Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Герджиков, Е. В. Докторов, Н. П. Мацука, N -солитонная цепочка и обобщенная комплексная цепочка Тоды для системы Манакова, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 3, 391–404

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6054>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 05:26:33

© 2007 г. В. С. Герджиков*, Е. В. Докторов†, Н. П. Мацука‡

N -СОЛИТОННАЯ ЦЕПОЧКА И ОБОБЩЕННАЯ КОМПЛЕКСНАЯ ЦЕПОЧКА ТОДЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАНАКОВА

Исследуется динамическое поведение N -солитонной цепочки для системы Манакова и для векторного нелинейного уравнения Шредингера в адиабатическом приближении. Доказано, что в обоих случаях динамика N -солитонной цепочки описывается обобщенным вариантом модели комплексной цепочки Тоды. Это обстоятельство может быть использовано для предсказания асимптотических режимов N -солитонной цепочки при условии, что заданы начальные параметры солитонов.

Ключевые слова: комплексная цепочка Тоды, модель Манакова, адиабатическая динамика, векторная солитонная цепочка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Получение как можно более плотной упаковки солитонов для достижения высокой скорости передачи информации представляет собой важную проблему в ориентированных на использование солитонов системах связи [1]. В результате воздействия соседних солитонов друг на друга они могут оказаться вне надлежащего временного окна при их регистрации. На примере солитонов скалярного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) было установлено (как численно [2], так и экспериментально [3]), что для некоторых способов выбора параметров солитонов существует возможность значительно подавить указанное солитонное взаимодействие. В адиабатическом приближении теории возмущений для солитонов НУШ проблема оптимального выбора солитонных параметров решается аналитически на основе модели комплексной цепочки Тоды (КЦТ). А именно, обобщение квазичастичного подхода Карпмана–Соловьева [4] на случай цепочки N слабо взаимодействующих

*Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, 1784 Sofia, Bulgaria.
E-mail: gerdjikov@inrne.bas.bg

†Институт физики им. В. И. Степанова, 220072, Минск, Белоруссия.
E-mail: doktorov@dragon.bas-net.by

‡Институт математики НАН Белоруссии, 220072, Минск, Белоруссия.
E-mail: matsuka@im.bas-net.by

солитонов НУШ приводит к $4N$ -мерной динамической системе эволюционных уравнений для солитонных параметров [5]. При некоторых дополнительных предположениях эта динамическая система сводится к вполне интегрируемой модели КЦТ с N узлами [6]. Этот подход был распространен на некоторые другие нелинейные эволюционные уравнения, в числе которых модифицированное НУШ [7], массивная модель Тирринга [8], система Абловица–Ладика [9] и другие, что дает веские основания считать КЦТ универсальной моделью для солитонных конфигураций типа цепочек. Возможность вывести модель КЦТ для динамики солитонных цепочек с помощью метода Лагранжа представляет собой дополнительный аргумент в пользу такой универсальности [10].

Новые характерные черты поведения солитонов внутри цепочек появляются в случае векторных солитонов. Действительно, оптические волокна являются двулучепреломляющими, и импульсы распространяются вдоль волокна с различными скоростями по двум ортогональным направлениям поляризации. Усредняя флуктуации двулучепреломления, вызванные случайными изгибами и скручиванием волокна, а также воздействием окружающей среды, и пренебрегая дисперсией поляризационных мод, мы приходим к системе Манакова для моделирования динамики векторных солитонов [11]

$$\begin{aligned} iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + (|u|^2 + |v|^2)u &= 0, \\ iv_t + \frac{1}{2}v_{xx} + (|u|^2 + |v|^2)v &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u и v – поляризационные составляющие медленно меняющейся огибающей, а также приняты математически более удобные обозначения для координат: t и x (вместо принятых в физике z и t). Солитонное решение системы (1) хорошо известно:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 2\nu \begin{pmatrix} e^{i\chi^{(1)}} \cos \theta \\ e^{i\chi^{(2)}} \sin \theta \end{pmatrix} e^{2i\mu(x-\xi)} \operatorname{sch}(2\nu(x-\xi)), \quad (2)$$

где

$$\xi = 2\mu t + \xi^{(0)}, \quad \chi^{(j)} = 2\mu\xi - 2(\mu^2 - \nu^2)t + \delta^{(j)}.$$

Вещественные параметры μ и ν определяют соответственно скорость и амплитуду солитона, через $\xi^{(0)}$ и $\delta^{(j)}$ обозначены начальное положение солитона и его фазы, θ – угол поляризации.

Типичный случай N солитонов, движущихся с попарно различными скоростями (и поэтому являющихся асимптотически свободными при $|x| \rightarrow \pm\infty$), допускает полностью аналитическое описание в рамках метода обратной спектральной задачи [11]–[13]. Нам, однако, предстоит иметь дело с конфигурацией типа цепочки, состоящей из упорядоченной последовательности N слабо взаимодействующих солитонов с равными или почти равными амплитудами и скоростями, расстояния между которыми практически одинаковы. Мы намерены вывести некоторую модель КЦТ для векторных солитонов и исследовать различные асимптотические режимы эволюции цепочек.

Случай двух взаимодействующих солитонов Манакова был рассмотрен Янгом [14]. Он исследовал зависимость радиуса взаимодействия солитонов от состояния их поляризации друг относительно друга. В этой связи следует подчеркнуть, что поскольку динамическая система Карпмана–Соловьева является нелинейной, то для нее не выполняется принцип суперпозиции. Поэтому поведение цепочки с $N \geq 3$ солитонами невозможно описать на основе двухсолитонного взаимодействия.

2. ВОЗМУЩЕННАЯ СИСТЕМА МАНАКОВА: ПОДХОД КАРПМАНА–СОЛОВЬЕВА

Предположим, что N -солитонное решение системы Манакова (1) для солитонной цепочки определяется последовательностью начальных односолитонных импульсов с перекрывающимися хвостами

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x, 0) = \sum_{k=1}^N 2\nu_k \begin{pmatrix} e^{i(2\mu_k \xi_k^{(0)} + \delta_k^{(1)})} \cos \theta_k \\ e^{i(2\mu_k \xi_k^{(0)} + \delta_k^{(2)})} \sin \theta_k \end{pmatrix} e^{2i\mu_k(x - \xi_k^{(0)})} \operatorname{sch}(2\nu_k(x - \xi_k^{(0)})).$$

Каждый солитон характеризуется представленным выше множеством параметров, которое мы снабдим индексом k (номером солитона). Малость величины перекрытия соседних солитонов определяется параметром

$$\epsilon = \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx u_k^\dagger(x) u_n(x) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{4\nu_k \nu_n e^{i(\phi_n - \phi_k)}}{\operatorname{ch} z_k \operatorname{ch} z_n} \right| \simeq 8\nu_0 \Delta_{kn} e^{-\Delta_{kn}}, \quad (3)$$

где $n = k \pm 1$, ν_0 – среднее значение амплитуд солитонов, $\nu_0 = (1/N) \sum_k \nu_k$ и $\Delta_{k,n} = 2\nu_0 |\xi_k^{(0)} - \xi_n^{(0)}|$. При выводе формулы (3) была использована асимптотическая формула для функции $K(0, \Delta)$ при больших Δ (см. приложение). Ограничимся учетом взаимодействия между ближайшими соседями и будем считать, что сила взаимодействия между соседними солитонами по порядку величины равна величине их перекрытия.

Следуя подходу Карпмана–Соловьева [4], можно выписать адиабатическое условие для солитонного взаимодействия в виде

$$\begin{aligned} |\nu_k - \nu_{k\pm 1}| &\ll \nu_0, & |\mu_k - \mu_{k\pm 1}| &\ll \nu_0, \\ \nu_0 |\xi_k - \xi_{k\pm 1}| &\gg 1, & |\nu_k - \nu_0| |\xi_k - \xi_{k\pm 1}| &\ll 1, \end{aligned} \quad (4)$$

обеспечивающем малость величины ϵ (3). В неравенствах (4) находит свое математическое выражение то обстоятельство, что мы рассматриваем эволюцию цепочки слабо перекрывающихся солитонов Манакова с (почти) равными амплитудами и малыми относительными скоростями.

Подставляя в систему (1) решение в виде суммы

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix},$$

мы видим, что k -й солитон удовлетворяет возмущенной системе Манакова

$$\begin{aligned} iu_{kt} + \frac{1}{2}u_{kxx} + (|u_k|^2 + |v_k|^2)u_k &= ir_k, \\ iv_{kt} + \frac{1}{2}v_{kxx} + (|u_k|^2 + |v_k|^2)v_k &= is_k, \end{aligned} \quad (5)$$

где возмущения

$$\begin{aligned} r_k &= i(u_{k-1} + u_{k+1})(2|u_k|^2 + |v_k|^2) + i(\bar{u}_{k-1} + \bar{u}_{k+1})u_k^2 + \\ &\quad + iu_k(v_{k-1}\bar{v}_k + \bar{v}_{k-1}v_k + v_k\bar{v}_{k+1} + \bar{v}_kv_{k+1}), \\ s_k &= i(v_{k-1} + v_{k+1})(2|v_k|^2 + |u_k|^2) + i(\bar{v}_{k-1} + \bar{v}_{k+1})v_k^2 + \\ &\quad + iv_k(u_{k-1}\bar{u}_k + \bar{u}_{k-1}u_k + u_k\bar{u}_{k+1} + \bar{u}_ku_{k+1}) \end{aligned} \quad (6)$$

определяются взаимодействием левого и правого соседних солитонов с k -м солитоном. Вызванная возмущениями эволюция параметров солитонов Манакова в адиабатическом приближении была получена ранее [15] и в нашем случае записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_k}{dt} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz_k \operatorname{sch} z_k \operatorname{th} z_k \operatorname{Im} R_k^{(+)}, \\ \frac{d\nu_k}{dt} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz_k \operatorname{sch} z_k \operatorname{Re} R_k^{(+)}, \\ \frac{d\theta_k}{dt} &= -\frac{1}{4\nu_k} \int_{-\infty}^{\infty} dz_k \operatorname{sch} z_k \operatorname{Re} R_k^{(-)} = O(\epsilon), \\ \frac{d\xi_k}{dt} &= 2\mu_k + O(\epsilon), \quad \frac{d\chi_k^{(j)}}{dt} = 2(\mu_k^2 + \nu_k^2) + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} z_k &= 2\nu_k(x - \xi_k), \quad R_k^{(+)} = R_k \cos \theta_k + S_k \sin \theta_k, \quad R_k^{(-)} = R_k \sin \theta_k - S_k \cos \theta_k, \\ R_k &= r_k \exp\left(-i\frac{\mu_k}{\nu_k}z_k - i\chi_k^{(1)}\right), \quad S_k = s_k \exp\left(-i\frac{\mu_k}{\nu_k}z_k - i\chi_k^{(2)}\right). \end{aligned}$$

Нет необходимости конкретизировать точный вид выражений $O(\epsilon)$, поскольку далее будет показано, что их вклад в окончательные выражения имеет более высокий порядок по ϵ .

Подставляя теперь солитонное решение (2), снабженное индексом k , в формулы для возмущений (6) и производя вычисления в соответствии с формулами (7), получаем эволюционные уравнения для скорости и амплитуды возмущенного k -го солитона:

$$\frac{d\mu_k}{dt} = -16\nu_0^3 \sum_{n=k\pm 1} s_{kn} e^{-\Delta_{kn}} P_{kn}^{(1)}, \quad \frac{d\nu_k}{dt} = 16\nu_0^3 \sum_{n=k\pm 1} s_{kn} e^{-\Delta_{kn}} P_{kn}^{(2)}, \quad (8)$$

где $s_{k,k+1} = -1$, $s_{k,k-1} = 1$,

$$\begin{aligned} P_{kn}^{(1)} &= \cos \theta_k \cos \theta_n \cos \alpha_{kn}^{(1)} + \sin \theta_k \sin \theta_n \cos \alpha_{kn}^{(2)}, \\ P_{kn}^{(2)} &= \cos \theta_k \cos \theta_n \sin \alpha_{kn}^{(1)} + \sin \theta_k \sin \theta_n \sin \alpha_{kn}^{(2)}, \\ \Delta_{kn} &= 2\nu_0 s_{kn} (\xi_k - \xi_n), \quad \alpha_{kn}^{(j)} = \chi_k^{(j)} - \chi_n^{(j)} - 2i\mu_0(\xi_k - \xi_n), \end{aligned}$$

а эволюция других параметров определяется формулами (7). Заметим, что нетрудно вывести и явные формулы для эволюции оставшихся солитонных параметров. Например, угол поляризации удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\theta_k}{dt} = -8\nu_0^2 \sum_{n=k\pm 1} s_{kn} e^{-\Delta_{kn}} P_{kn}^{(3)},$$

$$P_{kn}^{(3)} = \sin \theta_k \cos \theta_n \sin \alpha_{kn}^{(1)} - \cos \theta_k \sin \theta_n \sin \alpha_{kn}^{(2)}.$$

Однако, как уже утверждалось выше, их вклад пренебрежимо мал по сравнению с главным порядком по $\epsilon \sim e^{-\Delta_{kn}}$.

3. ВЫВОД МОДЕЛИ КЦТ

Введем величину $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k - (\mu_0 + i\nu_0)$, где μ_0 и ν_0 суть средние значения. Тогда из уравнений (8) следует, что

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = 16\nu_0^3 (e^{2i(\mu_0 + i\nu_0)(\xi_{k+1} - \xi_k)} \langle \vec{n}_{k+1}, \vec{n}_k \rangle - e^{2i(\mu_0 + i\nu_0)(\xi_k - \xi_{k-1})} \langle \vec{n}_k, \vec{n}_{k-1} \rangle).$$

Здесь введен двухкомпонентный вектор $|\vec{n}_k\rangle$ и не зависящая от поляризации фаза $\tilde{\chi}_k$,

$$|\vec{n}_k\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\chi^{(1)}} \cos \theta_k \\ e^{i\chi^{(2)}} \sin \theta_k \end{pmatrix}, \quad \langle \vec{n}_k, \vec{n}_{k\pm 1} \rangle = e^{-i(\tilde{\chi}_k - \tilde{\chi}_{k\pm 1})} \langle \vec{n}_k^0, \vec{n}_{k\pm 1}^0 \rangle, \quad \chi_k^{(j)} = \tilde{\chi}_k + \delta_k^{(j)},$$

где вектор поляризации $|\vec{n}_k^0\rangle$ дается формулами

$$|\vec{n}_k^0\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\delta^{(1)}} \cos \theta \\ e^{i\delta^{(2)}} \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \langle \vec{n}_k^0, \vec{n}_{k\pm 1}^0 \rangle \equiv (\vec{n}_k^{0\dagger}, \vec{n}_{k\pm 1}^0),$$

$$\langle \vec{n}_k^0, \vec{n}_{k\pm 1}^0 \rangle = e^{-i(\delta_k^{(1)} - \delta_{k\pm 1}^{(1)})} \cos \theta_k \cos \theta_{k\pm 1} + e^{-i(\delta_k^{(2)} - \delta_{k\pm 1}^{(2)})} \sin \theta_k \sin \theta_{k\pm 1}.$$

Кроме того,

$$\frac{d\tilde{\chi}_k}{dt} = 2(\mu_k^2 + \nu_k^2) + O(\epsilon), \quad \frac{d}{dt} \langle \vec{n}_k^0, \vec{n}_{k-1}^0 \rangle = O(\epsilon).$$

Введем теперь величины

$$E_{k+1,k} = 4\nu_0^2 \exp[2i(\mu_0 + i\nu_0)(\xi_{k+1} - \xi_k) - i(\tilde{\chi}_{k+1} - \tilde{\chi}_k)],$$

$$E_{k,k-1} = 4\nu_0^2 \exp[2i(\mu_0 + i\nu_0)(\xi_k - \xi_{k-1}) - i(\tilde{\chi}_k - \tilde{\chi}_{k-1})],$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dE_{k+1,k}}{dt} = -4\nu_0(\lambda_{k+1} - \lambda_k)E_{k+1,k}, \quad \frac{dE_{k,k-1}}{dt} = -4\nu_0(\lambda_k - \lambda_{k-1})E_{k,k-1}.$$

Тогда

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = 4\nu_0 [E_{k+1,k} \langle \vec{n}_{k+1}^0, \vec{n}_k^0 \rangle - E_{k,k-1} \langle \vec{n}_k^0, \vec{n}_{k-1}^0 \rangle].$$

Видно, что для попарно ортогонально поляризованных решений (все произведения $\langle \vec{n}_k^0, \vec{n}_{k-1}^0 \rangle$ равны нулю) как скорость, так и амплитуда k -го солитона остаются постоянными в главном порядке по ϵ , т.е. солитоны не взаимодействуют.

Пусть $E_{k,k-1} = -e^{q_k - q_{k-1}}$ и аналогичное равенство имеет место для $E_{k+1,k}$. Тогда $q_{kt} = -4\nu_0\lambda_k$ и

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} = 16\nu_0^2 [\langle \vec{n}_{k+1}^0, \vec{n}_k^0 \rangle e^{q_{k+1} - q_k} - \langle \vec{n}_k^0, \vec{n}_{k-1}^0 \rangle e^{q_k - q_{k-1}}], \quad (9)$$

где

$$q_k = 2i(\mu_0 + i\nu_0)[\xi_k - (\mu_0 + i\nu_0)t] - i\tilde{\chi}_k + k \ln 4\nu_0^2 + ik\pi.$$

Определим теперь величины Q_k :

$$Q_1 = q_1, \quad Q_k = q_k + \sum_{s=2}^k \ln \langle \vec{n}_s^0, \vec{n}_{s-1}^0 \rangle,$$

и нормированное время $\tau = 4\nu_0 t$. Тогда уравнение (9) в точности приобретает вид вполне интегрируемой модели КЦТ с N узлами:

$$\frac{d^2 Q_k}{d\tau^2} = e^{Q_{k+1} - Q_k} - e^{Q_k - Q_{k-1}}. \quad (10)$$

Решающим является то обстоятельство, что мы получили *комплексную* модель Тоды. Хорошо известно [16], что вещественная цепочка Тоды (ВЦТ) с N узлами допускает L -А-пару и имеет N попарно различных вещественных интегралов движения, находящихся в инволюции. Поскольку эти интегралы определяют асимптотические скорости “частиц ВЦТ”, мы приходим к заключению, что все эти частицы имеют попарно различные скорости и эволюционируют к асимптотически свободно-му режиму.

Аналогично, модель КЦТ имеет N комплексных интегралов движения и асимптотические скорости даются вещественными частями этих интегралов. Следовательно, мы можем иметь, вообще говоря, различные комплексные интегралы движения с *равными вещественными частями*. Такое положение отвечает режиму связанных состояний, когда вещественные части всех интегралов одинаковы, или промежуточному режиму, когда равны вещественные части лишь некоторых из интегралов движения (см. [17]).

Заметим, что если $\langle \vec{n}_k^\dagger, \vec{n}_{k\pm 1} \rangle = 0$ для некоторого фиксированного значения k , то, очевидно, модель КЦТ (10) расщепляется на две отдельные системы КЦТ: первая – для солитонов с индексами $1 \leq s \leq k$, вторая – с индексами $k+1 \leq s \leq N$. Далее мы не будем иметь дело с этим вырожденным случаем.

4. ТРЕХСОЛИТОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Для иллюстрации вышеизложенного подхода рассмотрим распространение цепочки солитонов Манакова с $N = 3$, опуская некоторые детали вычислений, поскольку они представляют собой очевидное обобщение аналогичных результатов для скалярных солитонов НУШ [18]. Возьмем

$$Q_1 = q_1 - \ln \langle \vec{n}_2^0, \vec{n}_1^0 \rangle, \quad Q_2 = q_2, \quad Q_3 = q_3 + \ln \langle \vec{n}_3^0, \vec{n}_2^0 \rangle.$$

Матрица L соответствующей спектральной задачи имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 \\ 0 & a_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

где

$$a_k = \frac{1}{2} e^{(Q_{k+1} - Q_k)/2}, \quad b_k = -\frac{1}{2} \frac{dQ_k}{d\tau}, \quad \sum_{k=1}^3 b_k = 0.$$

Интегралы движения ζ_k являются собственными значениями матрицы L . Таким образом, для исследования вещественных частей этих интегралов можно рассмотреть начальные параметры солитонов. Для простоты возьмем начальные скорости равными нулю ($\mu_{j0} = 0$). Тогда $q_k - q_{k-1} = -2\nu_0 r_0 + \ln 4\nu_0^2 + i\pi$, где r_0 – начальное расстояние между солитонами, поэтому

$$\begin{aligned} a_1 &= i\nu_0 \sqrt{\langle \vec{n}_2^0, \vec{n}_1^0 \rangle} e^{-\nu_0 r_0}, & a_2 &= i\nu_0 \sqrt{\langle \vec{n}_3^0, \vec{n}_2^0 \rangle} e^{-\nu_0 r_0}, \\ b_1 &= \frac{i}{2}(\nu_1 - \nu_0) \equiv \frac{i}{2}\Delta\nu_1, & b_2 &= \frac{i}{2}\Delta\nu_2, & b_3 &= \frac{i}{2}\Delta\nu_3. \end{aligned}$$

Собственные значения матрицы L являются решениями алгебраического уравнения

$$\zeta^3 + p\zeta + q = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \nu_0^2 e^{-2\nu_0 r_0} (\langle \vec{n}_2^0, \vec{n}_1^0 \rangle + \langle \vec{n}_3^0, \vec{n}_2^0 \rangle) - \frac{1}{4}(\Delta\nu_1 \Delta\nu_2 + \Delta\nu_2 \Delta\nu_3 + \Delta\nu_3 \Delta\nu_1), \\ q &= \frac{i}{8} \Delta\nu_1 \Delta\nu_2 \Delta\nu_3 - \frac{i}{2} \nu_0^2 e^{-2\nu_0 r_0} (\langle \vec{n}_2^0, \vec{n}_1^0 \rangle \Delta\nu_3 + \langle \vec{n}_3^0, \vec{n}_2^0 \rangle \Delta\nu_1). \end{aligned}$$

Простой анализ уравнения третьей степени (11) с дискриминантом $Q = (q/2)^2 + (p/3)^3$ показывает, что существуют две возможности для эволюции начальных солитонных параметров в режим связанного состояния: 1) $p > 0$, $q = 0$; 2) $p = \bar{p}$, $q = -\bar{q}$, $Q > 0$.

Рассмотрим случай 1. Для определенности будем рассматривать следующую конфигурацию величин $\Delta\nu_k$: $\Delta\nu_1 = \beta$, $\Delta\nu_2 = 0$, $\Delta\nu_3 = -\beta$. Чтобы величина p была вещественной, нужно обратить в нуль величину $\text{Im}(\langle \vec{n}_2^0, \vec{n}_1^0 \rangle + \langle \vec{n}_3^0, \vec{n}_2^0 \rangle)$. Одна из возможностей состоит в том, чтобы положить

$$\delta_1^{(1)} = \delta_2^{(1)} = \delta_3^{(1)}, \quad \delta_1^{(2)} = \delta_2^{(2)} = \delta_3^{(2)}$$

для любых θ_1 и θ_2 , без всякой корреляции между параметрами $\delta_k^{(1)}$ и $\delta_k^{(2)}$. Тогда

$$p = \nu_0^2 e^{-2\nu_0 r_0} (\cos \theta_{21} + \cos \theta_{32}) + \frac{1}{4} \beta^2, \quad q = \frac{i}{2} \nu_0^2 \beta e^{-2\nu_0 r_0} (\cos \theta_{21} - \cos \theta_{32}),$$

где $\theta_{kn} \equiv \theta_k - \theta_n$. Имеем $q = 0$, если $\theta_{21} = \theta_{32}$, что дает $\theta_2 = (\theta_1 + \theta_3)/2$. Следовательно, $\theta_{21} = \theta_{32} = \theta_{31}/2$ и

$$p = 2\nu_0^2 e^{-2\nu_0 r_0} \cos\left(\frac{1}{2}\theta_{31}\right) + \frac{1}{4} \beta^2.$$

В результате, $p > 0$ в том случае, если

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{|\theta_1 - \theta_3|}{2} < \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

для любого β (напомним, что величина β должна быть мала в силу (4)) или если

$$\frac{\pi}{2} < \frac{|\theta_1 - \theta_3|}{2} < \frac{3\pi}{2}, \quad \beta > 2\sqrt{2}\nu_0 e^{-\nu_0 r_0}. \quad (13)$$

Обратим внимание на появление порогового условия для β [18].

Проиллюстрируем случай 2 примером другой конфигурации величин $\Delta\nu_k$: $\Delta\nu_1 = \Delta\nu_3 = \gamma$, $\Delta\nu_2 = -2\gamma$. В этом случае

$$\begin{aligned} p &= \nu_0^2 e^{-2\nu_0 r_0} (\cos \theta_{21} + \cos \theta_{32}) + \frac{3}{4} \gamma^2, \\ q &= -\frac{i}{4} \gamma [2\nu_0^2 e^{-2\nu_0 r_0} (\cos \theta_{21} + \cos \theta_{32}) + \gamma^2], \\ Q &= \left(\frac{\nu_0}{2} e^{-\nu_0 r_0} \right)^4 \frac{\gamma^2}{3} (\cos \theta_{21} + \cos \theta_{32})^2 \left[1 + \frac{16}{9} \left(\frac{\nu_0}{\gamma} e^{-\nu_0 r_0} \right)^2 (\cos \theta_{21} + \cos \theta_{32}) \right]. \end{aligned}$$

Мы получаем, что $Q > 0$, если выражение в квадратных скобках положительно. Это дает пороговое условие для параметра γ :

$$\gamma > \frac{4\sqrt{2}}{3} \nu_0 e^{-\nu_0 r_0}.$$

Симметричные решения КЦТ при $N = 3$ в случае $p > 0$ и $q = 0$ могут быть явно выписаны в виде [18]

$$Q_1(\tau) = \ln \frac{\operatorname{ch}(2\zeta_1 \tau + \sigma) + 1}{4\zeta_1^2}, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = -Q_1,$$

где $\zeta_1 = \sqrt{-p}$, $\sigma = \rho_+$ при $\cos(\theta_{31}/2) > 0$ и $\sigma = \rho_- + i\pi$ при $\cos(\theta_{31}/2) < 0$ (см. ниже). Следуя [18], можно вывести формулы для траекторий солитонов:

$$\begin{aligned} \xi_1(\tau) &= -\frac{1}{2\nu_0} \left[\operatorname{Re} Q_1(\tau) + \ln \left| \cos \frac{\theta_3 - \theta_1}{2} \right| - \ln(4\nu_0^2) \right], \\ \xi_2(\tau) &= \frac{1}{\nu_0} \ln(4\nu_0^2), \\ \xi_3(\tau) &= \frac{1}{2\nu_0} \left[\operatorname{Re} Q_1(\tau) + \ln \left| \cos \frac{\theta_3 - \theta_1}{2} \right| + 3 \ln(4\nu_0^2) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Q_1(\tau) &= \ln [\operatorname{ch}(\operatorname{Re} \sigma) + \cos(2\sqrt{p} \tau + \operatorname{Im} \sigma)] - \ln(4p), \\ \operatorname{ch} \rho_+ &= \frac{C_+^2 + 1}{C_+^2 - 1}, \quad \operatorname{ch} \rho_- = \frac{1 + C_-^2}{1 - C_-^2}, \\ C_{\pm} &= \left(1 \pm 8 \frac{\nu_0^2}{\beta^2} e^{-2\nu_0 r_0} \left| \cos \frac{\theta_3 - \theta_1}{2} \right| \right)^{1/2} \end{aligned}$$

и β удовлетворяет пороговому условию (13). Таким образом, расстояние между солитонами

$$r(\tau) = \frac{1}{2}(\xi_3(\tau) - \xi_1(\tau)) = \frac{1}{2\nu_0} \left[\operatorname{Re} Q_1(\tau) + \ln \left| \cos \frac{\theta_3 - \theta_1}{2} \right| + 2 \ln(4\nu_0^2) \right] \quad (15)$$

колеблется между максимальным и минимальным значениями с периодом $T = 2\pi/(\beta C_{\pm})$, причем

$$r_{\max} = r_0, \quad r_{\min} = r_0 - \frac{1}{\nu_0} \ln C_+$$

в случае $\cos(\theta_{31}/2) > 0$ и

$$r_{\max} = r_0 - \frac{1}{\nu_0} \ln C_-, \quad r_{\min} = r_0$$

в случае $\cos(\theta_{31}/2) < 0$ (напомним, что $C_- < 1$).

Квазиэквидистантное распространение трехсолитонной цепочки: аналитически предсказанные траектории ξ_j , $j = 1, 2, 3$ (пунктирные линии) и полученные численно максимумы интенсивности солитонов $(|u_j|^2 + |v_j|^2)^{1/2}$ (сплошные линии); слева: $r_0 = 8$, $\nu_0 = 0.5$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/3$, $\theta_3 = 2\pi/3$, $\beta = 0.02$, пороговое условие для β отсутствует; справа: $r_0 = 8$, $\nu_0 = 0.5$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi/3$, $\theta_3 = 4\pi/3$, $\beta = 0.08$, для β выполнено пороговое условие (13). Вычисленные и предсказанные траектории во втором случае практически совпадают.

Сравним теперь наши теоретические предсказания относительно режимов связанных состояний с результатами численного моделирования для случая $r_0 = 8$ и $\nu_0 = 0.5$. Для углов поляризации $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/3$ и $\theta_3 = 2\pi/3$ имеем $\cos(\theta_{31}/2) > 0$. Следовательно, пороговое ограничение на значение β отсутствует, и можно взять $\beta = 0.02$. Для другого выбора углов ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi/3$ и $\theta_3 = 4\pi/3$) имеем $\cos(\theta_{31}/2) < 0$. Поэтому для выполнения порогового условия (13) возьмем $\beta = 0.08$. Результаты сравнения траекторий солитонов (14) с полученными численно максимумами интенсивности солитонов $(|u_j|^2 + |v_j|^2)^{1/2}$ представлены на рисунке. Видно, что модель КЦТ правильно предсказывает квазиэквидистантные режимы динамики цепочки для больших временных интервалов, особенно хорошее соответствие наблюдается при втором способе выбора углов поляризации.

5. МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ СИСТЕМА НУШ: ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД

В этом разделе мы рассмотрим N -солитонные взаимодействия в более общей многокомпонентной системе НУШ, используя вариационный подход [19].

Применим этот подход к векторному НУШ

$$i \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \vec{u}}{dx^2} + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \vec{u}(x, t) = 0, \quad (16)$$

где $\vec{u}$ – n -компонентная векторнозначная функция и $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \equiv \sum_{s=1}^n \vec{u}_s^* \vec{w}$ – скалярное произведение. При $n = 2$ уравнение (16) превращается в систему Манакова (1).

Уравнение (16) допускает как гамильтонову, так и лагранжеву формулировку. Действительно, вводя скобки Пуассона

$$\{\vec{u}_j(x, t), \vec{u}_k^*(y, t)\} = \delta_{jk} \delta(x - y) \quad (17)$$

и гамильтониан

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \langle \vec{u}_x, \vec{u}_x \rangle - \frac{1}{2} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle^2 \right], \quad (18)$$

легко находим, что уравнения движения Гамильтона

$$i \vec{u}_{j,t} = \{H, \vec{u}_j\} \equiv \frac{\partial H}{\partial \vec{u}_j^*} \quad (19)$$

совпадают с векторным НУШ (16).

Лагранжева формулировка состоит в следующем: введем лагранжиан

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{i}{2} [\langle \vec{u}, \vec{u}_t \rangle - \langle \vec{u}_t, \vec{u} \rangle] - H. \quad (20)$$

Тогда уравнения движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{u}_t^\dagger} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{u}^\dagger} = 0 \quad (21)$$

совпадают с уравнением (16).

Векторная система НУШ может быть решена посредством применения метода обратной задачи к обобщенной системе Захарова–Шабата (см. [11], [13]). Здесь мы исследуем поведение системы на больших временах при начальном условии типа цепочки

$$\vec{u}(x) = \sum_{k=1}^N \vec{u}_k(x, t)|_{t=0}, \quad (22)$$

где $\vec{u}_k(x, t)$ – односолитонное решение:

$$\begin{aligned} \vec{u}_k(x, t) &= \frac{2\nu_k e^{i\phi_k}}{\text{ch } z_k} \vec{n}_k, & \vec{n}_k &= \begin{pmatrix} \kappa_k^{(1)} e^{i\gamma_k^{(1)}} \\ \vdots \\ \kappa_k^{(n)} e^{i\gamma_k^{(n)}} \end{pmatrix}, \\ z_k &= 2\nu_k(x - \xi_k(t)), & \xi_k(t) &= 2\mu_k t + \xi_k^{(0)}, \\ \phi_k &= \frac{\mu_k}{\nu_k} z_k + \delta_k(t), & \delta_k(t) &= 2(\mu_k^2 + \nu_k^2)t + \delta_k^{(0)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Введенные выше векторы поляризации $\vec{n}_k$ нормированы условием $\langle \vec{n}_k, \vec{n}_k \rangle \equiv \sum_{s=1}^n \kappa_k^{(s)2} = 1$. Фазы ϕ_k однозначно фиксированы требованием $\sum_{s=1}^n \gamma_k^{(s)} = 0$.

Придерживаясь вариационного подхода [19], введем анзац (22) в лагранжиан и выполним интегрирование по переменной x . Опуская детали вычислений, приведем ответ:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{k=1}^N \mathcal{L}_k + \sum_{k=1}^N \sum_{n=k\pm 1}^N \tilde{\mathcal{L}}_{kn}, \\ \mathcal{L}_k &= 4\nu_k \left(\frac{i}{2} (\langle \vec{n}_k, \vec{n}_{k,t} \rangle - \langle \vec{n}_{k,t}, \vec{n}_k \rangle) + 2\mu_k \frac{d\xi_k}{dt} - \frac{d\delta_k}{dt} - 2\mu_k^2 + \frac{2\nu_k^2}{3} \right), \\ \mathcal{L}_{kn} &= 16\nu_0^3 e^{-\Delta_{kn}} (R_{kn} + R_{kn}^*) + O(\epsilon^{3/2}), \\ R_{kn} &= e^{i(\tilde{\delta}_n - \tilde{\delta}_k)} \langle \vec{n}_k, \vec{n}_n \rangle, \quad \tilde{\delta}_k = \delta_k - 2\mu_0 \xi_k, \quad \Delta_{kn} = 2s_{kn}\nu_0(\xi_k - \xi_n), \end{aligned} \quad (24)$$

где коэффициенты s_{kn} те же, что и в уравнениях (8).

Все необходимые для получения $\mathcal{L}_k$ интегралы могут быть вычислены явно (см. приложение). В результате мы имеем члены трех различных по величине порядков: 1) члены порядка $\Delta_{kn}^2 e^{-\Delta_{kn}}$; 2) члены порядка $\Delta_{kn} e^{-\Delta_{kn}}$; 3) члены порядка $e^{-\Delta_{kn}}$. Более детальное рассмотрение показывает, что члены вида 1 и 2 умножаются на множители порядка $e^{-\Delta_{kn}}$ вследствие эволюционных уравнений для солитонных параметров. Окончательно, пренебрегая всеми членами порядка $\epsilon^{3/2}$ и выше, приходим к следующему набору динамических уравнений для солитонных параметров:

$$\frac{d\xi_k}{dt} = 2\mu_k, \quad (25)$$

$$\frac{d\delta_k}{dt} = 2\mu_k^2 + 2\nu_k^2, \quad (26)$$

$$\frac{d\nu_k}{dt} = 8\nu_0^3 \sum_n e^{-\Delta_{kn}} i(R_{kn} - R_{kn}^*), \quad (27)$$

$$\frac{d\mu_k}{dt} = -8\nu_0^3 \sum_n e^{-\Delta_{kn}} (R_{kn} + R_{kn}^*), \quad (28)$$

$$\frac{d\vec{n}_k}{dt} = 4\nu_0^2 i \sum_{n=k\pm 1} e^{-\Delta_{kn}} [e^{i(\tilde{\delta}_n - \tilde{\delta}_k)} \vec{n}_n - R_{kn} \vec{n}_k + e^{i(\tilde{\delta}_n - \tilde{\delta}_k)} \vec{n}_n + R_{kn}^* \vec{n}_k] + C_k \vec{n}_k, \quad (29)$$

где константы C_k фиксируются связью $\langle \vec{n}_k, \vec{n}_k \rangle = 1$ для всех t .

Следующий шаг заключается в том, чтобы оценить порядок величины различных членов в лагранжиане $\mathcal{L}$ и отбросить те из них, которые имеют порядок $\epsilon^{3/2}$ и ϵ^2 . Напомним, что параметр ϵ характеризует величину перекрытия соседних солитонов (см. (3)).

Поэтому из уравнений (27) и (28) имеем

$$\frac{d(\mu_k + i\nu_k)}{dt} = 4\nu_0 [\langle \vec{n}_k, \vec{n}_{k-1} \rangle e^{q_k - q_{k-1}} - \langle \vec{n}_{k+1}, \vec{n}_k \rangle e^{q_{k+1} - q_k}]. \quad (30)$$

Кроме того, из уравнений (25) и (26) следует, что (см. [8])

$$\frac{dq_k}{dt} = -4\nu_0(\mu_k + i\nu_k). \quad (31)$$

В результате мы доказали утверждение работы [20]:

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} = 16\nu_0^2 [\langle \vec{n}_{k+1}, \vec{n}_k \rangle e^{q_{k+1}-q_k} - \langle \vec{n}_k, \vec{n}_{k-1} \rangle e^{q_k-q_{k-1}}]. \quad (32)$$

В случае $n = 2$ это уравнение совпадает с уравнением (9). Уравнение (32) в совокупности с системой уравнений для векторов поляризации (29) дает правильное обобщение модели КЦТ для многокомпонентной системы НУШ.

Уравнения для векторов поляризации являются нелинейными, поэтому система уравнений для Q_k и $\vec{n}_k$ в целом неинтегрируема. Однако все члены в правых частях эволюционных уравнений для векторов поляризации $\vec{n}_k$ имеют порядок ϵ . Это позволяет в главном приближении пренебречь эволюцией векторов $\vec{n}_k$ и аппроксимировать эти векторы их начальными значениями. В результате получим, что N -солитонные взаимодействия для векторного НУШ в адиабатическом приближении определяются КЦТ (см. раздел 3).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хорошо известно, что эффект двойного лучепреломления описывается двухкомпонентным обобщением НУШ:

$$\begin{aligned} iu_{1t} + \frac{1}{2}u_{1xx} + (|u_1|^2 + \beta|u_2|^2)u_1(x, t) &= ir(x, t), \\ iu_{2t} + \frac{1}{2}u_{2xx} + (|u_2|^2 + \beta|u_1|^2)u_2(x, t) &= is(x, t), \end{aligned} \quad (33)$$

где параметр β характеризует двойное лучепреломление, а функции $ir(x, t)$ и $is(x, t)$ описывают дополнительные физические эффекты. Например, выбор $ir(x, t) = cu_2(x, t)$, $is(x, t) = cu_1(x, t)$ позволит учесть внутриканальное взаимодействие.

Известно, что данная система в случае Манакова $\beta = 1$, $r = s = 0$ (1) является интегрируемой. Однако в случае малых r и s и при β , близком к единице, можно рассматривать систему (33) как возмущенную систему Манакова. Применяя любой из описанных выше подходов, можно вывести возмущенный вариант КЦТ, который описывает N -солитонные взаимодействия в адиабатическом приближении.

Другой важной проблемой является анализ физических следствий, которые могут быть выведены из модели КЦТ. Эти задачи станут предметом последующих публикаций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем здесь несколько типичных интегралов, которые возникают при вычислении лагранжиана:

$$\begin{aligned} K(a, \Delta) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz e^{iaz}}{2 \operatorname{ch} z \operatorname{ch}(z + \Delta)} = \frac{\pi(1 - e^{-ia\Delta})}{2i \operatorname{sh} \Delta \operatorname{sh}(\pi a/2)}, \\ L(a, \Delta) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz e^{iaz} \operatorname{sh} z}{2 \operatorname{ch}^2 z \operatorname{ch}(z + \Delta)} = \\ &= \frac{\pi i}{2 \operatorname{sh}^2 \Delta \operatorname{sh}(\pi a/2)} [(1 - e^{-ia\Delta}) \operatorname{ch} \Delta - ia \operatorname{sh} \Delta], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{L}(a, \Delta) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz e^{iaz} \operatorname{sh}(z + \Delta)}{2 \operatorname{ch} z \operatorname{ch}^2(z + \Delta)} = e^{-ia\Delta} L(a, -\Delta), \\
M(a, \Delta) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz e^{iaz} \operatorname{sh} z \operatorname{sh}(z + \Delta)}{2 \operatorname{ch}^2 z \operatorname{ch}^2(z + \Delta)} = \\
&= \frac{\pi e^{-ia\Delta/2}}{\operatorname{sh} \Delta \operatorname{sh}(\pi a/2)} \left[a \cos\left(\frac{a\Delta}{2}\right) \frac{\operatorname{ch} \Delta}{\operatorname{sh} \Delta} - \sin\left(\frac{a\Delta}{2}\right) \left(1 + \frac{2}{\operatorname{sh}^2 \Delta}\right) \right].
\end{aligned}$$

В адиабатическом пределе $a \simeq 0$

$$\begin{aligned}
K(0, \Delta) &= \frac{\Delta}{\operatorname{sh} \Delta}, \\
L(0, \Delta) &\equiv -\tilde{L}(0, \Delta) = \frac{1}{\operatorname{sh} \Delta} \left[1 - \frac{\Delta \operatorname{ch} \Delta}{\operatorname{sh} \Delta} \right], \\
M(0, \Delta) &= \frac{1}{\operatorname{sh}^3 \Delta} [2 \operatorname{ch} \Delta \operatorname{sh} \Delta - \Delta \operatorname{sh}^2 \Delta - 2\Delta].
\end{aligned}$$

В некоторых случаях необходимы также производные по a при $a = 0$:

$$\begin{aligned}
K_1(\Delta) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{dK(a, \Delta)}{da} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz z}{2 \operatorname{ch} z \operatorname{ch}(z + \Delta)} = -\frac{\Delta^2}{2 \operatorname{sh} \Delta}, \\
L_1(\Delta) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{dL(a, \Delta)}{da} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz z \operatorname{sh} z}{2 \operatorname{ch}^2 z \operatorname{ch}(z + \Delta)} = \frac{\Delta^2 \operatorname{ch} \Delta}{2 \operatorname{sh}^2 \Delta}, \\
\tilde{L}_1(\Delta) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{d\tilde{L}(a, \Delta)}{da} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz z \operatorname{sh}(z + \Delta)}{2 \operatorname{ch} z \operatorname{ch}^2(z + \Delta)} = \frac{\Delta^2 \operatorname{ch} \Delta}{2 \operatorname{sh}^2 \Delta}, \\
M_1(\Delta) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{dM(a, \Delta)}{da} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz z \operatorname{sh} z \operatorname{sh}(z + \Delta)}{2 \operatorname{ch}^2 z \operatorname{ch}^2(z + \Delta)} = \\
&= \frac{\Delta[-2 \operatorname{ch} \Delta \operatorname{sh} \Delta + \Delta \operatorname{sh}^2 \Delta + 2\Delta]}{2 \operatorname{sh}^3 \Delta}.
\end{aligned}$$

При вычислении $\mathcal{L}_{kn}$ нужно, разумеется, заменить Δ на Δ_{kn} и удержать лишь главные члены.

Благодарности. В.С. Герджиков выражает благодарность Bulgarian Science Foundation за частичную финансовую поддержку работы (грант № F-1410).

Список литературы

- [1] Yu. S. Kivshar, G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, San Diego, 2003.
- [2] C. Desem, P. L. Chu, "Soliton-soliton interactions", *Optical Solitons – Theory and Experiment*, ed. J. R. Taylor, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, 127; I. M. Uzunov, V. D. Stoev, T. I. Tzoleva, *Optics Lett.*, **17** (1992), 1417.
- [3] M. Suzuki, H. Toga, N. Edagawa, H. Tanaka, S. Yamamote, S. Akiba, *Electron. Lett.*, **30** (1994), 1083.
- [4] V. I. Karpman, V. V. Solov'ev, *Phys. D*, **3** (1981), 487.
- [5] I. M. Uzunov, V. S. Gerdjikov, M. Gölles, F. Lederer, *Opt. Commun.*, **125** (1996), 237.

- [6] V. S. Gerdjikov, D. J. Kaup, I. M. Uzunov, E. G. Evstatiev, *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996), 3943; V. S. Gerdjikov, I. M. Uzunov, E. G. Evstatiev, G. L. Diankov, *Phys. Rev. E*, **55** (1997), 6039; V. S. Gerdjikov, I. M. Uzunov, *Phys. D*, **152–153** (2001), 355.
- [7] V. S. Gerdjikov, E. V. Doktorov, J. Yang, *Phys. Rev. E*, **64** (2001), 056617.
- [8] V. S. Shchesnovich, *Phys. Rev. E*, **65** (2002), 046614.
- [9] E. V. Doktorov, N. P. Matsuka, V. M. Rothos, *Phys. Rev. E*, **69** (2004), 056607.
- [10] J. M. Arnold, *J. Opt. Soc. Amer. A*, **15** (1998), 1450; *Phys. Rev. E*, **60** (1999), 979.
- [11] С. В. Манаков, *ЖЭТФ*, **38** (1974), 248.
- [12] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [13] M. J. Ablowitz, B. Prinari, A. D. Trubatch, *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*, London Math. Soc. Lect. Notes Ser., **302**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [14] J. Yang, *Phys. Rev. E*, **65** (2002), 036606.
- [15] M. Midrio, S. Wabnitz, P. Franco, *Phys. Rev. E*, **54** (1996), 5743; V. S. Shchesnovich, E. V. Doktorov, *Phys. Rev. E*, **55** (1997), 7626; T. I. Lakoba, D. J. Kaup, *Phys. Rev. E*, **56** (1997), 6147; S. M. Baker, J. N. Elgin, J. Gibbons, *Phys. Rev. E*, **62** (1999), 4325.
- [16] M. Toda, *Theory of Nonlinear Lattices*, Springer, Berlin, 1989; J. Moser, “Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential — an integrable system”, *Dynamical Systems, Theory and Applications* (Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974), Lect. Notes Phys., **38**, ed. J. Moser, Springer, Berlin, 1975, 467; *Adv. Math.*, **16** (1975), 197.
- [17] V. S. Gerdjikov, E. G. Evstatiev, R. I. Ivanov, *J. Phys. A*, **31** (1998), 8221; **33** (2000), 975; [solv-int/9909020](#).
- [18] D. J. Kaup, V. S. Gerdjikov, E. G. Evstatiev, G. L. Diankov, I. M. Uzunov, *Criterion and regions of stability for quasi-equidistant soliton trains*, Preprint INRNE-TH-97-4, Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Sofia, 1997; [solv-int/9708004](#); V. S. Gerdjikov, E. G. Evstatiev, D. J. Kaup, G. L. Diankov, I. M. Uzunov, *Phys. Lett. A*, **241** (1998), 323.
- [19] D. Anderson, *Phys. Rev. A*, **27** (1983), 3135; D. Anderson, M. Lisak, T. Reichel, *Phys. Rev. A*, **38** (1988), 1618; B. A. Malomed, *Progr. Opt.*, **43** (2002), 69.
- [20] V. S. Gerdjikov, “*N*-soliton interactions, the complex Toda chain and stability of NLS soliton trains”, *Proc. of the XVI-th Int. Symp. on Electromagnetic Theory*, v. 1 (Aristotle Univ. of Thessaloniki, Greece, 1998), ed. E. Kriezis, 1998, 307.