Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Гандариас, М. С. Брузон, Новые решения уравнения Шварца–Кортевега–де Фриза в размерности $2 + 1$, полученного на основе слабых симметрий, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 3, 380–390

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6053>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 06:20:23

© 2007 г.

М. Л. Гандариас*, М. С. Брузон*

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШВАРЦА–КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА В РАЗМЕРНОСТИ $2 + 1$, ПОЛУЧЕННОГО НА ОСНОВЕ СЛАБЫХ СИММЕТРИЙ

Рассматривается $(2 + 1)$ -мерное интегрируемое уравнение Шварца–Кортевега–де Фриза. С помощью слабых симметрий получена система уравнений в частных производных в размерности $1 + 1$. Дальнейшие редукции приводят к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, обеспечивающим построение новых решений, которые могут быть выражены через известные функции. Эти решения зависят от двух произвольных функций и одного произвольного решения волнового уравнения Римана и не могут быть получены с помощью классических и неклассических симметрий. Некоторые из найденных решений уравнения Шварца–Кортевега–де Фриза демонстрируют весьма разнообразное качественное поведение, наиболее интересными среди них являются решения вида бегущей волны и солитонные решения.

Ключевые слова: слабые симметрии, уравнения в частных производных, уединенные волны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что уравнение Шварца–Кортевега–де Фриза (ШКдФ)

$$\frac{\Phi_t}{\Phi_x} + \{\widehat{\Phi}; x\} = 0,$$

где

$$\{\widehat{\Phi}; x\} = \left(\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x} \right)_x - \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x} \right)^2$$

– производная Шварца [1], представляет большой интерес как для физики, так и для математики. Это уравнение было введено Кричевером и Новиковым [2] и Вейссом [3] и является некоторым вариантом уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ), который инвариантен относительно преобразования Мёбиуса, т.е. группы $PSL(2)$.

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, P.O.BOX 40, 11510 Puerto Real, Cádiz, Spain. E-mail: marialuz.gandarias@uca.es, matematicas.casem@uca.es

В контексте интегрируемых $(2 + 1)$ -мерных уравнений, т.е. интегрируемых уравнений с двумя пространственными и одной временной переменными, Кудряшов и Пикеринг [4], а также Тода и Ю [5], используя метод Калоджеро, вывели модель

$$W_t + \frac{1}{4}W_{xxz} - \frac{W_x W_{xz}}{2W} - \frac{W_{xx} W_z}{4W} + \frac{W_x^2 W_z}{2W^2} - \frac{W_x}{8} \left(\partial_x^{-1} \left(\frac{W_x^2}{W^2} \right) \right)_z = 0, \quad (1)$$

где обозначено $\partial_x^{-1} f = \int f dx$.

Уравнение (1) инвариантно относительно преобразования Мёбиуса и для решений вида $W(x, z, t) = \bar{W}(x + z, t)$ сводится к уравнению ШКдФ. В работе [5] была представлена соответствующая пара Лакса и было доказано, что она проходит тест Пенлеве в смысле метода Вайсса–Табора–Карневале [6].

В последние годы наблюдался постоянный интерес к вопросам, связанным с неклассическими и слабыми симметриями. Обзоры соответствующих исследований даны Олвером и Воробьевым [7] и Кларксоном [8].

Ключевым вопросом работы Олвера и Росенау [9], по-видимому, является вопрос о том, могут ли методы редукции быть унифицированы в рамках концепции дифференциальных уравнений с *дополнительным условием*. Олвер и Росенау [10] ввели понятие, названное ими “группами слабой симметрии”. Группа слабой симметрии G для системы Δ – это группа, которая не преобразует более решения в решения, а вместо этого обладает тем свойством, что G -инвариантные решения системы Δ находятся из редуцированной системы дифференциальных уравнений, содержащих меньшее число независимых переменных, чем исходная система Δ . Обнаружилось, что неклассический метод Блумэна и Коула является частным случаем подхода, основанного на понятии групп слабой симметрии. Удивительным, по меньшей мере вначале, кажется то обстоятельство, что любое решение системы Δ может быть получено как решение, инвариантное относительно некоторой группы слабой симметрии, и что более или менее все группы являются группами слабой симметрии.

Воробьев [11] провел исследование неклассических инфинитезимальных слабых симметрий, введенных Олвером и Росенау, а также неполных симметрий, введенных им самим. Для семейства нелинейных уравнений теплопроводности вида $u_t = (k(u)u_x)_x + q(u)$ он указал такие пары функций $(k(u), q(u))$, что соответствующие уравнения допускают нетривиальные двумерные модули неполных симметрий, которые приводят к явным решениям.

Джамай и Воробьев [12] проанализировали неклассические инфинитезимальные слабые симметрии дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), предложенные Олвером и Росенау. Для случая ДУЧП с двумя независимыми переменными они показали, что получение таких симметрий эквивалентно получению двумерных модулей неклассических неполных симметрий.

Центральным вопросом работы [13] является вопрос о том, какие дополнительные условия допустимы и позволяют получить классические решения для данных дифференциальных уравнений. Работа показала, что слабые симметрии представляют не только академический интерес, но необходимы для нахождения всех решений уравнений Навье–Стокса, получаемых методом частичного обращения.

В работе [14] представлен обзор различных обобщений классических симметрий Ли: условные симметрии, неполные симметрии и λ -симметрии вместе с соответствующими критериями и процедурами. Были рассмотрены “слабые” и “сильные”

классические и условные симметрии и предложены неполные и слабые условные λ -симметрии. Автор также рассмотрел связи между λ -симметриями и условными и классическими симметриями. Были приведены простые примеры симметрий каждого типа. В частности, был дан пример симметрии, которая может рассматриваться и как слабая условная симметрия, и как неполная симметрия для одного и того же уравнения, при этом разным типам симметрии отвечают различные множества решений.

С помощью преобразований

$$W = \phi_x, \quad \phi = e^\psi, \quad \psi_x = u, \quad \psi_t = v \quad (2)$$

уравнение (1) может быть представлено в виде системы

$$\begin{aligned} 4u^2v_x - 4uu_xv + u^2u_{xxz} - uu_{xx}u_z - 3uu_xu_{xz} + 3u_x^2u_z - u^4u_z &= 0, \\ u_t - v_x &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Эта система была исследована в работе [15] с помощью классического метода групп Ли инфинитезимальных преобразований, а в работе [16] – с использованием неклассического метода.

Уравнение (1) возникает в нелокальной форме, однако может также быть записано в следующем локальном виде:

$$\begin{aligned} \Delta \equiv & 8 \frac{u_{tx}}{u_x} - 8 \frac{u_t u_{xx}}{u_x^2} + 2 \frac{u_{xxxz}}{u_x} - 2 \frac{u_{xx} u_{xxz}}{u_x^2} - 4 \frac{u_{xxz}}{u} + 6 \frac{u_x u_{xz}}{u^2} - \\ & - 2 \frac{u_z u_{xxx}}{u u_x} - 2 \frac{u_{xx} u_{xz}}{u u_x} + 2 \frac{u_z u_{xx}^2}{u u_x^2} + 6 \frac{u_z u_{xx}}{u^2} - 6 \frac{u_z u_x^2}{u^3} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В настоящей работе мы сконцентрируем свое внимание на получении таких решений уравнения (1), которые не могут быть получены ни с помощью классического метода групп Ли преобразований [15], ни с помощью неклассического метода Бламэна и Коула [17]. Мы используем метод слабых симметрий, предложенный Олвером и Росенау [9], [10]. Такой подход заключается в вычислении симметрий уравнения (4), дополненного некоторыми дифференциальными ограничениями, выбранными так, чтобы ослабить критерий инвариантности для основной системы и обеспечить существование более широких точечных групп Ли симметрий для расширенной системы.

2. СЛАБЫЕ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ШКДФ В РАЗМЕРНОСТИ $2 + 1$

Чтобы построить новые решения уравнения (1), получим слабые симметрии уравнения ШКДФ (4). Порядок действий следующий. Добавим к ДУЧП некоторое дополнительное условие. Потребовав, чтобы как уравнение (4), так и дополнительное условие были инвариантны относительно однопараметрической группы Ли инфинитезимальных преобразований в пространстве переменных (x, t, z, u) , заданных формулами

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon \xi(x, z, t, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ z^* &= z + \varepsilon \eta(x, z, t, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ t^* &= t + \varepsilon \tau(x, z, t, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ u^* &= u + \varepsilon \phi(x, z, t, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5)$$

где ε – параметр группы, получаем переопределенную нелинейную систему уравнений для инфинитезимальных элементов $\xi(x, z, t, u)$, $\eta(x, z, t, u)$, $\tau(x, z, t, u)$ и $\phi(x, z, t, u)$.

Для применения метода на практике мы использовали пакет программ MACSYMA `symmgrp.max` [18].

Мы реализуем процедуру с двумя различными типами дополнительных условий. В первом случае мы рассматриваем дополнительное условие первого порядка, а во втором – дополнительное условие второго порядка.

Редукция 1. Применение классического метода к уравнению (4) и дополнительному условию

$$\alpha(x, z, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, z, t, u) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} - \Psi(x, z, t, u) = 0 \quad (6)$$

дает систему из 23 уравнений для инфинитезимальных элементов $\xi(x, z, t, u)$, $\eta(x, z, t, u)$, $\tau(x, z, t, u)$ и $\phi(x, z, t, u)$ и функций $\alpha(x, z, t, u)$, $\beta(x, z, t, u)$ и $\Psi(x, z, t, u)$. Из этой системы получаем, что $\xi = \gamma(t)x + \zeta(t)$, $\eta = \eta(t, z)$, $\tau = \tau(t)$, $\phi = r(z, t)u$ и что функции γ , η , τ , ζ , r , α , β и Ψ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \beta_x \gamma x + \beta_u r u + \beta_x \zeta + 2\beta \gamma + \beta_t \tau + \beta_z \eta &= 0, \\ \beta_{xx} \gamma x + \beta_{ux} r u + \beta_{xx} \zeta + 3\beta_x \gamma + \beta_{tx} \tau + \beta_{zx} \eta &= 0, \\ \beta_{ux} \gamma x + \beta_{uu} r u + \beta_u r + \beta_{ux} \zeta + 2\beta_u \gamma + \beta_{tu} \tau + \beta_{uz} \eta &= 0, \\ \alpha_{ux} \gamma x + \alpha_{uu} r u + \alpha_u r + \alpha_{ux} \zeta + \alpha_u \gamma + \alpha_{tu} \tau + \alpha_u \eta_z + \alpha_{uz} \eta &= 0, \\ \gamma \Psi_x x - \beta_r z u + \Psi_u r u - \psi r + \eta \Psi_z + \zeta \Psi_x + \tau \Psi_t + 2\gamma \psi + \eta_z \psi &= 0, \\ \gamma \Psi_{xx} x - \beta_x r z u + \Psi_{ux} r u - \Psi_x r + \zeta \Psi_{xx} + \eta \Psi_{xz} + 3\gamma \Psi_x + \eta_z \Psi_x + \tau \Psi_{tx} &= 0, \\ \Psi_{ux} x \gamma - \alpha_{xx} x \gamma + 2\Psi_u \gamma - 2\alpha_x \gamma + \Psi_{ux} \zeta - \alpha_{xx} \zeta + r \Psi_{uu} u - \beta_u r z u - \alpha_{ux} r u + \\ + \eta \Psi_{uz} + \eta_z \Psi_u + \tau \Psi_{tu} - \beta_r z - \alpha_{tx} \tau - \alpha_x \eta_z - \alpha_{xz} \eta &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы в общем случае очень сложно. Однако если $\alpha = \alpha(t)$ и $\psi = 0$, то одно решение характеристических уравнений есть

$$\xi = \zeta(t), \quad \eta = \eta(z, t), \quad \tau = 1, \quad \phi = 0, \quad (7)$$

где ζ и η – произвольные функции, а функция $\beta(z, t)$ должна удовлетворять уравнению $\beta_t + \eta \beta_z = 0$.

Равенства (7) позволяют легко проверить, что эти инфинитезимальные элементы не удовлетворяют неклассическим определяющим уравнениям. Разрешая соответствующее поверхностное условие, получаем редукции симметрии

$$w_1 = x - \int \zeta(t) dt, \quad w_2 = w_2(t, z), \quad u = f(w_1, w_2), \quad (8)$$

где функция η удовлетворяет уравнению $w_{2,t} + \eta w_{2,z} = 0$, а функция f удовлетворяет следующей $(1+1)$ -мерной системе ДУЧП:

$$\begin{aligned} -f^2 f_{w_2} f_{w_1} f_{w_1 w_1} + f^2 f_{w_2} f_{w_1 w_1}^2 + 3f f_{w_2} f_{w_1}^2 f_{w_1 w_1} - f^2 f_{w_2 w_1} f_{w_1} f_{w_1 w_1} - \\ - f^3 f_{w_1 w_1} f_{w_1 w_1} - 3f_{w_2} f_{w_1}^4 + 3f f_{w_2 w_1} f_{w_1}^3 - 2f^2 f_{w_2 w_1} f_{w_1}^2 + \\ + f^3 f_{w_2 w_1 w_1} f_{w_1} = 0, \\ 4f^3 f_{w_2 w_1} f_{w_1} - 4f^3 f_{w_2} f_{w_1 w_1} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Редукция 1.1. Редуцированная система ДУЧП (9) в пространстве $1 + 1$ переменных инвариантна относительно трансляций и допускает дальнейшие редукции к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В результате получаем переменные

$$\vartheta = w_1 + w_2, \quad f = g(\vartheta) \quad (10)$$

и автономное ОДУ

$$-g^3 g' g'''' + g^3 g'' g''' + 3g^2 (g')^2 g''' - 6g (g')^3 g'' + 3(g')^5 = 0. \quad (11)$$

Делением на $g^2 (g')^2$, однократным интегрированием по переменной ϑ и последующим умножением на $g^{-2} g'$ уравнение (11) может быть сведено к ОДУ второго порядка

$$g'' = \frac{3}{2} \frac{(g')^2}{g} - k_2 g + k_1, \quad (12)$$

где k_1 и k_2 – произвольные постоянные.

Умножая уравнение (12) на $g^{-3} g'$ и интегрируя один раз по переменной ϑ , получаем

$$(g')^2 = -2k_2 g^2 + k_1 g + 2k_3 g^3. \quad (13)$$

Интегрирование может быть доведено до конца в эллиптических функциях.

Редукция 1.2. Редуцированная система ДУЧП (9) в пространстве $1 + 1$ переменных инвариантна относительно скейлинговой группы и допускает дальнейшие редукции к системе ОДУ. Имеем

$$\vartheta = w_2^n w_1, \quad f = w_2^m g \quad (14)$$

и систему ОДУ

$$\begin{aligned} g^3 g' g'''' \vartheta - g^3 g'' g''' \vartheta - 3g^2 (g')^2 g''' \vartheta + 6g (g')^3 g'' \vartheta - 3(g')^5 \vartheta + 3g^3 g' g''' - \\ - 2g^3 (g'')^2 - 5g^2 (g')^2 g'' + 3g (g')^4 = 0, \\ m g g'' - (m + n)(g')^2 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Редукция 2. Применение классического метода к уравнению (4) и дополнительным условиям

$$\beta \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x \partial z} = 0$$

дает систему из 10 уравнений для инфинитезимальных элементов $\xi(x, z, t, u)$, $\eta(x, z, t, u)$, $\tau(x, z, t, u)$ и $\phi(x, z, t, u)$ и функции $\beta(x, z, t, u)$. Из этой системы получаем, что

$$\xi = \gamma(z, t)x + \zeta(z, t), \quad \eta = \eta(z, t), \quad \tau = \tau(x, z, t, u), \quad \phi = \rho(z, t)u^3 + \delta(z, t)u,$$

где β , γ , τ , ζ , ρ , δ и η суть функции, которые должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} -\beta_x u x \gamma - 2\beta u \gamma - \beta_x u \zeta - \beta_u \rho u^4 + 2\beta \rho u^3 - \beta_u \delta u^2 - \beta_t \tau u - \beta_z \eta u = 0, \\ \beta_{ux} u x \gamma + 2\beta_u u \gamma + \beta_{ux} u \zeta + \beta_{uu} \rho u^4 + \beta_u \rho u^3 + 6\beta \rho u^2 + \beta_{uu} \delta u^2 + \beta_{tu} \tau u + \\ + \beta_{uz} \eta u + \beta_u \delta u = 0, \\ -\beta_{xx} u x \gamma - 3\beta_x u \gamma - \beta_{xx} u \zeta - \beta_{ux} \rho u^4 + 2\beta_x \rho u^3 - \beta_{ux} \delta u^2 - \beta_{tx} \tau u - \beta_{xz} \eta u = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Мы не можем решить систему (16) в общем случае по причине ее сложности. Однако если $\beta = \beta(z, t)$, то решение имеет вид

$$\xi = \xi(z, t), \quad \eta = \eta(z, t), \quad \tau = 1, \quad \phi = \delta(z)u.$$

Разрешая соответствующее поверхностное условие, получаем

$$w_1 = x + b(z, t), \quad w_2 = a(t, z), \quad u = \rho(z)f(w_1, w_2),$$

что приводит к следующей системе ДУЧП двух независимых переменных, в которой $a_t - k_1 a^2 a_z = 0$, а $\rho = \rho(z)$ и $b = b(z, t)$ – произвольные функции:

$$\begin{aligned} & f^3 f_{w_1} f_{w_1 w_1 w_1 w_1} - f^3 f_{w_1 w_1} f_{w_1 w_1 w_1} - 3f^2 f_{w_1}^2 f_{w_1 w_1 w_1} + 6f f_{w_1}^3 f_{w_1 w_1} - 3f_{w_1}^5 = 0, \\ & -4k_1 f^3 f_{w_1 w_1} f_{w_2} w_2^2 + 4k_1 f^3 f_{w_1} f_{w_1 w_2} w_2^2 - f^2 f_{w_1} f_{w_1 w_1 w_1} f_{w_2} + f^2 f_{w_1 w_1}^2 f_{w_2} + \\ & + 3f f_{w_1}^2 f_{w_1 w_1} f_{w_2} - 3f_{w_1}^4 f_{w_2} + f^3 f_{w_1} f_{w_1 w_1 w_1 w_2} - f^3 f_{w_1 w_1} f_{w_1 w_1 w_2} - \\ & - 2f^2 f_{w_1}^2 f_{w_1 w_1 w_2} - f^2 f_{w_1} f_{w_1 w_2} f_{w_1 w_1} + 3f f_{w_1}^3 f_{w_1 w_2} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Редукция 2.1. Система (17) инвариантна относительно скейлинговой группы. Следовательно, решая характеристическое уравнение, мы получаем редукцию симметрии

$$\vartheta = w_1 w_2, \quad f = h(\vartheta),$$

что дает следующую систему ОДУ:

$$\begin{aligned} & h^3 h' h'''' - h^3 h'' h''' - 3h^2 h'^2 h''' + 6h h'^3 h'' - 3h'^5 = 0, \\ & 3h^2 h' h''' - 2h^2 h''^2 - 5h h'^2 h'' + 3h'^4 + 4k_1 h^2 h'^2 = 0. \end{aligned}$$

Проинтегрировав первое уравнение один раз по переменной ϑ и сделав замену переменной $h'/h = g$, получаем систему ОДУ второго порядка:

$$\begin{aligned} & gg'' - g'^2 - \frac{g^4}{4} + k_2 = 0, \\ & 3gg'' - 2g'^2 - g^4 + 4k_1 g^2 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Редукция 2.2. Система (17) инвариантна относительно скейлинговой группы. Следовательно, решая характеристическое уравнение, получаем редукцию симметрии

$$\vartheta = w_1 w_2, \quad f = \frac{1}{w_2} h(\vartheta),$$

что дает следующую систему ОДУ:

$$\begin{aligned} & h^3 h' h'''' - h^3 h'' h''' - 3h^2 (h')^2 h''' + 6h (h')^3 h'' - 3(h')^5 = 0, \\ & 3h^2 h' h''' - 2h^2 (h'')^2 + 4k_1 h^3 h'' - 5h (h')^2 h'' + 3(h')^4 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Сделав замену переменной $h_\vartheta/h = g$ и проинтегрировав один раз по переменной ϑ , получаем систему

$$\begin{aligned} & gg'' - g'^2 - \frac{g^4}{4} + k_2 = 0, \\ & 3gg'' - 2g'^2 - 4k_1 n g' - g^4 + 4k_1 g^2 = 0. \end{aligned}$$

3. НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Представим далее некоторые точные решения ОДУ второго порядка, а также соответствующие решения уравнения ШКдФ в размерности $2 + 1$.

Редукция 1.1. Уравнение (11) может быть проинтегрировано в эллиптических функциях:

$$g_1 = \operatorname{sn}^{\pm 2}(\vartheta \mid m), \quad g_2 = \operatorname{cn}^{\pm 2}(\vartheta \mid m), \quad g_3 = \operatorname{dn}^{\pm 2}(\vartheta \mid m). \quad (20)$$

Ясно, что любое вырождение (рациональное, гиперболическое или тригонометрическое) эллиптических функций также дает решение уравнения (11):

$$\begin{aligned} g &= \frac{k_1}{k_2} \operatorname{th}^{\pm 2} \left(\frac{\sqrt{-k_2} \vartheta}{2} \right), & g &= -\frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg}^{\pm 2} \left(\frac{\sqrt{k_2} \vartheta}{2} \right), & g &= -\frac{k_1}{2k_2} \operatorname{sh}^{\pm 2} \left(\frac{\sqrt{k_2} \vartheta}{\sqrt{2}} \right), \\ g &= \frac{k_1}{2k_2} \operatorname{ch}^{\pm 2} \left(\frac{\sqrt{k_2} \vartheta}{\sqrt{2}} \right), & g &= \frac{k_1}{2k_2} \operatorname{sin}^{\pm 2} \left(\frac{\sqrt{-k_2} \vartheta}{\sqrt{2}} \right), & g &= \frac{k_1}{2k_2} \operatorname{cos}^{\pm 2} \left(\frac{\sqrt{-k_2} \vartheta}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$g = k_3 \vartheta^{\pm 2}, \quad g = k_4 e^{\pm \sqrt{2k_2} \vartheta}.$$

Рассмотрев соответствующие редукции симметрии (8) и (10), получаем, что точные решения уравнения (1) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sn}^{\pm 2}(x + a(z, t) + \delta(t) \mid m), & u &= \operatorname{dn}^{\pm 2}(x + a(z, t) + \delta(t) \mid m), \\ u &= \operatorname{sn}^{\pm 2}(x + a(z, t) + \delta(t) \mid m), \end{aligned} \quad (22)$$

где $a(z, t) = w_2(z, t)$ и $\delta(t) = -\int \zeta(t) dt$,

$$\begin{aligned} u &= \frac{k_1 \rho(z)}{k_2} \operatorname{th}^{\pm 2} \left(\frac{\sqrt{-k_2} (x + a(z, t) + \delta(t))}{2} \right), \\ u &= -\frac{k_1 \rho(z)}{k_2} \operatorname{tg}^{\pm 2} \left(\frac{\sqrt{k_2} (x + a(z, t) + \delta(t))}{2} \right), \\ u &= k_3 \rho(z) \operatorname{sch}^{\pm 2} \left(\frac{\sqrt{k_2} (x + a(z, t) + \delta(t))}{\sqrt{2}} \right), \\ u &= k_3 \rho(z) \operatorname{csch}^{\pm 2} \left(\frac{\sqrt{k_2} (x + a(z, t) + \delta(t))}{\sqrt{2}} \right), \\ u &= k_3 \rho(z) \operatorname{sec}^{\pm 2} \left(\frac{\sqrt{-k_2} (x + a(z, t) + \delta(t))}{\sqrt{2}} \right), \\ u &= k_3 \rho(z) \operatorname{cosec}^{\pm 2} \left(\frac{\sqrt{-k_2} (x + a(z, t) + \delta(t))}{\sqrt{2}} \right), \\ u &= k_3 \rho(z) (x + a(z, t) + \delta(t))^{\pm 2}, \\ u &= \rho(z) e^{\sqrt{-2k_1} (x + a(z, t) + \delta(t))}. \end{aligned} \quad (23)$$

Редукция 1.2. Совместность уравнений системы (15) предполагает выполнение условия $m = \pm 2n$, следовательно, ее решения суть

$$g = k_1(\vartheta + k_2)^{\pm 2},$$

а решения уравнения (1) суть

$$u = k_1 \left(\frac{a^n(x - \delta) + k_2}{a^n} \right)^{\pm 2}.$$

Редукция 2.1. Имеем следующие решения системы (18):

- 1) если $k_2 = 0$, то $g = 4\sqrt{k_1} \operatorname{cosec}(2\sqrt{k_1} \vartheta)$, $g = 4\sqrt{-k_1} \operatorname{csch}(2\sqrt{-k_1} \vartheta)$;
- 2) если $k_2 = 4k_1^2$ и $k_1 = k^2/4$, то $g = k$.

Из условия $h'/h = g$ получаем соответственно

$$h = c \operatorname{tg}^{\pm 2}(\sqrt{k_1} \vartheta), \quad h = c \operatorname{th}^{\pm 2}(\sqrt{-k_1} \vartheta), \quad h = ce^{\pm k \vartheta}.$$

В результате имеем следующие решения уравнения (1):

$$\begin{aligned} u &= \rho(z) \operatorname{tg}^{\pm 2}(a(z, t) \sqrt{k_1} (x + b(z, t))), & u &= \rho(z) \operatorname{th}^{\pm 2}(a(z, t) \sqrt{-k_1} (x + b(z, t))), \\ u &= e^{\pm 2\sqrt{k_1} a(z, t)(x + b(z, t))}, \end{aligned}$$

где функция $a = w_2$ и удовлетворяет волновому уравнению Римана $a_t - k_1 a^2 a_z = 0$, а $\rho = \rho(z)$ и $b = b(z, t)$ – произвольные функции.

Мы видим, что функция $b = b(z, t)$ определяет смещение волны, функция $\rho = \rho(z)$ модулирует амплитуду волны, а функция $a = a(z, t)$ – ее скорость.

Редукция 2.2. Имеем следующие решения системы (19):

$$h = \sin(2\sqrt{-k_1} \vartheta) \pm 1, \quad h = \cos^{\pm 2}(\sqrt{-k_1} \vartheta), \quad h = \operatorname{ch}^{\pm 2}(\sqrt{k_1} \vartheta).$$

Решения уравнения (1) имеют вид соответственно

$$\begin{aligned} u &= \frac{\rho(z) \sin(2\sqrt{-k_1} a(z, t)(x + b(z, t)) \pm 1)}{a(z, t)}, \\ u &= \frac{\rho(z) \cos^{\pm 2}(\sqrt{-k_1} a(z, t)(x + b(z, t)))}{a(z, t)}, \\ u &= \frac{\rho(z) \operatorname{ch}^{\pm 2}(\sqrt{k_1} a(z, t)(x + b(z, t)))}{a(z, t)}, \end{aligned}$$

где функция $a = w_2$ и является произвольным решением волнового уравнения Римана $a_t - k_1 a^2 a_z = 0$.

Мы видим, что функция $b = b(z, t)$ определяет смещение волны, а функция $a = a(z, t)$ модулирует амплитуду и скорость волны.

На рис. 1 представлено решение

$$u = \operatorname{sch}^2 \left(x + \sin \left(\frac{z^2 t^2}{4} \right) \right) \quad (24)$$

Рис. 1. Решение (24) в моменты времени $t = 1$ (а) и $t = 2$ (б).

для моментов времени $t = 1$ и $t = 2$, соответственно. Видно, что это решение эволюционирует без ограничений на $x = b(z, t)$; решение такого рода не может быть получено ни классическим методом Ли, ни с помощью неклассического метода.

На рис. 2 представлено решение

$$u = \operatorname{sch}^2(z) \operatorname{th}^2\left(x + \sin^2\left(\frac{z^2 t^2}{4}\right)\right) \quad (25)$$

для момента времени $t = 1$ и соответствующие профили сечения $x = 0$ в моменты времени $t = 1$ и $t = 2$, отражающие эволюцию во времени.

Рис. 2. Решение (25) в момент времени $t = 1$ (а) и соответствующие профили сечения $x = 0$ в моменты времени $t = 1$ (сплошная кривая) и $t = 2$ (штриховая кривая) (б).

На рис. 3 представлено решение

$$u = \rho(z) \operatorname{sch}^2(x + 0.2 \operatorname{th} z + 0.2 \operatorname{th}(z + 6) - 0.1 \operatorname{th}(z - 8) + \sin t), \quad (26)$$

где $\rho(z) = 0.2 \operatorname{sch}^2 z + 0.2 \operatorname{sch}^2(z + 6) - 0.1 \operatorname{sch}^2(z - 8)$ для момента времени $t = -2$ и соответствующие профили сечения $x = 0$ в моменты времени $t = -2$ и $t = 2$, которые отражают эволюцию во времени.

На рис. 4 представлено решения Якоби

$$u = \operatorname{sn}^2\left(x + z^2 t \mid \frac{1}{3}\right) \quad (27)$$

для моментов времени $t = 0.5$ и $t = 2$.

Рис. 3. Решение (26): три дромииона в момент времени $t = -2$ (а) и соответствующие профили сечения $x = 0$ в моменты времени $t = -2$ (штриховая кривая) и $t = 2$ (сплошная кривая) (б).

Рис. 4. Решение Якоби (27) для моментов времени $t = 0.5$ (а) и $t = 2$ (б).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было рассмотрено $(2 + 1)$ -мерное интегрируемое уравнение ШКдФ. С помощью слабых симметрий и последующих редукций были выведены ОДУ второго порядка, которые позволили получить новые решения, выражающиеся через известные функции.

Соответствующие решения уравнения (1) зависят от двух произвольных функций $\rho = \rho(z)$, $b = b(z, t)$ и от произвольного решения $a = a(z, t)$ волнового уравнения Римана $a_t - k_1 a^2 a_z = 0$. Таким образом, некоторые из найденных решений уравнения ШКдФ демонстрируют весьма разнообразное качественное поведение: наиболее интересными среди них являются солитонные и дромиионные решения. Мы видели, что произвольная функция $b = b(z, t)$ определяет для этих решений смещение волны, а произвольное решение волнового уравнения Римана модулирует амплитуду волны и ее скорость. Данные решения уравнения (1) не могут быть получены ни классическим методом групп Ли преобразований [15], ни с помощью неклассического метода Бламэна и Коула [16].

Список литературы

- [1] E. Hille, *Analytic Function Theory*, v. II, Ginn, Boston–New York–Chicago, 1962; H. Schwerdtfeger, *Geometry of Complex Numbers. Circle Geometry, Moebius Transformation, non-Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1979.
- [2] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *УМН*, **35**:6 (1980), 47.
- [3] J. Weiss, *J. Math. Phys.*, **24** (1983), 1405.
- [4] N. Kudryashov, P. Pickering, *J. Phys. A*, **31** (1998), 9505.
- [5] K. Toda, S. Yu, *J. Math. Phys.*, **41** (2000), 4747.
- [6] J. Weiss, J. M. Tabor, G. Carnevale, *J. Math. Phys.*, **24** (1983), 522.
- [7] P. J. Olver, E. M. Vorob'ev, "Nonclassical and conditional symmetries", *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, v. 3, ed. N. H. Ibragimov, CRC, Boca Raton, FL, 1996, 291.
- [8] P. A. Clarkson, *Chaos Solitons Fractals*, **5** (1995), 2261.
- [9] P. J. Olver, P. Rosenau, *Phys. Lett. A*, **144** (1986), 107.
- [10] P. J. Olver, P. Rosenau, *SIAM J. Appl. Math.*, **47** (1987), 263.
- [11] E. M. Vorob'ev, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **3** (1996), 330.
- [12] A. V. Dzhamay, E. M. Vorob'ev, *J. Phys. A*, **27** (1994), 5541.
- [13] G. Saccomandi, *Note Mat.*, **23**:2 (2004), 217.
- [14] G. Cicogna, *Note Mat.*, **23**:2 (2005), 15.
- [15] J. Ramirez, M. S. Bruzon, C. Muriel, M. L. Gandarias, *J. Phys. A*, **36** (2003), 1467.
- [16] J. Ramirez, J. L. Romero, M. S. Bruzón, M. L. Gandarias, *Chaos Solitons Fractals*, **32** (2007), 682.
- [17] G. W. Bluman, J. D. Cole, *J. Math. Mech.*, **18** (1969), 1025.
- [18] B. Champagne, W. Hereman, P. Winternitz, *Comput. Phys. Comm.*, **66** (1991), 319.