d \neq 0$ и с $d = 0$ калибровочно-эквивалентны друг другу. То же самое справедливо и для уравнений МСГ и СГ. По аналогии мы тоже называем уравнения (7), (12), (13) модифицированными. Заметим в этой связи, что пары Лакса (21) системы МРМБ, которые соответствуют различным корням уравнения (20), связаны, очевидно, калибровочными преобразованиями.

Отмеченная выше калибровочная эквивалентность дает возможность модифицировать МОЗР, развитый для уравнений РМБ и СГ, для рассматриваемых здесь случаев. Так, аппарат МОЗР был применен к системе МРМБ при $q = 0$ в работе [22]. Однако известно, что солитонные решения интегрируемых уравнений можно найти не только с помощью МОЗР, но и используя более простые алгебраические методы. В настоящей работе к построению решений будет привлечена техника преобразования Дарбу (ПД) [36].

Пусть $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ – векторное решение переопределенной системы (21) при $\lambda = \mu$. Пара Лакса (21) ковариантна относительно ПД $\{\psi_1, \psi_2, \Omega_1, \Omega_2, U, V, W\} \rightarrow \{\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}\}$, где преобразованные величины определены следующим образом:

$$\tilde{\psi}_1 = \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}} \left(\mu \psi_1 - \frac{\lambda \varphi_1 \psi_2}{\varphi_2} \right), \quad \tilde{\psi}_2 = \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} \left(\mu \psi_2 - \frac{\lambda \varphi_2 \psi_1}{\varphi_1} \right), \quad (24)$$

$$\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1 - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\ln \delta_1}{s_+} - \frac{\ln \delta_2}{s_-} \right], \quad \tilde{\Omega}_2 = \Omega_2 + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{q - id}{s_+} \ln \delta_1 - \frac{q + id}{s_-} \ln \delta_2 \right], \quad (25)$$

$$\tilde{U} = U - \frac{i}{8d} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{q - id}{s_+} \ln \delta_1 + \frac{q + id}{s_-} \ln \delta_2 \right], \quad (26)$$

$$\tilde{V} = -V + \frac{i}{8d} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \ln \frac{\delta_1 \varphi_2^2}{\delta_2 \varphi_1^2}, \quad \tilde{W} = W - \frac{i}{8d} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{\ln \delta_1}{s_+} + \frac{\ln \delta_2}{s_-} \right]. \quad (27)$$

Здесь мы использовали обозначения

$$\delta_1 = \frac{s_+}{d} \frac{\varphi_1}{\varphi_2} - \mu, \quad \delta_2 = \frac{s_-}{d} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} - \mu, \quad s_{\pm} = \frac{q\tau_r^2 \pm id}{\tau_r}.$$

Равенства (25)–(27) определяют новое (“одетое”) решение уравнений (7), (12), (13). В пределе $q \rightarrow 0$, $d \rightarrow 0$ и, следовательно, $\tau_r \rightarrow 0$ формулы (24)–(27) переходят в ПД для системы РМБ [36]. Вследствие указанной в этом разделе калибровочной эквивалентности преобразование (24)–(27) в случае $d \neq 0$ есть результат последовательного проведения ПД при $d = 0$ и калибровочного преобразования.

Пара Лакса (23) ковариантна относительно ПД $\{\xi_1, \xi_2, \theta\} \rightarrow \{\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\theta}\}$ вида [35]

$$\tilde{\xi}_1 = e^{i(\tilde{\theta} - \theta)/2} \left(\nu \xi_1 - \frac{\varkappa \chi_1 \xi_2}{\chi_2} \right), \quad \tilde{\xi}_2 = e^{i(\theta - \tilde{\theta})/2} \left(\nu \xi_2 - \frac{\varkappa \chi_2 \xi_1}{\chi_1} \right), \quad (28)$$

$$\tilde{\theta} = \theta + i \ln \frac{\chi_1^2 - \nu \tau_c \chi_1 \chi_2}{\chi_2^2 - \nu \tau_c \chi_1 \chi_2}, \quad (29)$$

где χ_1 и χ_2 – компоненты решения χ системы (23) при $\varkappa = \nu$.

Соотношение (29) дает новое (“одетое”) решение уравнения (18). Формулы ПД для уравнения СГ [36] следуют из соотношений (28) и (29) при $\tau_c = 0$. Подобно предыдущему случаю, преобразование (28), (29) является результатом последовательного проведения ПД уравнения СГ и калибровочного преобразования.

Равенства (24) и (28) определяют компоненты векторных решений пар Лакса, которые соответствуют “одетым” решениям уравнений МРМБ и МСГ. Это обстоятельство позволяет выполнить итерации ПД и получить бесконечную иерархию решений данных уравнений. Так, N -кратное проведение преобразования (28), (29) дает следующее выражение для “одетого” решения уравнения МСГ:

$$\tilde{\theta} = \theta + i \ln \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta^{(2)}}, \quad (30)$$

где

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} \chi_1^{(1)} & \nu_1 \chi_2^{(1)} & \nu_1^2 \chi_1^{(1)} & \dots & \nu_1^{N-1} \chi_{K_+}^{(1)} \\ \chi_1^{(2)} & \nu_2 \chi_2^{(2)} & \nu_2^2 \chi_1^{(2)} & \dots & \nu_2^{N-1} \chi_{K_+}^{(2)} \\ \chi_1^{(3)} & \nu_3 \chi_2^{(3)} & \nu_3^2 \chi_1^{(3)} & \dots & \nu_3^{N-1} \chi_{K_+}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_1^{(N)} & \nu_N \chi_2^{(N)} & \nu_N^2 \chi_1^{(N)} & \dots & \nu_N^{N-1} \chi_{K_+}^{(N)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tau_c^N & \tau_c^{N-1} & \tau_c^{N-2} & \dots & 1 \\ \chi_1^{(1)} & \nu_1 \chi_2^{(1)} & \nu_1^2 \chi_1^{(1)} & \dots & \nu_1^N \chi_{K_-}^{(1)} \\ \chi_1^{(2)} & \nu_2 \chi_2^{(2)} & \nu_2^2 \chi_1^{(2)} & \dots & \nu_2^N \chi_{K_-}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_1^{(N)} & \nu_N \chi_2^{(N)} & \nu_N^2 \chi_1^{(N)} & \dots & \nu_N^N \chi_{K_-}^{(N)} \end{vmatrix},$$

$\chi_1^{(L)}$ и $\chi_2^{(L)}$ – компоненты векторного решения $\chi^{(L)}$ пары Лакса (23) при $\varkappa = \nu_L$, $L = 1, \dots, N$; $\Delta^{(1)}$ переходит в $\Delta^{(2)}$ при замене нижних индексов $1 \leftrightarrow 2$ у компонент векторных решений; $K_{\pm} = (3 \pm (-1)^N)/2$.

5. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Используем формулы ПД, представленные в предыдущем разделе, для нахождения солитонных решений рассматриваемых уравнений. Возьмем в качестве исходного решения уравнений МРМБ нулевой фон: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, $U = V = 0$, $W = W_0$. Выражения для компонент решения φ пары Лакса (21) с $\lambda = \mu$ имеют вид

$$\varphi_1 = c_1 e^{\gamma/2} + c_2 e^{-\gamma/2}, \quad \varphi_2 = i c_1 \frac{\tau_s - \tau_r}{\mu \tau_s \tau_r} e^{\gamma/2} + i c_2 \frac{\tau_s + \tau_r}{\mu \tau_s \tau_r} e^{-\gamma/2}, \quad (31)$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные,

$$\gamma = \frac{\omega_0(t - z/v)}{\tau_s}, \quad \tau_s^{-1} = \sqrt{\tau_r^{-2} - \mu^2}, \quad v = a \left(1 - \frac{a\beta}{1 + \tau_s^{-2}} \frac{W_0}{\omega_0} \right)^{-1}.$$

В дальнейшем мы будем полагать, используя сдвиги по независимым переменным, постоянные c_1 и c_2 равными заданным величинам, выбранным из соображений удобства и обеспечивающим вещественность и несингулярность солитонного решения, которое будет построено с помощью ПД. Также для определенности будем считать, что τ_r – положительный корень уравнения (20).

Подставив выражения (31) в соотношения (25)–(27), получим односолитонное решение уравнений МРМБ. Если свободный параметр τ_s ($\tau_s \in \mathbb{R}$) односолитонного решения удовлетворяет условию $\tau_s > \tau_r$ (т.е. $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| < 1/\tau_r$), его можно записать следующим образом:

$$\Omega_1 = -2\omega_0 \frac{r\sqrt{1 - \tau_r^2/\tau_s^2} \operatorname{ch} \gamma + q}{\tau_s^2 \Delta_1}, \quad \Omega_2 = 2\omega_0 \frac{rq\sqrt{1 - \tau_r^2/\tau_s^2} \operatorname{ch} \gamma + q^2 - d^2/\tau_s^2}{\tau_s^2 \Delta_1}, \quad (32)$$

$$U = -4W_0 \frac{r\sqrt{1 - \tau_r^2/\tau_s^2} \operatorname{ch} \gamma + q(1 + \tau_s^{-2})}{(1 + \tau_s^2)\Delta_1}, \quad V = 4W_0 \frac{r\sqrt{1 - \tau_r^2/\tau_s^2} \operatorname{sh} \gamma}{\tau_s(1 + \tau_s^2)\Delta_1}, \quad (33)$$

$$W = W_0 - \frac{2W_0}{\tau_s^2(1 + \tau_s^2)\Delta_1}, \quad (34)$$

где

$$\Delta_1 = \left[r \left(\operatorname{ch} \gamma - \frac{\tau_r}{\tau_s} \operatorname{sh} \gamma \right) + q \sqrt{1 - \frac{\tau_r^2}{\tau_s^2}} \right] \left[r \left(\operatorname{ch} \gamma + \frac{\tau_r}{\tau_s} \operatorname{sh} \gamma \right) + q \sqrt{1 - \frac{\tau_r^2}{\tau_s^2}} \right],$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{d^2}{\tau_r^2 \tau_s^2} + q^2}.$$

При $0 < \tau_s < \tau_r$ ($i\mu \in \mathbb{R}$) односолитонное решение имеет вид

$$\Omega_1 = 2\omega_0 \frac{r\sqrt{\tau_r^2/\tau_s^2 - 1} \operatorname{sh} \gamma - q}{\tau_s^2 \Delta_2}, \quad \Omega_2 = -2\omega_0 \frac{rq\sqrt{\tau_r^2/\tau_s^2 - 1} \operatorname{sh} \gamma - q^2 + d^2/\tau_s^2}{\tau_s^2 \Delta_2}, \quad (35)$$

$$U = 4W_0 \frac{r\sqrt{\tau_r^2/\tau_s^2 - 1} \operatorname{sh} \gamma - q(1 + \tau_s^{-2})}{(1 + \tau_s^2)\Delta_2}, \quad V = -4W_0 \frac{r\sqrt{\tau_r^2/\tau_s^2 - 1} \operatorname{ch} \gamma}{\tau_s(1 + \tau_s^2)\Delta_2}, \quad (36)$$

$$W = W_0 - \frac{2W_0}{\tau_s^2(1 + \tau_s^2)\Delta_2}, \quad (37)$$

где

$$\Delta_2 = \left[r \left(\frac{\tau_r}{\tau_s} \operatorname{ch} \gamma - \operatorname{sh} \gamma \right) - q \sqrt{\frac{\tau_r^2}{\tau_s^2} - 1} \right] \left[r \left(\frac{\tau_r}{\tau_s} \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma \right) + q \sqrt{\frac{\tau_r^2}{\tau_s^2} - 1} \right].$$

Данное решение описывает распространение продольно-поперечного акустического импульса. Поскольку его скорость v не зависит от корня τ_r уравнения (20), то формулы ПД (25)–(27) с решениями пар Лакса, соответствующими другим корням данного уравнения, не дадут новых односолитонных решений системы МРМБ. Отметим, что солитонное решение, найденное в работе [20], соответствует случаю $q = 0$.

При $\tau_s > \tau_r$ форма импульса существенно зависит от знаков r и q . Если знаки одинаковы, то компонента Ω_1 имеет один горб, знак которого такой же, как у q , а Ω_2 мало отличается от нуля (см. кривые, изображенные на рис. 1а, б сплошными линиями). Возбуждение среды в таких условиях мало (рис. 1в). С увеличением τ_s амплитуда поля деформации и степень возбуждения среды убывают. Характер зависимости скорости солитона, его амплитуды и поведения среды от длительности солитона при $\tau_c \gg \tau_r$ является таким же, как и в случае солитонов уравнения РМБ.

Рис. 1. Профили компонент поля деформации (а), (б) и инверсии населенности (в) в случае $\tau_s > \tau_r$ при $q = 0.5$, $d = 1.5$, $W_0 = -0.5$ для $rq > 0$, $\tau_s = 2.3677$ и $\tau_s = 10$ (сплошные линии 1 и 2, соответственно); для $rq < 0$, $\tau_s = 2.3677$ и $\tau_s = 10$ (штриховые линии 1 и 2, соответственно). Пунктирные прямые соответствуют значениям величин в центре импульса в пределе $\tau_s \rightarrow \tau_r \approx 2.3676$.

При разных знаках у r и q поле Ω_1 имеет четыре горба разной полярности (или три, если $\tau_s \gg \tau_r$), а Ω_2 состоит из двух горбов отрицательной полярности (штриховые линии на рис. 1а, б). Так как частота квантового перехода динамически понижается при прохождении импульса за счет компоненты Ω_2 (см. первое и второе из уравнений (7)), то среда возбуждается в этом случае гораздо сильнее.

В пределе $\tau_s \rightarrow \infty$ решение (32)–(34) рационально зависит от t и z . В частности, для переменных Ω_1 , Ω_2 и W получим следующие выражения:

$$\Omega_1 = 4\omega_0 q \frac{Q - d^2}{R_+ R_-}, \quad \Omega_2 = -4\omega_0 q^2 \frac{Q + d^2}{R_+ R_-}, \quad W = W_0 - \frac{8W_0}{R_+ R_-},$$

где

$$Q = q^2 \omega_0^2 \left(t - \frac{z}{v_r} \right)^2 + q^2 + 1, \quad R_{\pm} = q^2 \left(\omega_0 \left(t - \frac{z}{v_r} \right) \pm \tau_r \right)^2 + \frac{d^2}{\tau_r^2}, \quad v_r = \frac{a}{\left(1 - \frac{a\beta W_0}{\omega_0} \right)}.$$

Амплитуды поля деформации и изменения инверсии населенности, а также длительность солитона остаются при этом конечными (ср. штриховые линии 2 и сплошные кривые 2 на рис. 1). Отметим, что существование рациональных и рационально убывающих электромагнитных импульсов является отличительной чертой анизотропных сред [29]–[31], [37].

Если $\tau_s < \tau_r$, то случаи одинаковых и противоположных знаков r и q переходят друг в друга при замене $\gamma \rightarrow -\gamma$. Компонента Ω_1 имеет здесь два несимметричных горба разной полярности, а Ω_2 – один горб отрицательной полярности (см. рис. 2а, б). Знак площади компоненты Ω_1 совпадает со знаком q , как и при $\tau_s > \tau_r$. Возбуждение среды тоже оказывается достаточно сильным (рис. 2в). Отметим, что в пределе $\tau_s \rightarrow 0$ длительность солитона стремится к нулю, а амплитуда поля деформации остается конечной. Это свойство является следствием интеграла (14) и не выполняется в случае уравнения РМБ, амплитуда односолитонного решения которого обратно пропорциональна длительности.

Проведенный анализ показывает, что в рассматриваемой задаче имеет место асимметрия по полярности обеих компонент акустического импульса: компонента Ω_2 стремится уменьшить частоту квантового перехода, а знак площади Ω_1 определен знаком q . Впервые у электромагнитных ПКИ в анизотропной среде такая асимметрия была обнаружена в работе [37]. Ее проявления для системы МРМБ в частных случаях были подробно изучены в работах [28]–[30] ($d = 0$) и [31] ($q = 0$).

В пределе $\tau_s \rightarrow \tau_r$ интервал между горбами продольной и поперечной компонент импульса становится неограниченным. Переменные Ω_1 , Ω_2 , U , V и W принимают в центре импульса следующие значения: $-2\omega_0 q \tau_r^2 / (q^2 \tau_r^4 + d^2)$, $2\omega_0 (q^2 \tau_r^2 - d^2) / (q^2 \tau_r^4 + d^2)$, $-2W_0 q \tau_r^2 / (q^2 \tau_r^4 + d^2)$, 0 и $W_0 (q^2 + d^2 - 1) \tau_r^2 / (q^2 \tau_r^4 + d^2)$ (данным значениям переменных соответствуют на рис. 1 и 2 пунктирные прямые). Видно, что тогда выполняется соотношение $1 + \Omega_2 / \omega_0 = W / W_0$. Это означает, что в центре импульса среда всегда находится в термодинамически равновесном состоянии: если происходит инверсия

Рис. 2. Профили компонент поля деформации (а), (б) и инверсии населенности (в) в случае $\tau_s < \tau_r$ для $rq > 0$, $\tau_s = 2.3675$ (сплошная линия 1) и $rq < 0$, $\tau_s = 0.8$ (сплошная линия 2). Значения остальных параметров и пунктирные прямые те же, что на рис. 1.

населенностей уровней при прохождении импульса ($W > 0$), то энергия возбужденного состояния окажется меньше энергии основного вследствие относительного смещения квантовых уровней, вызванного квадрупольным эффектом Штарка.

Перейдем теперь к рассмотрению солитонного решения уравнения МСГ (18), следуя работам [34] и [35]. Возьмем за исходное решение данного уравнения нулевой фон: $\theta = 0$. В этом случае компоненты решения χ пары Лакса (23) с $\varkappa = \nu$ имеют вид

$$\chi_1 = c_1 e^{\zeta/2} + c_2 e^{-\zeta/2}, \quad \chi_2 = c_1 e^{\zeta/2} - c_2 e^{-\zeta/2},$$

где

$$\zeta = \frac{(T - b\tau_p^2 z)}{\tau_p}, \quad \tau_p = \nu^{-1}.$$

Если параметр τ_p веществен, то можно положить $\chi_2 = \chi_1^*$. Тогда, подставив выражения для компонент χ в соотношение (29), получим вещественное односолитонное решение уравнения МСГ

$$\theta = 2 \arccos \frac{s - \operatorname{th} \zeta}{\sqrt{1 - 2s \operatorname{th} \zeta + s^2}}, \quad (38)$$

где $s = \tau_c/\tau_p$. Если $f(\tau) = 0$, то переменную ζ можно записать как $\zeta = (t - z/v_M)/\tau_p$, в котором скорость v_M солитона (38) в лабораторной системе координат равна

$$v_M = a(1 + ab\tau_p^2)^{-1}.$$

Соответствующее выражение для компоненты Ω_1 солитона имеет вид

$$\Omega_1 = \frac{\operatorname{sech} \zeta}{\tau_p} \frac{1 - s \operatorname{th} \zeta}{1 - 2s \operatorname{th} \zeta + s^2}.$$

Компонента Ω_2 связана с Ω_1 соотношением (14). Выражения для продольной и поперечной компонент поля деформации импульса следуют из соотношений (8). Сопутствующая динамика спиновых состояний описывается уравнениями (17). Получающиеся при этом выражения следуют из формул (32)–(37), если в них положить $\tau_s = \omega_0 \tau_p$, $q = 0$ и учесть, что $\tau_s \ll 1$. Последнее условие соответствует приближению СП. Требование $q = 0$ связано с тем, что, как предполагалось при выводе уравнения МСГ, величины Ω_2 и ω_0 должны быть одного порядка (см. (15)).

“Площадь” компоненты Ω_1 солитона $A_s = \theta|_{T \rightarrow \infty}$, которой можно определить его топологический заряд $A_s/2\pi$, равна

$$A_s = \begin{cases} 2\pi \operatorname{sign}(\tau_p), & |s| < 1, \\ 0, & |s| > 1. \end{cases} \quad (39)$$

Таким образом, существуют три семейства односолитонных импульсов с топологическими зарядами 1, -1 и 0. Первые два семейства есть также у уравнения СГ и соответствуют 2π -импульсам (кинкам и антикинкам). Солитоны из третьего семейства будем называть нейтральными кинками. В отличие от бризерного решения

уравнения СГ, тоже имеющего нулевую “площадь” (0π -импульс), эти решения стационарны. Из формулы (39) следует, что параметр τ_c уравнения МСГ имеет смысл критической длительности, разделяющей 2π -импульсы ($|\tau_p| > \tau_c$) и нейтральные кинки ($|\tau_p| < \tau_c$).

Если $|s| < 1$, то компонента Ω_1 односолитонного импульса является однополярной и состоящей из одного горба при $|s| < 1/\sqrt{2}$ или двух симметричных горбов при $|s| > 1/\sqrt{2}$. В первом случае ее амплитуда равна $2\sqrt{1-s^2}/|\tau_p|$. Во втором случае она достигает наибольшего по абсолютной величине значения $1/\tau_c$, а максимумы горбов разделены временным интервалом

$$2|\tau_p| \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{s^2}{1-s^2} - 1}.$$

При этом значение Ω_2 между горбами компоненты Ω_1 стремится к $-2\omega_0$. Эта компонента асимметрична по полярности и сдвигает положения основного и возбужденных уровней за счет эффекта Штарка таким образом, что в центре импульса они меняются местами. Подобная ситуация, как было отмечено выше, имеет место и для системы МРМБ.

В случае нейтрального кинка компонента Ω_1 состоит из двух антисимметричных горбов, временной промежуток между пиками которых равен

$$2|\tau_p| \operatorname{arcch} \sqrt{1 + \frac{s^2}{s^2 - 1}}.$$

Амплитудные значения компонент здесь такие же, как в случае $1/\sqrt{2} < |s| < 1$. В соответствии с предположениями, использованными при выводе уравнения МСГ, кривые 2 на рис. 2 дают представление о профиле компонент поля деформации и динамике инверсии населенности при прохождении нейтрального кинка.

При $|s| = 1$ интервал между горбами становится неограниченным. Компонента Ω_1 состоит из одного горба, амплитуда и модуль площади которого равны соответственно $1/\tau_c$ и π .

Из теории СИП известно, что прохождение солитона уравнения СГ вызывает полную инверсию населенности квантовых уровней при любом значении параметра τ_p . Если $\tau_c \neq 0$, то, как следует из формул (17) и (38), возбуждение квантовых частиц оказывается полным только в случае $|s| < 1$. Действительно, для инверсии населенности W в центре импульса, где достигается ее наибольшее изменение, получаем

$$W = \begin{cases} -W_0, & |s| < 1, \\ W_0 - \frac{2W_0}{s^2}, & |s| > 1. \end{cases}$$

Если $|s| \leq \sqrt{2}$, то суммарная населенность спиновых подуровней с $S_{z'} = \pm 1$ будет больше, чем у подуровня с $S_{z'} = 0$. Но эти уровни смещаются за счет действия компоненты Ω_2 , в результате чего энергия уровня с $S_{z'} = 0$ в центре акустического импульса больше энергии уровней с $S_{z'} = \pm 1$. Мы видим, что динамика эффективных спинов в случае уравнения МСГ такая же, как у системы МРМБ.

Итерации преобразований (24)–(27) и (28), (29) на нулевом фоне дают возможность построить многосолитонные решения уравнений МРМБ и МСГ. Эти решения описывают взаимодействие солитонов, рассмотренных в этом разделе, и бризеров, данные рассеяния которых содержат пары комплексно-сопряженных собственных значений дискретного спектра. Нетрудно показать, что результатом их столкновений будут сдвиги, величина которых такая же, как у солитонных и бризерных решений уравнений РМБ и СГ. Однако, как было обнаружено в работе [35] для уравнения МСГ, ход взаимодействия солитонов существенным образом зависит от соотношений между их свободными параметрами и коэффициентами уравнений. Свойства бризерных решений и особенности столкновений солитонов уравнений МРМБ и МСГ мы предполагаем обсудить в отдельной статье.

В завершение этого раздела коснемся кратко эволюции произвольных быстроубывающих начальных профилей компонент Ω_1 и Ω_2 . Так как рассмотренные здесь уравнения калибровочно-эквивалентны хорошо изученным в рамках МОЗР уравнениям, то присутствуют общие черты: начальное условие распадается при $t \rightarrow \infty$ на солитонную часть и диспергирующий шлейф, связанный с непрерывной частью данных рассеяния. Новой особенностью является то, что из начального профиля компоненты Ω_2 выделится недиспергирующий стационарный импульс, форма которого полностью определена функцией $f(\tau)$ в интеграле (14). Форма солитонов асимптотически стремится к их форме в случае $f(\tau) = 0$. Это, в частности, означает, что амплитуда солитонов ограничена.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что динамика продольно-поперечного акустического импульса в деформированном парамагнитном кристалле описывается интегрируемой в рамках МОЗР системой МРМБ (7), (12), (13), а также интегрируемым уравнением МСГ (18), если длительность импульса удовлетворяет условию спектрального перекрытия (16). Анализ солитонных решений этих уравнений выявил качественно новые особенности в поведении эффективных спинов и компонент поля деформации импульса по сравнению со случаями сугубо поперечных или продольных акустических полей. Оказалось, что характер взаимодействия импульса и среды существенно зависит от соотношений между свободными параметрами солитонов и коэффициентами уравнений. По этой причине уравнение МСГ, например, имеет новый тип решений – нейтральные кинки, топологический заряд которых равен нулю. Особенностью системы МРМБ является то, что она обладает несингулярными рационально убывающими солитонными решениями.

По нашему мнению, уравнения МРМБ и МСГ, как и другие уравнения, калибровочно-эквивалентные хорошо известным интегрируемым уравнениям (см., например, [38]), заслуживают отдельного изучения и специального развития для них аппарата МОЗР и методов теории солитонов. Так, представляют интерес задачи квантования нейтральных кинков, гамильтоновой формулировки уравнений и описания данных рассеяния рационально убывающих солитонов. Изучение автомодельных

редукций может способствовать появлению новых подходов в теории теста Пенлеве. Кроме того, физическая сторона исследования калибровочно-эквивалентных уравнений открывает широкое поле деятельности. Так, интегрируемая модель, описывающая распространение циркулярно поляризованных электромагнитных ПКИ в анизотропной среде и обобщающая уравнения РМБ, была выведена в работе [39]. Модифицированная версия этой модели, подобная изученным в данной статье, может также найти приложения в нелинейной оптике и физической акустике.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-16422).

Список литературы

- [1] S. L. McCall, E. L. Hahn, *Phys. Rev. Lett.*, **18** (1967), 908.
- [2] G. L. Lamb, *Rev. Mod. Phys.*, **43** (1971), 99.
- [3] J. D. Gibbon, J. C. Eilbeck, *J. Phys. A*, **5** (1972), L122; P. J. Caudrey, J. D. Gibbon, J. C. Eilbeck, R. K. Bullough, *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973), 237; *J. Phys. A*, **6** (1973), L53; G. L. Lamb, *Phys. Rev. Lett.*, **31** (1973), 196.
- [4] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980; Дж. Л. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, М., 1983.
- [5] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [6] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ*, **61** (1971), 118.
- [7] Г. Агарвал, *Нелинейная волоконная оптика*, Мир, М., 1996.
- [8] J. C. Eilbeck, *J. Phys. A*, **5** (1972), 1355.
- [9] J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, R. K. Bullough, *J. Phys. A*, **6** (1973), 1337; J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, R. K. Bullough, J. C. Eilbeck, *Lett. Nuovo Cimento*, **8** (1973), 775.
- [10] N. S. Shiren, *Phys. Rev. B*, **2** (1970), 2471.
- [11] Г. А. Денисенко, *ЖЭТФ*, **60** (1971), 2269.
- [12] В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, *Письма в ЖЭТФ*, **20** (1974), 644.
- [13] С. А. Ахманов, В. А. Высолюх, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, М., 1988; В. Э. Гусев, А. А. Карабутов, *Лазерная оптоакустика*, Наука, М., 1991; С. А. Ахманов, В. Э. Гусев, *УФН*, **162:3** (1992), 3; <http://ufn.ioc.ac.ru/archive/russian/abstracts/abst1338.html>.
- [14] Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, *Письма в ЖЭТФ*, **51** (1990), 252; Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ушаповский, *ЖЭТФ*, **100** (1991), 762.
- [15] A. Kujawski, *Z. Phys. B*, **85** (1991), 129.
- [16] S. V. Sazonov, E. V. Trifonov, *J. Phys. B*, **27** (1994), L7.
- [17] S. V. Sazonov, *J. Phys.: Condens. Matter*, **4** (1992), 6485; **6** (1994), 6295; С. В. Сазонов, *ЖЭТФ*, **118** (2000), 20.
- [18] С. А. Альтшулер, Б. М. Козырев, *Электронный парамагнитный резонанс соединений элементов промежуточных групп*, Наука, М., 1972.
- [19] Дж. Такер, Р. Рэмpton, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, М., 1975.
- [20] M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, J. V. Moloney, *Physica D*, **138** (2000), 134.
- [21] С. В. Воронков, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ*, **120** (2001), 269; А. А. Заболотский, *ЖЭТФ*, **123** (2003), 560; С. В. Сазонов, *ЖЭТФ*, **124** (2003), 803.
- [22] А. А. Заболотский, *ЖЭТФ*, **123** (2003), 1239.
- [23] С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ*, **127** (2005), 289.

- [24] S. V. Sazonov, N. V. Ustinov, *Phys. Rev. E*, **73** (2006), 056614; [nlin.PS/0603040](#).
- [25] E. H. Jacobsen, K. W. H. Stevens, *Phys. Rev.*, **129** (1963), 2036.
- [26] В. А. Красильников, В. В. Крылов, *Введение в физическую акустику*, Наука, М., 1984.
- [27] Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Физматлит, М., 1963.
- [28] С. О. Елютин, *ЖЭТФ*, **128** (2005), 17.
- [29] С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Квант. электроника*, **35** (2005), 701.
- [30] С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ*, **129** (2006), 849.
- [31] N. V. Bakhar, N. V. Ustinov, *Proc. SPIE*, **6181** (2006), 61810Q; [nlin.SI/0512068](#).
- [32] M. D. Kruskal, "The Korteweg–de Vries equation and related evolution equations", *Nonlinear Wave Motion*, Proc. AMS-SIAM Summer Sem. (Potsdam, NY, 1972), Lect. Appl. Math., **15**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974, 61; H.-H. Chen, *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 925.
- [33] A. Nakamura, *J. Phys. Soc. Japan*, **49** (1980), 1167; А. Б. Борисов, С. А. Зыков, *ТМФ*, **115**:2 (1998), 199.
- [34] С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Письма в ЖЭТФ*, **83** (2006), 573.
- [35] С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ*, **130** (2006), 646.
- [36] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer, Berlin–Heidelberg, 1991.
- [37] А. И. Маймистов, Дж.-Г. Капуто, *Оптика и спектроскопия*, **94** (2003), 275.
- [38] А. Б. Борисов, С. А. Зыков, М. В. Павлов, *ТМФ*, **131**:1 (2002), 126.
- [39] А. А. Заболотский, *ЖЭТФ*, **125** (2004), 1229.

Поступила в редакцию 4.09.2006