Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Т. Хабибуллин, А. Пекан, Характеристическая алгебра Ли и классификация полудискретных моделей, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 3, 413–423

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6056>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 11:25:49

© 2007 г.

И. Т. Хабибуллин^{*,†}, А. Пекан^{*}

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА ЛИ И КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛУДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Изучаются характеристические алгебры Ли полудискретных цепочек. Предпринята попытка использования этого понятия к классификации цепочек, интегрируемых по Дарбу.

Ключевые слова: интегрируемость, дискретное уравнение, уравнение типа Лиувилля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование класса гиперболических дифференциальных уравнений вида

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \quad (1)$$

имеет очень долгую историю. Для поиска частных и общих решений уравнений такого вида развивались разнообразные подходы. В литературе можно найти несколько определений интегрируемости уравнения. Согласно определению, данному Дарбу, уравнение (1) называется интегрируемым, если оно редуцируется к паре обыкновенных (как правило, нелинейных) дифференциальных уравнений или, более точно, если любое его решение удовлетворяет уравнениям вида [1] (см. также работу [2])

$$F(x, y, u, u_x, u_{xx}, \dots, D_x^m u) = a(x), \quad G(x, y, u, u_y, u_{yy}, \dots, D_y^n u) = b(y) \quad (2)$$

при подходящим образом выбранных функциональных параметрах $a(x)$ и $b(y)$, где D_x и D_y – операторы дифференцирования по x и y , $u_x = D_x u$, $u_{xx} = D_x u_x$ и т.д. Функции F и G называются y - и x -интегралами уравнения.

Эффективный критерий интегрируемости по Дарбу был предложен самим Дарбу. Уравнение (1) является интегрируемым, если и только если последовательность Лапласа линеаризованного уравнения обрывается на обоих концах. Строгое доказательство этого утверждения было найдено лишь недавно [3].

Альтернативный метод исследования и классификации уравнений, интегрируемых по Дарбу, был развит Шабатом на основе понятия характеристической алгебры

^{*}Department of Mathematics, Faculty of Science, Bilkent University, 06800, Ankara, Turkey.
E-mail: asli@fen.bilkent.edu.tr

[†]Институт математики УНЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: habibullin_i@mail.rb.ru

Ли. Мы дадим краткое пояснение этого понятия. Начнем с основного свойства интегралов. Очевидно, что каждый y -интеграл удовлетворяет условию $D_y F(x, y, u, u_x, u_{xx}, \dots, D_x^m u) = 0$. Беря производную и применяя правило дифференцирования сложной функции, мы определяем векторное поле X_1 такое, что

$$X_1 F = \left(\frac{\partial}{\partial y} + u_y \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial u_x} + D_x(f) \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \dots \right) F = 0. \quad (3)$$

Поэтому векторное поле X_1 решает уравнение $X_1 F = 0$. Однако, вообще говоря, коэффициенты векторного поля зависят от переменной u_y , а решение F от него не зависит. Это налагает жесткие ограничения на F ; в действительности функция F должна удовлетворять еще одному уравнению: $X_2 F = 0$, где $X_2 = \partial/\partial u_y$. Но тогда коммутатор этих двух операторов также обращает в нуль F . Более того, для любого X из алгебры Ли, порожденной X_1 и X_2 , мы получаем $X F = 0$. Эта алгебра Ли называется характеристической алгеброй Ли уравнения (1) в направлении x . Характеристическая алгебра в x -направлении определяется аналогично. Теперь в силу известной теоремы Якоби уравнение (1) является интегрируемым по Дарбу, если и только если обе его характеристические алгебры конечномерны. В работах [4] изучались характеристические алгебры Ли для систем нелинейных гиперболических уравнений и их применения.

В настоящей работе мы исследуем полудискретные цепочки вида

$$t_{1x} = f(t, t_1, t_x) \quad (4)$$

с точки зрения интегрируемости по Дарбу. Здесь $t = t(n, x)$ является неизвестной функцией двух независимых переменных: одной дискретной (n) и одной непрерывной (x). Предполагается, что $\partial f / \partial t_x \neq 0$. Нижний индекс обозначает сдвиг или производную, например, $t_1 = t(n+1, x)$ и $t_x = \partial t(n, x) / \partial x$. Ниже мы используем D для обозначения оператора сдвига и D_x для обозначения x -производной: $Dh(n, x) = h(n+1, x)$ и $D_x h(n, x) = \partial h(n, x) / \partial x$. Для итерированных сдвигов мы используем нижний индекс: $D^j h = h_j$.

Теперь введем понятие интегралов для полудискретной цепочки (4). x -Интеграл определяется аналогично непрерывному случаю. Функцию $F = F(x, n, t, t_1, t_2, \dots)$, зависящую от конечного числа сдвигов, назовем x -интегралом цепочки (4), если выполнено условие $D_x F = 0$. Соответственно в непрерывном случае естественно назвать функцию $I = I(x, n, t, t_x, t_{xx}, \dots)$ n -интегралом цепочки (4), если она лежит в ядре разностного оператора: $(D - 1)I = 0$. Другими словами, n -интеграл должен оставаться неизменным при действии оператора сдвига $DI = I$ (см. также работу [5]). Можно записать его в развернутом виде:

$$I(x, n+1, t_1, f, f_x, f_{xx}, \dots) = I(x, n, t, t_x, t_{xx}, \dots). \quad (5)$$

Заметим, что (5) – это функциональное уравнение, причем оно содержит значения неизвестной функции в двух различных “точках”. В этом коренится основная трудность при изучении дискретных цепочек. Такие задачи возникают при попытках

применить симметричный подход к дискретным уравнениям (см. работы [6]). Однако концепция алгебры Ли характеристических векторных полей предоставляет нам эффективный инструмент для исследования цепочек.

Введем векторные поля следующим образом. Мы сконцентрируемся на основном уравнении (5). Очевидно, его левая часть содержит переменную t_1 , тогда как в правой части ее нет. Поэтому полная производная DI по t_1 должна обращаться в нуль. Другими словами, n -интеграл лежит в ядре оператора $Y_1 := D^{-1}\partial D/\partial t_1$. Аналогично можно проверить, что I лежит в ядре оператора $Y_2 := D^{-2}\partial D^2/\partial t_1$. Действительно, как это немедленно следует из (5), правая часть уравнения $D^2I = I$ не зависит от t_1 , поэтому производная D^2I по t_1 обращается в нуль. Таким способом легко доказать, что для любого натурального j оператор $Y_j = D^{-j}\partial D^j/\partial t_1$ является решением уравнения $Y_j I = 0$.

До этого момента мы сдвигали аргумент n вперед; теперь сдвинем его назад и воспользуемся основным уравнением (5), записанным в виде $D^{-1}I = I$. Перепишем исходное уравнение (4) как

$$t_{-1}x = g(t, t_{-1}, t_x). \quad (6)$$

Это можно сделать вследствие предполагавшегося выше условия $\partial f/\partial t_x \neq 0$. В развернутом виде уравнение $D^{-1}I = I$ принимает вид

$$I(x, n-1, t_{-1}, g, g_x, g_{xx}, \dots) = I(x, n, t, t_x, t_{xx}, \dots). \quad (7)$$

Правая часть последнего уравнения не зависит от t_{-1} , поэтому полная производная $D^{-1}I$ по t_{-1} равна нулю, т.е. оператор $Y_{-1} := D\partial D^{-1}/\partial t_{-1}$ является решением уравнения $Y_{-1}I = 0$. Более того, операторы $Y_{-j} = D^j\partial D^{-j}/\partial t_{-1}$ также удовлетворяют аналогичным условиям: $Y_{-j}I = 0$.

Суммируя приведенные выше аргументы, можно сделать вывод, что n -интеграл аннулируется любым оператором из алгебры Ли $\tilde{L}_n$, порожденной операторами [7]

$$\dots, Y_{-2}, Y_{-1}, Y_{-0}, Y_0, Y_1, Y_2, \dots, \quad (8)$$

где $Y_0 = \partial/\partial t_1$ и $Y_{-0} = \partial/\partial t_{-1}$. Алгебра $\tilde{L}_n$ состоит из операторов из последовательности (8), всех возможных коммутаторов и линейных комбинаций с коэффициентами, зависящими от переменных n и x . Очевидно, уравнение (4) допускает нетривиальный n -интеграл, только если размерность алгебры $\tilde{L}_n$ конечна. Однако неясно, достаточно ли конечномерности $\tilde{L}_n$ для существования n -интегралов. Поэтому мы введем другую алгебру Ли, которая называется характеристической алгеброй Ли уравнения (4). Кроме того, для операторов $Y_1, Y_2, \dots$ мы сначала определим дифференциальные операторы $X_j = \partial/\partial t_{-j}$ при $j = 1, 2, \dots$.

Следующая теорема позволяет определить характеристическую алгебру Ли.

ТЕОРЕМА 1.1. Уравнение (4) допускает существование нетривиального n -интеграла, если и только если выполняются два следующих условия:

1) линейная оболочка операторов $\{Y_j\}_1^\infty$ конечномерна (обозначим ее размерность как N);

2) алгебра Ли L_n , порожденная операторами $Y_1, Y_2, \dots, Y_N, X_1, X_2, \dots, X_N$, конечномерна. Назовем L_n характеристической алгеброй Ли уравнения (4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко доказать, что если размерность $\{Y_j\}_1^\infty$ равна N , то набор $\{Y_j\}_1^N$ образует базис в линейной оболочке $\{Y_j\}_1^\infty$.

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА ЛИ L_n

Исследуем некоторые свойства характеристической алгебры Ли, введенной в теореме 1.1. Начнем с доказательства замечания. Оно немедленно следует из следующей леммы.

ЛЕММА 2.1. *Если для некоторого целочисленного N оператор Y_{N+1} является линейной комбинацией операторов с меньшим числом индексов,*

$$Y_{N+1} = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \cdots + \alpha_N Y_N, \quad (9)$$

то для любого целочисленного $j > N$ имеется аналогичное выражение:

$$Y_j = \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 + \cdots + \beta_N Y_N. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно свойству $Y_{k+1} = D^{-1}Y_k D$ из выражения (9) следует, что

$$Y_{N+2} = D^{-1}(\alpha_1)Y_2 + D^{-1}(\alpha_2)Y_3 + \cdots + D^{-1}(\alpha_N)(\alpha_1 Y_1 + \cdots + \alpha_N Y_N). \quad (11)$$

Теперь по индукции легко завершить доказательство леммы.

ЛЕММА 2.2. *Выполнены коммутационные соотношения*

$$[Y_0, Y_{-0}] = 0, \quad [Y_0, Y_1] = 0, \quad [Y_{-0}, Y_{-1}] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое соотношение очевидно. Чтобы доказать два других, найдем координатное представление операторов Y_1 и Y_{-1} , действующих в классе локально гладких функций переменных $x, n, t, t_x, t_{xx}, \dots$. Путем прямого вычисления

$$\begin{aligned} Y_1 I &= D^{-1} \frac{d}{dt_1} D I = D^{-1} \frac{d}{dt_1} I(t_1, f, f_x, \dots) = \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + D^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial t_1} \right) \frac{\partial}{\partial t_x} + D^{-1} \left(\frac{\partial f_x}{\partial t_1} \right) \frac{\partial}{\partial t_{xx}} + \cdots \right\} I(t, t_x, t_{xx}, \dots) \end{aligned} \quad (12)$$

получаем

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t} + D^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial t_1} \right) \frac{\partial}{\partial t_x} + D^{-1} \left(\frac{\partial f_x}{\partial t_1} \right) \frac{\partial}{\partial t_{xx}} + D^{-1} \left(\frac{\partial f_{xx}}{\partial t_1} \right) \frac{\partial}{\partial t_{xxx}} + \cdots. \quad (13)$$

Теперь заметим, что все функции $f, f_x, f_{xx}, \dots$ зависят от переменных $t_1, t, t_x, t_{xx}, \dots$ и не зависят от t_2 ; поэтому коэффициенты векторного поля Y_1 не зависят от t_1 , и операторы Y_1 и Y_0 коммутируют. Аналогично, используя явное координатное представление

$$Y_{-1} = \frac{\partial}{\partial t} + D \left(\frac{\partial g}{\partial t_{-1}} \right) \frac{\partial}{\partial t_x} + D \left(\frac{\partial g_x}{\partial t_{-1}} \right) \frac{\partial}{\partial t_{xx}} + D \left(\frac{\partial g_{xx}}{\partial t_{-1}} \right) \frac{\partial}{\partial t_{xxx}} + \cdots, \quad (14)$$

можно показать, что $[Y_{-0}, Y_{-1}] = 0$.

Для исследования характеристической алгебры Ли L_n оказывается очень полезным следующее утверждение.

ЛЕММА 2.3. Пусть векторное поле

$$Y = \alpha(0)\partial_t + \alpha(1)\partial_{t_x} + \alpha(2)\partial_{t_{xx}} + \dots, \quad (15)$$

где $\alpha_x(0) = 0$, является решением уравнения $[D_x, Y] = 0$. Тогда $Y = \alpha(0)\partial_t$.

Доказательство основано на формуле

$$[D_x, Y] = (\alpha_x(0) - \alpha(1))\partial_t + (\alpha_x(1) - \alpha(2))\partial_{t_x} + \dots. \quad (16)$$

Если $\alpha_x(0) = 0$, то $\alpha(1) = 0$, но если $\alpha_x(1) = 0$, то $\alpha(2) = 0$, а потому $\alpha(j) = 0$ для всех $j > 0$.

В формуле (12) мы уже приводили расширенный координатный вид оператора Y_1 . Можно проверить, что оператор Y_2 является векторным полем вида

$$Y_2 = D^{-1}(Y_1(f))\partial_{t_x} + D^{-1}(Y_1(f_x))\partial_{t_{xx}} + D^{-1}(Y_1(f_{xx}))\partial_{t_{xxx}} + \dots. \quad (17)$$

Это немедленно следует из уравнения $Y_2 = D^{-1}Y_1D$ и координатного представления (12). По индукции доказываются аналогичные формулы для произвольного j :

$$Y_{j+1} = D^{-1}(Y_j(f))\partial_{t_x} + D^{-1}(Y_j(f_x))\partial_{t_{xx}} + D^{-1}(Y_j(f_{xx}))\partial_{t_{xxx}} + \dots. \quad (18)$$

ЛЕММА 2.4. Для операторов D_x , Y_1 , Y_{-1} , рассматриваемых в пространстве гладких функций переменных $t, t_x, t_{xx}, \dots$, выполняются коммутационные соотношения

$$[D_x, Y_1] = pY_1, \quad [D_x, Y_{-1}] = qY_{-1}, \quad (19)$$

где $p = -D^{-1}(\partial f / \partial t_1)$ и $q = -D(\partial g / \partial t_{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t} + D^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t_1}\right)\frac{\partial}{\partial t_x} + D^{-1}\left(\frac{\partial f_x}{\partial t_1}\right)\frac{\partial}{\partial t_{xx}} + \dots. \quad (20)$$

Найдем $[D_x, Y_1]$, используя формулу (16) в виде

$$[D_x, Y_1] = -D^{-1}(f_{t_1})\partial_t + D^{-1}(D_x(f_{t_1}) - f_{xt_1})\partial_{t_x} + \dots. \quad (21)$$

Для произвольной функции H имеем

$$\begin{aligned} [D_x, \partial_{t_1}]H(t, t_1, t_x, t_{xx}, \dots) &= D_x H_{t_1} - \frac{\partial}{\partial t_1} D_x H = \\ &= (H_{tt_1} t_x + H_{t_1 t_1} t_{1x} + \dots) - \frac{\partial}{\partial t_1} (H_t t_x + H_{t_1} t_{1x} + \dots) = -H_{t_1} f_{t_1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Полагая $H = f$ и $H = f_x$, получаем $[D_x, \partial_{t_1}]f = -f_{t_1} f_{t_1}$, $[D_x, \partial_{t_1}]f_x = -f_{xt_1} f_{t_1}$ и т.д. Подставляя эти уравнения в выражение (21), находим

$$\begin{aligned} [D_x, Y_1] &= -D^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t_1}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial t} + D^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t_1}\right)\frac{\partial}{\partial t_x} + D^{-1}\left(\frac{\partial f_x}{\partial t_1}\right)\frac{\partial}{\partial t_{xx}} + \dots\right\} = \\ &= -D^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t_1}\right)Y_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично можно показать, что $[D_x, Y_{-1}] = -D(\partial g / \partial t_{-1})Y_{-1}$.

Теперь докажем теорему 1.1. Предположим, что для уравнения (4) существует нетривиальный n -интеграл $F = F(t, t_x, \dots, t_{[N]})$, где $t_{[j]} = D_x^j t$ для любого натурального j . Тогда все векторные поля алгебры Ли M , порожденной $\{Y_j, X_k\}$ при $j = 1, 2, \dots$ и $k = 1, \dots, N_2$, где N_2 выбирается произвольным образом так, что $N_2 \geq N$, обращают F в нуль. Покажем, что $\dim M < \infty$. Сначала рассмотрим проекцию алгебры M , задаваемую оператором P_N :

$$P_N \left(\sum_{i=-N_2}^{-1} x(i) \partial_{t_i} + \sum_{i=0}^{\infty} x(i) \partial_{t_{[i]}} \right) = \sum_{i=-N_2}^{-1} x(i) \partial_{t_i} + \sum_{i=0}^N x(i) \partial_{t_{[i]}}. \quad (24)$$

Пусть $L_n(N)$ – проекция алгебры M . Тогда очевидно, что уравнение $Z_0 F = 0$ выполняется для любых Z_0 из $L_n(N)$ и $\dim L_n(N) < \infty$. Пусть набор $\{Z_{01}, Z_{02}, \dots, Z_{0N_1}\}$ образует базис в $L_n(N)$. Любое Z_0 из $L_n(N)$ можно представить как линейную комбинацию:

$$Z_0 = \alpha_1 Z_{01} + \alpha_2 Z_{02} + \dots + \alpha_{N_1} Z_{0N_1}. \quad (25)$$

Предположим, что векторные поля $Z, Z_1, \dots, Z_{N_1}$ из M связаны с операторами $Z_0, Z_{01}, \dots, Z_{0N_1}$ из $L_n(N)$ формулами $P_N(Z) = Z_0, P_N(Z_1) = Z_{01}, \dots, P_N(Z_{N_1}) = Z_{0N_1}$. Нам необходимо доказать, что

$$Z = \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \dots + \alpha_{N_1} Z_{N_1}. \quad (26)$$

Для этого используем следующую лемму.

ЛЕММА 2.5. Пусть $F_1 = D_x F$, а F – n -интеграл. Тогда для любого Z из M имеем $Z F_1 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что F_1 также является n -интегралом: действительно, $D F_1 = D D_x F = D_x D F = D_x F = F_1$. Выше было показано, что любое Z из M обращает в нуль n -интегралы.

Применим оператор $Z - \alpha_1 Z_1 - \alpha_2 Z_2 - \dots - \alpha_{N_1} Z_{N_1}$ к функции $F_1 = F_1(t, t_x, t_{xx}, \dots, t_{[N+1]})$:

$$(Z - \alpha_1 Z_1 - \alpha_2 Z_2 - \dots - \alpha_{N_1} Z_{N_1}) F_1 = 0. \quad (27)$$

Это выражение можно записать как

$$(Z_0 - \alpha_1 Z_{01} - \alpha_2 Z_{02} - \dots - \alpha_{N_1} Z_{0N_1}) F_1 + (X(N+1) - \alpha_1 X_1(N+1) - \alpha_2 X_2(N+1) - \dots - \alpha_{N_1} X_{N_1}(N+1)) \frac{\partial}{\partial t_{[N+1]}} F_1 = 0, \quad (28)$$

где $X(N+1), X_1(N+1), \dots, X_{N_1}(N+1)$ – коэффициенты при $\partial_{t_{[N+1]}}$ в векторных полях $Z, Z_1, Z_2, \dots, Z_{N_1}$. Первый член в формуле (28) обращается в нуль (см. линейную комбинацию (25)). Во втором члене множитель $\partial F_1 / \partial t_{[N+1]} = \partial F / \partial t_{[N]}$ является ненулевым. Тогда получаем

$$X(N+1) = \alpha_1 X_1(N+1) + \alpha_2 X_2(N+1) + \dots + \alpha_{N_1} X_{N_1}(N+1). \quad (29)$$

Уравнение (29) показывает, что

$$P_{N+1}(Z) = \alpha_1 P_{N+1}(Z_1) + \alpha_2 P_{N+1}(Z_2) + \dots + \alpha_{N_1} P_{N+1}(Z_{N_1}). \quad (30)$$

Таким образом, по индукции можно доказать формулу (26). Поэтому алгебра Ли M конечномерна. Теперь построим характеристическую алгебру L_n , используя M . Поскольку $\dim M < \infty$, линейная оболочка векторных полей $\{Y_j\}_1^\infty$ конечномерна. Выберем базис в этом линейном пространстве, состоящий из $Y_1, Y_2, \dots, Y_K$, где $K \leq N \leq N_2$. Тогда алгебра, порожденная $Y_1, Y_2, \dots, Y_K, X_1, X_2, \dots, X_K$, конечномерна, потому что она представляет собой подалгебру алгебры M . Именно эта алгебра является характеристической алгеброй Ли уравнения (4).

Предположим, что условия (1) и (2) теоремы 1.1 выполнены. Тогда для уравнения (4) существует конечномерная характеристическая алгебра Ли L_n . Покажем, что в этом случае уравнение (4) допускает нетривиальный n -интеграл. Пусть N_1 – размерность L_n , а N – размерность линейной оболочки векторных полей $\{Y_j\}_{j=1}^\infty$. Возьмем проекцию $L_n(N_2)$ алгебры L_n , которая определяется оператором P_{N_2} из формулы (24). Очевидно, что $L_n(N_2)$ состоит из конечных сумм $Z_0 = \sum_{i=-N}^{-1} x(i) \partial_{t_i} + \sum_{i=0}^{N_2} x(i) \partial_{t_{[i]}}$, где $N = N_1 - N_2$. Пусть $Z_{01}, \dots, Z_{0N_1}$ – базис в $L_n(N)$. Тогда имеем $N_1 = N + N_2$ уравнений $Z_{0j}G = 0$, $j = 1, \dots, N_1$, для функции G , зависящей от $N + N_2 + 1 = N_1 + 1$ независимых переменных. Следовательно, согласно хорошо известной теореме Якоби существует функция $G = G(t_{-N_2}, t_{-N_2+1}, \dots, t_{-1}, t, t_x, t_{xx}, \dots, t_{[N]})$, удовлетворяющая уравнению $ZG = 0$ для любого Z из L_n . Однако в действительности она не зависит от $t_{-N_2}, \dots, t_{-1}$, поскольку $X_1G = 0$, $X_2G = 0$, $\dots$, $X_{N_2}G = 0$. Поэтому функция G имеет вид $G = G(t, t_x, t_{xx}, \dots, t_{[N]})^1$.

Отметим еще одно свойство алгебры L_n . Пусть π – отображение, переводящее каждое Z из L_n в его сопряжение $D^{-1}ZD$. Очевидно, что отображение π действует из алгебры L_n в ее центральное расширение $L_n \oplus \{X_{N_1+1}\}$, поскольку для генераторов алгебры L_n мы имеем $D^{-1}Y_jD = Y_{j+1}$ и $D^{-1}X_jD = X_{j+1}$, и $[X_{N_1+1}, Y_j] = 0$ и $[X_{N_1+1}, X_j] = 0$ для любого целочисленного $j \leq N_1$. Более того, $X_{N_1+1}F = 0$ для упомянутой выше функции $G = G(t, t_x, \dots, t_{[N]})$. Из этого факта следует, что $ZG_1 = 0$ для $G_1 = DG$ и для любого векторного поля Z из L_n . Действительно, для любого Z из L_n имеется представление вида $D^{-1}ZD = \tilde{Z} + \lambda X_{N_1+1}$, где $\tilde{Z}$ из L_n , а λ – функция. Тогда

$$ZG_1 = ZDG = D(D^{-1}ZDG) = D(\tilde{Z} + \lambda X_{N_1+1})G = 0, \quad (31)$$

поэтому $G_1 = h(G)$ или $DG = h(G)$. Другими словами, функция $G = G(n)$ удовлетворяет обыкновенному разностному уравнению первого порядка. Его общее решение можно записать в виде $G = H(n, c)$, где H – функция двух переменных, а c – произвольная постоянная. Решая уравнение $G = H(n, c)$ относительно c , получаем $c = F(G, n)$. Найденная функция $F = F(G, n)$ представляет собой не что иное, как искомый n -интеграл. Действительно, $DF(G, n) = Dc = c = F(G, n)$, поэтому $DF = F$. Это завершает доказательство теоремы 1.1.

¹⁾Такая функция не единственна: любое другое решение этих уравнений, зависящее от того же набора переменных, можно представить как $h(G)$ для некоторой функции h .

3. ОГРАНИЧЕННАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ

Известны различные подходы к классификации интегрируемых нелинейных дифференциальных (псевдодифференциальных) уравнений. Один из наиболее популярных и мощных подходов основан на высших симметриях. Теоретические аспекты этого метода были впервые сформулированы в известной работе Ибрагимова и Шабата [8]. В работах [9] с помощью этого метода были проверены несколько классов нелинейных моделей. Симметричный подход позволил Ямилову найти все интегрируемые цепочки типа цепочек Вольтерра [10]: $u_t(n) = f(u(n-1), u(n), u(n+1))$. Последовательный подход к классификации интегрируемых дискретных уравнений рассматривался Адлером, Бобенко и Сурисом в работе [11]. Классификация, основанная на понятии рекурсионного оператора, исследовалась в работах [12].

В настоящей работе мы предприняли попытку использования понятия характеристической алгебры Ли в задаче классификации интегрируемых по Дарбу дискретных уравнений вида (4). Задача классификации состоит в описании всех цепочек, допускающих конечномерные характеристические алгебры Ли в обоих направлениях. В действительности задача изучения алгебры, порожденной операторами (8), представляется достаточно сложной. Вот почему мы начнем с очень простого случая.

Формулировка задачи. Рассмотрим задачу о нахождении всех уравнений (4), для которых алгебра Ли, порожденная операторами Y_1 и Y_{-1} , является двумерной.

Положим $Y_{1,-1} = [Y_1, Y_{-1}]$ и потребуем, чтобы выполнялось соотношение $Y_{1,-1} = \lambda Y_1 + \mu Y_{-1}$. Из явного вида формул (13) и (14) следует, что векторное поле $Y_{1,-1}$ не содержит слагаемого с $\partial/\partial t$, поэтому $\mu = -\lambda$. Коммутаторы базисных векторных полей с оператором полной производной допускают простые выражения (см. лемму 2.4). Вычисляя коммутатор $[D_x, Y_{1,-1}]$, получаем

$$\begin{aligned} [D_x, Y_{1,-1}] &= [Y_1, [D_x, Y_{-1}]] - [Y_{-1}, [D_x, Y_1]] = \\ &= [Y_1, qY_{-1}] - [Y_{-1}, pY_1] = Y_1(q)Y_{-1} + qY_{1,-1} - Y_{-1}(p)Y_1 + pY_{1,-1} = \\ &= (p+q)Y_{1,-1} + Y_1(q)Y_{-1} - Y_{-1}(p)Y_1. \end{aligned}$$

Напомним, что согласно приведенным выше аргументам должен существовать такой коэффициент $\lambda = \lambda(n, x)$, что

$$Y_{1,-1} = \lambda(Y_1 - Y_{-1}). \quad (32)$$

Задача состоит в нахождении такой функции f в уравнении $t_{1x} = f(t, t_1, t_x)$, чтобы выполнялось условие (32).

Прокоммутируем обе части уравнения (32) с оператором D_x :

$$\begin{aligned} [D_x, Y_{1,-1}] &= [D_x, \lambda Y_1] - [D_x, \lambda Y_{-1}] = \\ &= (p+q)\lambda(Y_1 - Y_{-1}) + Y_1(q)Y_{-1} - Y_{-1}(p)Y_1 = \\ &= D_x(\lambda)Y_1 + \lambda pY_1 - D_x(\lambda)Y_{-1} - \lambda qY_{-1}, \end{aligned}$$

и сравним два различных выражения для коммутатора. Это приводит к условиям

$$q\lambda - Y_{-1}(p) = D_x(\lambda), \quad p\lambda - Y_1(q) = D_x(\lambda), \quad (33)$$

образующим переопределенную систему для неизвестного коэффициента λ (который должен удовлетворять двум уравнениям одновременно). Решая их относительно λ и $D_x(\lambda)$, получаем уравнения

$$\lambda = \frac{Y_{-1}(p) - Y_1(q)}{q - p}, \quad D_x(\lambda) = \frac{qY_1(q) - pY_{-1}(p)}{p - q}, \quad (34)$$

которые немедленно дают

$$D_x \left(\frac{Y_{-1}(p) - Y_1(q)}{q - p} \right) = \frac{pY_{-1}(p) - qY_1(q)}{q - p}. \quad (35)$$

Сначала заметим, что это уравнение содержит как f , так и обратную к ней функцию g . Исключим g . Напомним, что $t_{1x} = f(t, t_1, t_x)$ и $t_x = f(t_{-1}, t, t_{-1x})$, где $t_{-1x} = g(t, t_{-1}, t_x)$. Дифференцируя тождество $t_x = f(t_{-1}, t, g(t, t_{-1}, t_x))$ по t_{-1} , получаем

$$D^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, t_1, t_x) \right) + D^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}(t, t_1, t_x) \right) \frac{\partial g}{\partial t_{-1}} = 0, \quad (36)$$

откуда следует, что

$$g_{t_{-1}} = -D^{-1} \left(\frac{f_t}{f_{t_x}} \right), \quad (37)$$

поэтому $D(g_{t_{-1}}) = -f_t/f_{t_x}$. Запишем уравнение (35) в явном виде. Сначала вычислим $Y_1(q)$ и $Y_{-1}(p)$, где $p = -D^{-1}(f_{t_1})$ и $q = f_t/f_{t_x}$:

$$\begin{aligned} Y_1(q) &= \left\{ \partial_t + D^{-1}(f_{t_1})\partial_{t_x} + D^{-1}(f_{xt_1})\partial_{t_{xx}} + \dots \right\} \frac{f_t}{f_{t_x}} = \\ &= \left(\frac{f_t}{f_{t_x}} \right)_t + D^{-1}(f_{t_1}) \left(\frac{f_t}{f_{t_x}} \right)_{t_x}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} Y_{-1}(p) &= - \left\{ \partial_t - \frac{f_t}{f_{t_x}}\partial_{t_x} - D \left(\frac{\partial g_x}{\partial t_{-1}} \right) \partial_{t_{xx}} - \dots \right\} D^{-1}(f_{t_1}) = \\ &= -(D^{-1}(f_{t_1}))_t + \frac{f_t}{f_{t_x}} (D^{-1}(f_{t_1}))_{t_x}. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя эти равенства в выражение (35), получаем

$$\begin{aligned} D_x \left\{ \frac{-(D^{-1}(f_{t_1}))_t + (f_t/f_{t_x})(D^{-1}(f_{t_1}))_{t_x} - ((f_t/f_{t_x})_t + D^{-1}(f_{t_1})(f_t/f_{t_x})_{t_x}))}{f_t/f_{t_x} + D^{-1}(f_{t_1})} \right\} = \\ = \frac{D^{-1}(f_{t_1})((D^{-1}(f_{t_1}))_t - (f_t/f_{t_x})(D^{-1}(f_{t_1}))_{t_x})}{f_t/f_{t_x} + D^{-1}(f_{t_1})} - \\ - \frac{(f_t/f_{t_x})((f_t/f_{t_x})_t + D^{-1}(f_{t_1})(f_t/f_{t_x})_{t_x})}{f_t/f_{t_x} + D^{-1}(f_{t_1})}. \end{aligned} \quad (40)$$

Уравнение (40) довольно сложно для рассмотрения, поэтому мы наложим еще одно условие на f . Предположим, что $f = a(t) + b(t_1) + c(t_x)$. Тогда найдем переменные $p, q, Y_1(q), Y_{-1}(p)$ в терминах a, b, c :

$$\begin{aligned} p &= -D^{-1}(f_{t_1}) = -b'(t), \\ q &= -D(g_{t_{-1}}) = \frac{f_t}{f_{t_x}} = \frac{a'(t)}{c'(t_x)}, \\ Y_1(q) &= (\partial_t + b'(t)\partial_{t_x}) \frac{a'(t)}{c'(t_x)} = \frac{a''(t)}{c'(t_x)} - \frac{b'(t)a'(t)c''(t_x)}{(c'(t_x))^2}, \\ Y_{-1}(p) &= \left(\partial_t - \frac{a'(t)}{c'(t_x)} \partial_{t_x} \right) (-b'(t)) = -b''(t). \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в формулу (35) дает

$$D_x G(t, t_x) = \frac{b'(t)b''(t) - (a'(t)/c'(t_x)) \left[(a''(t)/c'(t_x)) - (b'(t)a'(t)c''(t_x)/(c'(t_x))^2) \right]}{a'(t)/c'(t_x) + b'(t)}, \quad (41)$$

где

$$G(t, t_x) = \frac{-b''(t) - (a''(t)/c'(t_x)) + (b'(t)a'(t)c''(t_x)/(c'(t_x))^2)}{a'(t)/c'(t_x) + b'(t)}. \quad (42)$$

Очевидно, что левая часть уравнения (41) имеет вид $(\partial G/\partial t)t_x + (\partial G/\partial t_x)t_{xx}$ и содержит переменную t_{xx} , а в правой части ее нет. Это налагает дополнительное ограничение $\partial G/\partial t_x = 0$.

Исследование уравнения (41) является утомительно длинным, поэтому мы приведем только окончательные результаты. Детали можно найти в работе [13].

ТЕОРЕМА 3.1. Если уравнение (4) с частным выбором $f(t, t_1, t_x) = a(t) + b(t_1) + c(t_x)$ имеет операторы Y_1 и Y_{-1} такие, что алгебра Ли, порожденная этими двумя операторами, является двумерной, то функция $f(t, t_1, t_x)$ описывается одной из следующих формул:

- 1) $f(t, t_1, t_x) = c(t_x) + \gamma t_1 + \beta$,
- 2) $f(t, t_1, t_x) = \gamma \ln |t_x| + \frac{1}{\gamma} \ln(e^t - e) + \beta$,
- 3) $f(t, t_1, t_x) = \gamma(t_x + \beta e^{\alpha t}) + \beta e^{\alpha t_1} + \eta$,
- 4) $f(t, t_1, t_x) = \gamma(t_x + \beta \operatorname{sh}(\alpha t + \lambda)) + \beta \operatorname{ch} t_1 + \eta$,
- 5) $f(t, t_1, t_x) = \gamma t_x^2 + \beta t_x + \alpha t + \eta$,

где $c(t_x)$ – произвольная функция, а $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ и η – произвольные константы.

Кроме того, в случаях 1, 3 и 4, если соответствующие характеристические алгебры Ли также являются двумерными, уравнения имеют вид

- а) $t_{1x} = t_x$,
- б) $t_{1x} = t_x + e^t + e^{t_1}$,
- в) $t_{1x} = t_x + \beta \operatorname{sh} t + \beta \operatorname{ch} t_1$

и имеют соответствующие n -интегралы

$$\begin{aligned} I &= t_{xx}, \\ I &= \frac{e^{2t}}{2} + \frac{t_x^2}{2} - t_{xx}, \\ I &= \frac{\beta^2}{2} \operatorname{ch}^2 t - \beta t_x \operatorname{ch} t + \frac{t_x^2}{2} + \beta t_x \operatorname{sh} t - t_{xx} + \frac{\beta^2}{2} n. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае “б” есть также x -интеграл вида

$$F = e^{t_1-t} + e^{2t_1-t_2-t} + e^{t_1-t_2}. \quad (43)$$

Таким образом, уравнение $t_{1x} = t_x + e^t + e^{t_1}$ является дискретным аналогом уравнения Лиувилля.

Благодарности. Авторы благодарят профессора М. Гюрсес за плодотворные обсуждения. Один из авторов (А. П.) благодарит TUBİTAK, другой (И. Х.) выражает благодарность TUBİTAK, the Integrated PhD. Program (BDP) и РФФИ (гранты № 05-01-00775, 06-01-92051-CE_a) за частичную финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal*, Partie 2, Gautier-Villars, Paris, 1915.
- [2] A. M. Grundland, P. Vassiliou, “Riemann double waves, Darboux method and the Painlevé property”, *Painlevé Transcendents, their Asymptotics and Physical Applications*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B. Phys. (Sainte-Adèle, Canada, 1990), **278**, eds. D. Levi, P. Winternitz, Plenum, New York, 1992, 163–174.
- [3] V. V. Sokolov, A. V. Zhiber, *Phys. Lett. A*, **208**:4–6 (1995), 303–308; I. M. Anderson, N. Kamran, *Duke Math. J.*, **87**:2 (1997), 265–319.
- [4] Шабат А. Б., Ямилов Р. И., *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана*, Препринт, Башкирский филиал АН СССР, Уфа, 1981; А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **51**:1 (1982), 10–21.
- [5] В. Е. Адлер, С. Я. Старцев, *ТМФ*, **121**:2 (1999), 271–284.
- [6] F. W. Nijhoff, H. W. Capel, *Acta Appl. Math.*, **39** (1995), 133–158; B. Grammaticos, G. Karra, V. Papageorgiou, A. Ramani, “Integrability of discrete-time systems”, *Chaotic Dynamics* (Patras, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B. Phys., **298**, Plenum, New York, 1992, 75–90.
- [7] I. T. Habibullin, *SIGMA*, **1** (2005), 023; [nlin.SI/0506027](https://arxiv.org/abs/nlin.SI/0506027).
- [8] Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прилож.*, **14**:1 (1980), 25–36.
- [9] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *УМН*, **42**:4 (1987), 3–53; R. I. Yamilov, D. Levi, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **11**:1 (2004), 75–101.
- [10] Р. И. Ямилов, *УМН*, **38**:6 (1983), 155–156.
- [11] V. E. Adler, A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Comm. Math. Phys.*, **233**:3 (2003), 513–543.
- [12] M. Gürses, A. Karasu, *J. Math. Phys.*, **36** (1995), 3485; [solv-int/9411004](https://arxiv.org/abs/solv-int/9411004); *Phys. Lett. A*, **214** (1996), 21–26; **251** (1999), 247–249; [solv-int/9811013](https://arxiv.org/abs/solv-int/9811013); M. Gürses, A. Karasu, R. Turhan, *J. Phys. A*, **34** (2001), 5705–5711; [nlin.SI/0101031](https://arxiv.org/abs/nlin.SI/0101031).
- [13] I. Habibullin, A. Pekcan, *Characteristic Lie algebra and classification of semi-discrete models*, [nlin.SI/0610074](https://arxiv.org/abs/nlin.SI/0610074).