Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Л. Ло, Об инвариантной информации Брукнера–
Зайлингера, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 2, 302–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6046>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:33:23

© 2007 г.

Шунь-Лун Ло*

ОБ ИНВАРИАНТНОЙ ИНФОРМАЦИИ БРУКНЕРА–ЗАЙЛИНГЕРА

Представлена альтернативная интерпретация понятия инвариантной информации: установлено, что инвариантная информация прямо связана с обычной полной дисперсией квантового состояния. Термин “полная” здесь означает взятие суммы дисперсий по любому ортогональному и полному набору наблюдаемых, или, эквивалентно, усреднение по некоторому достаточно общему ансамблю наблюдаемых. Эта простая и интуитивно ясная основа понятия инвариантной информации Брукнера–Зайлингера проливает дополнительный свет на информационную и статистическую природу квантовых измерений.

Ключевые слова: инвариантная информация, квантовые измерения, полная дисперсия, перенормировка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основываясь на идее выделения информации из квантовых измерений, Брукнер и Зайлингер предложили операционное понятие инвариантной информации и использовали его при исследовании квантовых экспериментов [1]. Эта мера информации нашла важные применения в квантовой механике, например при рассмотрении фундаментальных вопросов квантовой теории в ракурсе теории информации.

Изучая информационное содержание квантовой системы, описываемой смешанным квантовым состоянием ρ (матрицей плотности), Брукнер и Зайлингер ввели как операционную меру квантовой информации величину, которая, по существу, есть [1], [2]

$$I(\rho) := \text{tr } \rho^2 - \frac{1}{n},$$

где tr обозначает след, а n – размерность квантовой системы. Эта мера по своей сути отличается от более знакомого понятия энтропии фон Неймана [3]

$$S(\rho) := -\text{tr } \rho \ln \rho.$$

*Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China. E-mail: luosl@amt.ac.cn

Они ввели также математический эквивалент меры информации (или, скорее, неопределенности)

$$U(\rho) := 1 - \text{tr } \rho^2$$

как суммарную неопределенность во всех отдельных измерениях для полного множества взаимно дополнительных экспериментов.

Для определенности мы будем называть величину $I(\rho)$ *инвариантной информацией Брукнера–Зайлингера*, а величину $U(\rho)$ – *инвариантной неопределенностью Брукнера–Зайлингера*. Ясно, что эти величины являются дополнительными по отношению друг к другу. Брукнер и Зайлингер представили впечатляющую физическую аргументацию, приводящую к этим величинам, особо подчеркивая их операторный смысл и свойство инвариантности. Эти понятия инвариантной информации и инвариантной неопределенности в дальнейшем изучались и применялись в ряде фундаментальных задач квантовой механики [2], при рассмотрении квантовых экспериментов, таких как квантовая телепортация [4], для установления оценок состояний [5].

Похожие и даже более общие выражения, чем приведенные выше, появились ранее как в математической, так и в физической литературе. Харди и др. [6] ввели и детально исследовали величину

$$M_q(\{\lambda_\alpha\}) := \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha^q \right)^{q-1}, \quad q \in \mathbb{R},$$

где $\{\lambda_\alpha\}$ – вероятностный вектор. Если оказывается, что $\{\lambda_\alpha\}$ – спектр матрицы плотности ρ , то последнее выражение может быть переписано в виде $M_q(\{\lambda_\alpha\}) = (\text{tr } \rho^q)^{q-1}$. Реньи [7] ввел классический аналог так называемой q -энтропии

$$R_q(\rho) := \frac{1}{1-q} \ln \text{tr } \rho^q = \frac{1}{1-q} \ln \sum_\alpha \lambda_\alpha^q, \quad q \neq 1,$$

а случай $q = 1$ понимается как предел $R_1(\rho) = \lim_{q \rightarrow 1} R_q(\rho)$. Эта величина имеет много приложений в квантовой теории информации (см., например, [8]). Так называемая q -энтропия Тсаллиса определена как [9]

$$T_q(\rho) := \frac{1 - \text{tr } \rho^q}{q-1} = \frac{1 - \sum_\alpha \lambda_\alpha^q}{q-1}, \quad q \neq 1,$$

а случай $q = 1$ понимается как предел $T_1(\rho) = \lim_{q \rightarrow 1} T_q(\rho)$. Ясно, что величины $R_1(\rho)$ и $T_1(\rho)$ совпадают с энтропией фон Неймана $S(\rho) = -\text{tr } \rho \ln \rho$, а величины $R_2(\rho)$ и $T_2(\rho)$ просто связаны с величиной $U(\rho)$. Эта величина широко используется в контексте неэкстенсивной статистической физики.

Однако выражения были определены *ad hoc*, без всякой операционной мотивации. Именно аргументация, впервые предложенная Брукнером и Зайлингером, выявила операционную и инвариантную значимость этих величин, выдвинув тем самым на первый план информационную природу квантовых измерений. Следует также отметить, что уже в 1949 г. (примерно в то же время, когда Шеннон развил свою

математическую теорию связи, основанную на понятии энтропии) Симпсон изучал выражение $1 - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2$, построенное из распределения вероятностей $\{\lambda_{\alpha}\}$, как меру разнообразия (которую также можно рассматривать как своего рода энтропию) [10]. Эта величина теперь называется индексом Гини–Симпсона и достаточно широко используется в биологической статистике [11]. Рассуждая аналогично, Онисеску предложил использовать величину $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2$, названную им энергией информации, в качестве фундаментального понятия теории информации, которое может дополнять и пополнять теорию Шеннона [12]. Эта величина нашла применение в химии [13]. Более того, родственная величина, обычно называемая линейной энтропией или чистой, имеет важные приложения в квантовой теории информации [14].

Цель настоящей работы – выявить естественную интерпретацию и глубже проникнуть в природу инвариантной информации (неопределенности) Брукнера–Зайлингера. Мы покажем, что эти величины просто представляют собой результат перенормировки наивного усреднения обычной дисперсии. Наш результат, таким образом, демонстрирует первостепенную важность и простую природу инвариантной информации Брукнера–Зайлингера.

2. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ИНВАРИАНТНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Первая величина, которая приходит в голову для описания мер неопределенности и информации квантового состояния, не считая энтропии фон Неймана, – это повсеместно используемое, традиционное понятие дисперсии $V(\rho, H)$, которое определено для пары из квантового состояния ρ и наблюдаемой H следующим образом:

$$V(\rho, H) := \text{tr } \rho H^2 - (\text{tr } \rho H)^2.$$

Данная величина обычно интерпретируется как неопределенность наблюдаемой H в состоянии ρ . Она также характеризует неопределенность (или количество информации) состояния ρ относительно наблюдаемой H . Поскольку здесь нас интересует, в первую очередь, квантовое состояние ρ , примем вторую точку зрения, а для того чтобы получить величину, действительно не зависящую от наблюдаемой, можно просто перейти к среднему по некоторому ансамблю наблюдаемых.

Более точно, пусть рассматриваемая квантовая система описывается n -мерным гильбертовым пространством $\mathbb{C}^n$. Пусть $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ – n^2 -мерное вещественное гильбертово пространство всех наблюдаемых (самосопряженных операторов) над пространством $\mathbb{C}^n$ квантовой системы со скалярным произведением Гильберта–Шмидта:

$$\langle H | K \rangle := \text{tr } HK, \quad H, K \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n).$$

Тогда естественный способ построения величины, характеризующей неопределенность состояния ρ , которая не зависит от наблюдаемой H , заключается в усреднении неопределенности по ортонормированному базису в пространстве $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Поэтому определим следующую величину:

$$V(\rho) := \sum_{j=1}^{n^2} V(\rho, H_j),$$

где операторы $\{H_j: j = 1, 2, \dots, n^2\}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Оказывается, что

$$V(\rho) = n - \text{tr } \rho^2, \quad (1)$$

где ρ – состояние n -мерной квантовой системы.

Из формулы (1) видно, что величина $V(\rho)$ достигает минимального значения

$$V_{\min} := n - 1 \quad (2)$$

тогда и только тогда, когда ρ – чистое состояние. Это интуитивно понятно и естественно, поскольку чистое состояние представляется единичным вектором в гильбертовом пространстве системы, а любые два таких вектора эквивалентны в том смысле, что могут быть переведены один в другой унитарным оператором, и, следовательно, все чистые состояния имеют одинаковую присущую им неопределенность, которая является минимальной среди всех состояний, включая смешанные. Это повторение аргумента фон Неймана о том, что все чистые состояния имеют одну и ту же минимальную (в действительности равную нулю) энтропию. Более того, эта минимальная неопределенность должна зависеть исключительно от размерности гильбертова пространства, что и имеет место в данном случае. В качестве альтернативы, можно рассмотреть величину $V_{\min}$ (2) как внутренне присущую гильбертову пространству $\mathbb{C}^n$ неуменьшаемую неопределенность, причем интересно, что это число в точности равно числу комплексных степеней свободы единичного вектора (чистого состояния) в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^n$. Если вычесть эту внутреннюю неопределенность $V_{\min}$ (2) из полной неопределенности $V(\rho)$ (такое вычитание можно рассматривать как тривиальную перенормировку), то получится в точности инвариантная неопределенность Брукнера–Зайлингера, т.е.

$$U(\rho) = V(\rho) - V_{\min}.$$

Проще говоря,

инвариантная неопределенность = полная дисперсия – минимальная дисперсия,

т.е. инвариантная неопределенность Брукнера–Зайлингера равна разности между полной дисперсией и перенормировочной константой. Здесь перенормировочная константа допускает простую интерпретацию как не уменьшаемая неопределенность любого квантового состояния, которая равна полной дисперсии любого чистого состояния.

С другой стороны, когда состояние является максимально смешанным, можно ожидать максимальной неопределенности. Действительно, полная дисперсия (неопределенность) $V(\rho)$ достигает своего максимального значения

$$V_{\max} := n - \frac{1}{n}$$

тогда и только тогда, когда $\rho = \mathbf{1}/n$ – максимально смешанное состояние. Соответственно величина

$$V_{\max} - V(\rho) = I(\rho),$$

которая является дополнительной к величине $V(\rho) - V_{\min} = U(\rho)$, может интерпретироваться как полная информация квантового состояния, и она является в точности инвариантной информацией Брукнера–Зайлингера. Проще говоря,

инвариантная информация = максимальная дисперсия – полная дисперсия.

Таким образом, мы отождествили инвариантную информацию Брукнера–Зайлингера с результатом простой перенормировки обычной полной дисперсии.

Установим теперь равенство (1). Прежде всего, необходимо показать, что величина $V(\rho)$ корректно определена, т.е. не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{H_j : j = 1, 2, \dots, n^2\}$. Итак, пусть $\{K_j : j = 1, 2, \dots, n^2\}$ – другой ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Мы должны показать, что

$$\sum_{j=1}^{n^2} V(\rho, H_j) = \sum_{j=1}^{n^2} V(\rho, K_j).$$

Для доказательства поступим следующим образом. Поскольку $\{H_j\}$ – ортонормированный базис пространства $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, можно разложить K_i по базису $\{H_j\}$:

$$K_i = \sum_{j=1}^{n^2} a_{ij} H_j, \quad i = 1, 2, \dots, n^2.$$

Но поскольку согласно предположению операторы $\{K_i\}$ также образуют ортонормированный базис, то отсюда следует, что матрица $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n^2}$ является вещественной ортогональной матрицей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n^2} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n^2} V(\rho, K_i) &= \sum_{i=1}^{n^2} (\text{tr } \rho K_i^2 - (\text{tr } \rho K_i)^2) = \\ &= \sum_{i=1}^{n^2} \left(\text{tr } \rho \left(\sum_{j=1}^{n^2} a_{ij} H_j \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{n^2} \text{tr } \rho a_{ij} H_j \right)^2 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n^2} \left(\text{tr } \rho \sum_{j,k=1}^{n^2} a_{ij} a_{ik} H_j H_k - \sum_{j,k=1}^{n^2} a_{ij} a_{ik} (\text{tr } \rho H_j) (\text{tr } \rho H_k) \right) = \\ &= \sum_{j,k=1}^{n^2} \left(\left(\sum_{i=1}^{n^2} a_{ij} a_{ik} \right) \text{tr } \rho H_j H_k - \left(\sum_{i=1}^{n^2} a_{ij} a_{ik} \right) (\text{tr } \rho H_j) (\text{tr } \rho H_k) \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n^2} (\operatorname{tr} \rho H_j^2 - (\operatorname{tr} \rho H_j)^2) = \sum_{j=1}^{n^2} V(\rho, H_j).$$

Соответственно величина $V(\rho)$ определена однозначно.

Основываясь на данном результате, покажем далее, что величина $V(\rho)$ является инвариантной относительно любых унитарных преобразований. Пусть U – некоторый унитарный оператор в пространстве $\mathbb{C}^n$, тогда, очевидно, операторы $\{UH_jU^\dagger: j = 1, 2, \dots, n^2\}$ также образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, поэтому

$$V(U^\dagger \rho U) = \sum_{j=1}^{n^2} V(U^\dagger \rho U, H_j) = \sum_{j=1}^{n^2} V(\rho, UH_jU^\dagger) = \sum_{j=1}^{n^2} V(\rho, H_j) = V(\rho).$$

Это доказывает унитарную инвариантность $V(\rho)$.

Найдем явное выражение для величины $V(\rho)$. Поскольку эта величина инвариантна относительно унитарных преобразований, то в процессе ее вычисления можно работать в том представлении, в котором состояние ρ диагонально. Итак, пусть $\rho = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – диагональная матрица, $H = (h_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq n}$ – матрица наблюдаемой H в том представлении, где состояние ρ имеет диагональный вид. Разумеется, $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\beta\alpha}$.

Пусть $E_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$, – матрица, у которой элемент (α, β) равен единице, а остальные элементы равны нулю; для $\alpha \neq \beta$ положим

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{\alpha\beta} + E_{\beta\alpha}), \quad B_{\alpha\beta} = \frac{i}{\sqrt{2}}(E_{\alpha\beta} - E_{\beta\alpha}).$$

Прямая проверка показывает, что набор матриц

$$\{E_{\alpha\alpha}\} \cup \{A_{\alpha\beta}: \alpha < \beta\} \cup \{B_{\alpha\beta}: \alpha < \beta\}$$

образует ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Нетрудно видеть, что

$$V(\rho, E_{\alpha\alpha}) = \lambda_\alpha - \lambda_\alpha^2, \quad V(\rho, A_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(\lambda_\alpha + \lambda_\beta), \quad V(\rho, B_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(\lambda_\alpha + \lambda_\beta).$$

Теперь, суммируя предыдущие равенства, имеем

$$V(\rho) = \sum_{\alpha} (\lambda_\alpha - \lambda_\alpha^2) + \sum_{\alpha < \beta} (\lambda_\alpha + \lambda_\beta) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}{2} - \sum_{\alpha} \lambda_\alpha^2 = n - \operatorname{tr} \rho^2,$$

т.е. искомый результат.

Приведенное доказательство может быть сокращено до следующего короткого, но уточненного вывода (1), если воспользоваться некоторым результатом современной теории алгебр Ли. Поскольку $\{H_j: j = 1, 2, \dots, n^2\}$ – базис в операторном пространстве $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, состоящем из всех самосопряженных операторов на $\mathbb{C}^n$, то отсюда следует, что $\sum_{j=1}^{n^2} |H_j\rangle\langle H_j|$ – тождественный супероператор, т.е. тождественный оператор на гильбертовом пространстве $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Поэтому, замечая, что $\operatorname{tr} \rho H_j = \langle \rho | H_j \rangle$,

имеем

$$\sum_{j=1}^{n^2} (\text{tr } \rho H_j)^2 = \sum_{j=1}^{n^2} \langle \rho | H_j \rangle \langle H_j | \rho \rangle = \langle \rho | \rho \rangle = \text{tr } \rho^2.$$

С другой стороны,

$$\sum_{j=1}^{n^2} \text{tr } \rho H_j^2 = \text{tr} \left(\rho \sum_{j=1}^{n^2} H_j^2 \right) = n \text{tr } \rho = n.$$

Здесь использовано равенство

$$\sum_{j=1}^{n^2} H_j^2 = nI,$$

справедливость которого следует из того, что оператор в левой части равенства есть оператор Казимира алгебры Ли $U(n)$ и, следовательно, он должен быть пропорционален единичному оператору, а коэффициент пропорциональности n находится посредством взятия следа.

Мера неопределенности V (1) может также быть получена другим способом при помощи простой процедуры усреднения с использованием случайных матриц [15]. Продемонстрируем это. Пусть наблюдаемая $H = (h_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq n}$ представляет собой ансамбль (*случайную матрицу*), в котором каждое $h_{\alpha\beta}$ является случайной величиной с нулевым средним и единичной дисперсией, и предположим, что эти случайные величины попарно независимы. Обозначим через $\mathcal{E}$ математическое ожидание (среднее) относительно этого ансамбля. В таком случае алгебраические преобразования приводят к равенству

$$V(\rho, H) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}{2} |h_{\alpha\beta}|^2 - \sum_{\alpha, \beta=1}^n \lambda_\alpha \lambda_\beta h_{\alpha\alpha} h_{\beta\beta},$$

а взяв математическое ожидание от этого равенства, мы без труда приходим к выражению

$$\mathcal{E}V(\rho, H) = n - \text{tr } \rho^2,$$

которое совпадает с выражением для полной дисперсии $V(\rho)$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги. Инвариантная информация (неопределенность) Брукнера–Зайлингера, которая является неотъемлемой мерой квантовой информации (неопределенности) для смешанного состояния и естественно возникает при анализе квантовых измерений, может рассматриваться как перенормированный вариант полной дисперсии квантового состояния. Это выявляет простую природу и естественную значимость инвариантной информации (неопределенности).

В отличие от энтропии фон Неймана, которая широко используется и во многих контекстах играет важную роль [16], идеи и методы, заключенные в понятии

инвариантной информации (неопределенности), только предстоит использовать и оценить по достоинству.

С другой стороны, существует много других мер информации, таких как различные квантовые информации Фишера, которые обобщают обычную дисперсию, имеют замечательные приложения в квантовой теории [17] и также могут быть использованы для определения мер информации смешанных состояний посредством представленных выше методов усреднения. Было бы интересно сравнить свойства этих мер, а также сравнить их с энтропией фон Неймана и с необычным понятием субэнтропии, исследованным в работах [18]. Все эти меры информации могут оказаться полезными и уникальными в своем роде при конструировании квантовых состояний некоторых специальных видов и вообще при рассмотрении фундаментальных вопросов квантовой механики с точки зрения теории информации в духе Бриллюэна [19], Уилера [20], Шамхаммера [21], Переса [22], Фрайдена, Соффера [23], Холла [24], Зайлингера [25], Кэйвиса и др. [26], Фухса [27] и других. Инвариантная информация Брукнера–Зайлингера, несомненно, выделяется среди других очевидной простотой, наглядностью и фундаментальным характером.

Благодарности. Эта работа была поддержана NSFC (грант № 10571166).

Список литературы

- [1] C. Brukner, A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.*, **83** (1999), 3354.
- [2] C. Brukner, A. Zeilinger, *J. Modern Opt.*, **47** (2000), 2233; *Phys. Rev. A*, **63** (2001), 022113; “Information and fundamental elements of the structure of quantum theory”, *Time, Quantum, Information*, eds. L. Castell, O. Ischebeck, Springer, Berlin, 2003, 323; [quant-ph/0212084](#).
- [3] И. фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, М., 1964; A. Wehrl, *Rev. Mod. Phys.*, **50** (1978), 221.
- [4] J. Lee, M. S. Kim, *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000), 4236; J. Lee, M. S. Kim, C. Brukner, *Phys. Rev. Lett.*, **91** (2003), 087902.
- [5] J. Rehacek, Z. Hradil, *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002), 130401; Z. Hradil, J. Rehacek, *Fortschr. Phys.*, **51** (2003), 150.
- [6] G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.
- [7] A. Renyi, “On measures of entropy and information”, *Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob.*, Vol. I, Univ. California Press, Berkeley, 1961, 547.
- [8] W. van Dam, P. Hayden, *Renyi-entropic bounds on quantum communication*, [quant-ph/0204093](#).
- [9] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.*, **52** (1988), 479; *Braz. J. Phys.*, **29** (1999), 1.
- [10] E. Simpson, *Nature*, **163** (1949), 688.
- [11] K. S. Lau, *Sankhya. Ser. A*, **47** (1985), 295.
- [12] O. Onicescu, *C. R. Acad. Sci. Paris, A*, **263** (1966), 841.
- [13] K. Ch. Chatzisavvas, Ch. C. Moustakidis, C. P. Panos, *J. Chem. Phys.*, **123** (2005), 174111.
- [14] V. V. Dodonov, *J. Opt. B. Quantum Semiclass. Opt.*, **4** (2002), S98; W. H. Zurek, S. Habib, J. P. Paz, *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993), 1187; F. M. Cucchietti, D. A. R. Dalvit, J. P. Paz, W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.*, **91** (2003), 210403; N. Canosa, R. Rossignoli, *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002), 170401; T. C. Wei, K. Nemoto, P. M. Goldbart, P. G. Kwiat et. al., *Phys. Rev. A*, **67** (2003), 022110; G. Adesso, F. Illuminati, *Phys. Rev. A*, **72** (2005), 032334.

- [15] E. P. Wigner, *Ann. Math.*, **62** (1955), 548; **65** (1957), 203; M. L. Mehta, *Random matrices*, Academic Press, Boston, 1991.
- [16] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [17] E. P. Wigner, M. M. Yanase, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **49** (1963), 910; C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, New York, 1976; A. S. Holevo, *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*, North-Holland, Amsterdam, 1982; S. Luo, *Phys. Rev. Lett.*, **91** (2003), 180403; *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132** (2004), 885; *Phys. Rev. A*, **72** (2005), 042110; *Phys. Rev. A*, **73** (2006), 022324; III.-Л. Лыо, *ТМФ*, **143:2** (2005), 231; S. Luo, Q. Zhang, *Phys. Rev. A*, **69** (2004), 032106.
- [18] R. Jozsa, D. Robb, W. K. Wootters, *Phys. Rev. A*, **49** (1994), 668; S. R. Nichols, W. K. Wootters, *Quantum Inf. Comput.*, **3** (2003), 1; G. Mitchison, R. Jozsa, *Phys. Rev. A*, **69** (2004), 032304.
- [19] L. Brillouin, *Science and Information Theory*, Academic Press, New York, 1956.
- [20] J. Wheeler, "Information, physics, quantum: The search for links", *Complexity, Entropy, and Physics of Information* (Santa Fe, New Mexico, 1989), ed. W. H. Zurek, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1990, 3.
- [21] J. Summhammer, *Found. Phys. Lett.*, **1** (1988), 113; *Int. J. Theor. Phys.*, **33** (1994), 171.
- [22] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [23] B. R. Frieden, B. H. Soffer, *Phys. Rev. E*, **52** (1995), 2274; B. R. Frieden, *Science from Fisher Information*, A unification, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [24] M. J. W. Hall, *Phys. Rev. A*, **59** (1999), 2602; **69** (2004), 052113.
- [25] A. Zeilinger, *Found. Phys.*, **29** (1999), 631.
- [26] C. M. Caves, C. A. Fuchs, R. Schack, *Phys. Rev. A*, **65** (2002), 022305.
- [27] C. A. Fuchs, *J. Modern Opt.*, **50** (2003), 987.

Поступила в редакцию 8.08.2006