Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Переломов, Замечание о матричной функции Эйри, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 2, 308–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 17:55:27

© 2000 г.

А. М. Переломов*

ЗАМЕЧАНИЕ О МАТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЭЙРИ

Получено новое интегральное представление матричной функции Эйри.

Памяти М. В. Савельева

Хорошо известная гипотеза Виттена [1] о том, что логарифм статистической суммы общей одноматричной модели является производящей функцией индексов пересечения на пространстве модулей алгебраических кривых, была доказана Концевичем [2, 3], который свел эту задачу к вычислению матричной функции Эйри. Многие аспекты этой проблемы обсуждались в работах [4–6].

Матричная функция Эйри определяется с помощью интегрального представления. В данной статье дано еще одно интегральное представление этой функции.

Следуя работе [3], определим матричную функцию Эйри на пространстве $\mathcal{H}_N$ эрмитовых $(N \times N)$ -матриц как интеграл

$$A(X) = \int \exp \left\{ i \left(\frac{1}{3} \operatorname{tr}(Y^3) - \operatorname{tr}(XY) \right) \right\} dY \quad (1)$$

по пространству $\mathcal{H}_N$, где dY есть $U(N)$ -инвариантная мера на этом пространстве, $X, Y \in \mathcal{H}_N$.

Функция $A(X)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta A(X) + (\operatorname{tr} X) A(X) = 0, \quad (2)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Напомним, что классическая функция Эйри

$$\operatorname{Ai}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(i \left(\frac{y^3}{3} - xy \right) \right) dy \quad (3)$$

есть единственное (с точностью до множителя) ограниченное на вещественной оси решение дифференциального уравнения

$$\operatorname{Ai}''(x) + x \operatorname{Ai}(x) = 0. \quad (4)$$

* Институт математики им. Макса Планка, Бонн, Германия; Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия. E-mail: perelomo@posta.unizar.es

Из определения (1) следует, что зависимость функции $A(X)$ от переменных $\tilde{X}$ и $\xi = N^{-1} \operatorname{tr} X$ ($X = \tilde{X} + \xi I$, $\operatorname{tr} \tilde{X} = 0$) можно разделить. Действительно,

$$\begin{aligned} X &= \tilde{X} + \xi I, & Y &= \tilde{Y} + \eta I, & \operatorname{tr} \tilde{X} &= \operatorname{tr} \tilde{Y} = 0, \\ \operatorname{tr}(Y^3) &= \operatorname{tr}(\tilde{Y}^3) + 3\eta \operatorname{tr}(\tilde{Y}^2) + N\eta^3, \\ \operatorname{tr}(XY) &= \operatorname{tr}(\tilde{X}\tilde{Y}) + N\xi\eta. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Для матричной функции Эйри (1) справедливо интегральное представление

$$\begin{aligned} A(X) &= A(\tilde{X}, \xi) = A(Q, \xi) = \\ &= C N^{-\frac{1}{3}} \int \exp\left\{\frac{i}{3} \operatorname{tr}(P^3)\right\} \operatorname{Ai}\left(N^{-\frac{1}{3}}(N\xi - \operatorname{tr}(P^2))\right) \Phi(Q|P) d\mu(P). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь Q и P – диагональные матрицы такие, что $\tilde{X} = UQU^{-1}$, $\tilde{Y} = U_1PU_1^{-1}$, U и U_1 – унитарные матрицы, $\Phi(Q|P)$ – зональная сферическая функция,

$$\Phi(Q|P) = \frac{\det\{\exp(i(q_j p_k))\}}{\det\{(q_j p_k)\}}, \quad (6)$$

$$Q = \operatorname{diag}(q_1, \dots, q_N), \quad P = \operatorname{diag}(p_1, \dots, p_N), \quad d\mu(P) = (V(P))^2 dP, \quad (7)$$

$C = \operatorname{const}$, $V(P)$ – определитель Вандермонда,

$$V(P) = \prod_{j < k} (p_j - p_k) = \det(p_j^{k-1}). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует из формулы Хариш-Чандры.

ТЕОРЕМА 2 [7]. Пусть Φ – функция на пространстве эрмитовых $(N \times N)$ -матриц, инвариантная относительно сопряжения. Тогда для любой диагональной эрмитовой матрицы Q справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int \Phi(Y) \exp(-i \operatorname{tr}(QY)) dY &= \\ &= (-2\pi i)^{\frac{N(N-1)}{2}} (V(Q))^{-1} \int \Phi(P) \exp(-i \operatorname{tr}(QP)) (V(P))^2 dP, \end{aligned} \quad (9)$$

где $Y = UPU^{-1}$ и интегрирование в последнем интеграле ведется по пространству диагональных эрмитовых матриц P .

Полученное интегральное представление матричной функции Эйри, в котором зависимость от переменной ξ содержится только в стандартной одномерной функции Эйри, может быть полезно при исследовании свойств матричной функции Эйри.

В случае $N = 2$, когда $\text{tr}(P^3) = 0$, интегральное представление (5) принимает более простой вид

$$A(X) \equiv A(\xi, r) = \int \exp \left\{ \frac{2i}{3} (\eta^3 + 3\eta p^2 - 3\xi\eta) \right\} \Phi(r|p) p^2 dp d\eta, \quad (10)$$

где

$$\Phi(r|p) = \frac{\sin pr}{pr} \quad (11)$$

есть соответствующая зональная сферическая функция. Интегрирование по η дает

$$A(\xi, r) = C \int \text{Ai} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} (\xi - p^2) \right) \Phi(r|p) p^2 dp, \quad C = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (12)$$

Если в формуле (10) взять интеграл по p , получим другое интегральное представление

$$A(\xi, r) = C_1 \int \exp \left\{ \frac{2i}{3} (\tau^3 - 3\xi\tau) \right\} G(r, \tau) d\tau, \quad C_1 = \text{const}, \quad (13)$$

где

$$G(r, \tau) = \tau^{-\frac{3}{2}} \exp \{ i\tau^{-1} r^2 \} \quad (14)$$

— функция Грина свободного уравнения Шредингера в трехмерном пространстве.

Благодарности. Эта работа была выполнена во время моего пребывания в Институте математики им. Макса Планка в Бонне. Мне приятно поблагодарить сотрудников этого института за гостеприимство.

Список литературы

- [1] *E. Witten.* J. Diff. Geom., Suppl. 1991. V. 1. P. 243–310.
- [2] *М. Концевич.* Функции, анализ и его приложения. 1991. Т. 25. № 2. С. 50–57.
- [3] *M. Kontsevich.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 147. P. 1–23.
- [4] *E. Witten.* On the Kontsevich model and other models of two-dimensional gravity. Princeton, N.Y.: Princeton Univ. Press, 1991.
- [5] *E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 371. P. 191–245.
- [6] *C. Itzykson, J.-B. Zuber.* Int. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. P. 5661–5705.
- [7] *Harish-Chandra.* Am. J. Math. 1957. V. 79. P. 87–120.