Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Хорвати, Л. Мартина, Динамика квазиклассических волновых пакетов Блоха, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 3, 424–438

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6057>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:25:03

© 2007 г.

П. А. Хорвати*, Л. Мартина†

ДИНАМИКА КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ БЛОХА

Квазиклассическое приближение для электронных волновых пакетов в кристаллах приводит к уравнениям, которые могут быть получены в рамках лагранжева подхода или (при соответствующих условиях регулярности) гамильтонова подхода. Эти вопросы изучаются в плоском случае с помощью метода коприсоединенных орбит, применяемого к “расширенной” группе Галилея.

Ключевые слова: волновые пакеты, квазиклассическая динамика, фаза Берри, гамильтонова механика.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обычная квазиклассическая динамика электрона Блоха в твердом теле [1] объясняет различные свойства металлов, полупроводников и диэлектриков. Тем не менее в последнее время активно рассматривается проблема того, что правильная динамика волновых пакетов должна также учитывать геометрические фазовые эффекты (эффекты Берри) [2]. Последние изменяют транспортные свойства металлов и полупроводников и приводят к новому пониманию аномального эффекта Холла [3], [4].

С теоретической точки зрения возникают две проблемы: определение точности квазиклассического приближения, получаемого из зависящего от времени вариационного принципа в квантовой механике [5], и анализ геометрической структуры динамических систем, описывающих эволюцию электронных волновых пакетов. Гамильтонова структура этих моделей учитывает фазовые эффекты Берри за счет некоммутативности координат и реализует, по крайней мере в плоском случае, двукратное центральное расширение симметрий Галилея [6].

В случае однородных электромагнитных полей эта структура допускает дальнейшее расширение: пространственно независимые поля могут рассматриваться как

*Laboratoire de Mathématiques et de Physique Théorique Université de Tours, Parc de Grandmont, F-37 200, Tours, France. E-mail: horvathy@lmpt.univ-tours.fr

†Dipartimento di Fisica dell'Università and Sezione INFN di Lecce, Via Arnesano, CP, 193 I-73 100, Lecce, Italy. E-mail: Luigi.Martina@le.infn.it

дополнительные “координаты”, которые добавлены к обычным пространственно-временным координатам. Симметрии объединенной структуры образуют “расширенную” группу, или группу Максвелла–Галилея [7], [8], в которую помимо обычных пространственно-временных симметрий Галилея вовлечены также компоненты полей, см. далее формулу (45).

Впервые физические реализации такой симметрии были представлены в работах [9], [10]. Частицы такого типа связаны с “анионами” и могут быть использованы для объяснения дробного квантового эффекта Холла [11]. Трудности возникают при попытке учесть внешнее электромагнитное поле, но они могут быть частично преодолены, если использовать методы коприсоединенных орбит на большей группе симметрий [7]. Похожие симплектические структуры могут возникать также в пространстве трех измерений [12], [13].

В разделе 2 мы кратко напомним основные идеи, связанные с квазиклассическим приближением для электронных волновых пакетов Блоха. В разделе 3 рассматриваются лагранжев и гамильтонов формализмы. В разделе 4, рассматривая упрощенный вариант (решая задачу на плоскости, но учитывая взаимодействия с постоянными внешними полями), мы изучаем общее геометрическое описание этих формализмов с привлечением метода присоединенных орбит.

2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Уравнение Шредингера может быть получено из функционала действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L_S dt, \quad L_S = \frac{i}{2} \frac{\langle \Psi | \frac{d\Psi}{dt} \rangle - \langle \frac{d\Psi}{dt} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} - \frac{\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}, \quad (1)$$

если потребовать, чтобы действие было стационарно на “классической” волновой функции $|\Psi\rangle$. Последняя принадлежит подходящему гильбертову пространству, на котором действует эрмитов оператор Гамильтона $\hat{H}$. Обычное уравнение Шредингера получается после подходящей нормировки фазы [5].

Для вывода квазиклассического приближения из вариационного принципа нужно ограничиться некоторой определенной априори областью гильбертова пространства и выбрать подходящую параметризацию волновой функции $|\Psi\rangle$ так, чтобы вариационный принцип выделял наилучшее приближение для эволюции во времени. В частности, для бесспиновой точечной частицы в качестве основных параметров можно ввести средние значения координат $\vec{r}_c(t)$ и импульсов $\vec{q}_c(t)$. Пренебрегая всеми остальными деталями временной эволюции волновых пакетов, сделаем в лагранжиане (1) замену $|\Psi\rangle \rightarrow |\tilde{\Psi}[\vec{r}_c(t), \vec{q}_c(t)]\rangle$ и будем искать самосогласованные уравнения для указанных параметров.

Динамика электрона в кристаллической решетке определяется, как обычно, первично квантованным оператором Гамильтона

$$\hat{H}[\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}, f(\hat{\vec{r}}, t)], \quad (2)$$

где $\hat{\vec{r}}$ и $\hat{\vec{p}}$ – операторы координаты и импульса, удовлетворяющие перестановочным соотношениям Гейзенберга. Функция f (возможно, векторная и зависящая от времени) представляет дифференцируемые “медленные” модуляции в пространстве относительно постоянного фонового потенциала решетки, так что $\hat{H}_c = \hat{H}[\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}, c]$ – периодический оператор Гамильтона для любого параметра c . Чтобы оправдать выбранную параметризацию, необходимо рассмотреть три феноменологических масштаба длин, а именно характерную постоянную решетки l_{latt} , длину дисперсии волнового пакета l_{wp} и длину волны модуляций l_{mod} . Эти величины связаны следующим соотношением: $l_{\text{latt}} \ll l_{\text{wp}} \ll l_{\text{mod}}$. Предполагая регулярную зависимость оператора Гамильтона (2) от модуляций, можно ограничиться его разложением с точностью до членов первого порядка около мгновенного среднего положения $\vec{r}_c$, что дает

$$\hat{H} = \hat{H}_{(\vec{r}_c, t)} + \frac{1}{2} [\partial_f \hat{H}_{\vec{r}_c} f(\vec{r}_c, t) \cdot (\hat{\vec{r}} - \vec{r}_c) + \text{э.с.}], \quad (3)$$

где $\hat{H}_{(\vec{r}_c, t)}$ принадлежит семейству гамильтонианов $\hat{H}_c$, $c = (\vec{r}_c, t)$. Таким образом, мы постулируем, что физические состояния включают (приближенное) решение уравнения Шредингера не только для конкретного значения $\vec{r}_c$, но и для всех возможных значений $\vec{r}_c(t)$, принадлежащих некоторому конфигурационному пространству, которое должно быть определено самосогласованным образом. В таком случае для любого $\vec{r}_c$ можно выбрать ортонормированный базис из собственных векторов, зависящих от параметров гамильтонианов Блоха $\hat{H}_{(\vec{r}_c, t)}$,

$$\hat{H}_{(\vec{r}_c, t)} |\psi_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}}\rangle = E_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}} |\psi_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}}\rangle, \quad \langle \psi_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}} | \psi_{(\vec{r}_c, t)}^{n', \vec{q}'} \rangle = \delta_{n, n'} \delta(\vec{q} - \vec{q}'), \quad (4)$$

где собственные значения (уровни энергии) $E_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}}$ различаются номером зоны n и квазиимпульсом $\vec{q}$, причем можно ограничиться случаем, когда последний принадлежит первой зоне Бриллюэна (ПЗБ). В координатном представлении собственные функции Блоха принимают вид

$$\langle \vec{r} | \psi_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}} \rangle = e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} u_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}}(\vec{r}), \quad u_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}}(\vec{r} + \vec{a}) = u_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}}(\vec{r}), \quad (5)$$

где $u_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}}(\vec{r})$ – периодическая часть волновой функции, которая предполагается аналитической по $(\vec{r}_c, t)$. Зависимость от времени в задаче на собственные значения (4) предполагается адиабатической, так что собственные значения $E_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}}$ образуют хорошо разделенные зоны. Это не всегда имеет место, но можно предполагать, что вырождение возникает в изолированных точках ПЗБ, которые не рассматриваются в настоящем исследовании. Однако существуют эффекты, которые могут зависеть от деталей поведения (квази)вырожденных зон, если уровень Ферми оказывается близок к их значениям энергии [4]. Кроме того, мы предполагаем модуляции настолько слабыми, что резкие изменения зон запрещены.

В соответствии с классическим результатом Карплуса и Латтинжера [2] матричный элемент оператора координаты между двумя волновыми функциями Блоха имеет вид

$$\langle \psi_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}} | \hat{\vec{r}} | \psi_{(\vec{r}_c, t)}^{n', \vec{q}'} \rangle = [i\nabla_{\vec{q}} + \langle u_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}}(\vec{r}) | i\nabla_{\vec{q}} u_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}}(\vec{r}) \rangle_{\text{cell}}] \delta(\vec{q}' - \vec{q}) \delta_{n, n'}, \quad (6)$$

т.е. в пространстве, порожденном волновыми функциями Блоха, оператор $\hat{r}$ действует следующим образом:

$$\hat{r} = i\nabla_{\vec{q}} + \vec{Q}^n(\vec{r}_c, \vec{q}, t), \quad \vec{Q}^n(\vec{r}_c, \vec{q}, t) = \langle u_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}} \mid i\nabla_{\vec{q}} u_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}} \rangle_{\text{cell}}, \quad (7)$$

где $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\text{cell}}$ – сужение скалярного произведения на единичную ячейку для пространства $\mathcal{L}_{\text{cell}}^2$ с периодическими граничными условиями, $(2\pi)^3/V_{\text{cell}}$ – нормировочный множитель. Величина $\vec{Q}^n(\vec{r}_c, \vec{q}, t)$ здесь может интерпретироваться как $U(1)$ -калибровочная связь и отождествляться со *связью Берри*.

Компоненты оператора координаты, вообще говоря, перестают быть коммутирующими:

$$[\hat{r}_j, \hat{r}_l] = i(\partial_{q_j} \mathcal{Q}_l^n(\vec{r}_c, \vec{q}, t) - \partial_{q_l} \mathcal{Q}_j^n(\vec{r}_c, \vec{q}, t)) \equiv i\Theta_{j,l}^n(\vec{r}_c, \vec{q}, t), \quad (8)$$

где антисимметричный тензор

$$\Theta^n(\vec{r}_c, \vec{q}, t) = (\Theta_{j,l}^n) = i\langle \nabla_{\vec{q}} u_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}} \mid \times \mid \nabla_{\vec{q}} u_{(\vec{r}_c, t)}^{n, \vec{q}} \rangle_{\text{cell}} \quad (9)$$

является калибровочно-инвариантной *кривизной Берри*.

Таким образом, фаза Берри превращает динамику обычной частицы в периодическом фоновом потенциале в квантовомеханическую систему, существующую в некоммутативном конфигурационном пространстве [14].

Теперь мы хотим из волновых функций Блоха (4), (5), принадлежащих одной энергетической зоне (например, n ; индекс в дальнейшем опускается), построить волновые пакеты вида

$$\mid \tilde{\Psi}[\vec{r}_c(t), \vec{q}_c(t)] \rangle = \int_{\text{ПЗБ}} \Phi(\vec{q}, t) \mid \psi_{(\vec{r}_c, t)}^{\vec{q}} \rangle d\vec{q}, \quad (10)$$

где нормированная (условием $\int_{\text{ПЗБ}} |\Phi(\vec{q}, t)|^2 d\vec{q} = 1$) амплитуда квазиимпульса $\Phi(\vec{q}, t)$ выбирается таким образом, что ее дисперсия Δ_q в импульсном пространстве мала по сравнению с характерным размером ПЗБ, имеющим порядок $2\pi/l_{\text{latt}}$. Кроме того, будем описывать квазиклассическое приближение волновой функции с помощью среднего квазиимпульса

$$\vec{q}_c(t) = \int_{\text{ПЗБ}} \vec{q} |\Phi(\vec{q}, t)|^2 d\vec{q}, \quad (11)$$

и средней координаты

$$\begin{aligned} \vec{r}_c(t) &= \langle \tilde{\Psi}[\vec{r}_c(t), \vec{q}_c(t)] \mid \hat{r} \mid \tilde{\Psi}[\vec{r}_c(t), \vec{q}_c(t)] \rangle = \\ &= \int_{\text{ПЗБ}} |\Phi(\vec{q}, t)|^2 [-\nabla_{\vec{q}} \arg[\Phi(\vec{q}, t)] + \vec{Q}(\vec{r}_c, \vec{q}, t)] d\vec{q} \approx \\ &\approx -\nabla_{\vec{q}_c} \arg[\Phi(\vec{q}_c, t)] + \vec{Q}(\vec{r}_c, \vec{q}_c, t) \end{aligned} \quad (12)$$

(мы использовали соотношение (6)). В последнем приближенном равенстве оставлены только вклады нулевого порядка по величинам дисперсии волнового пакета в координатном пространстве и в пространстве импульсов, соответственно l_{wp} и Δ_q . В этом и состоит смысл квазиклассического приближения, используемого нами для

оценки лагранжиана (1) после подстановки в него волновой функции (10). Таким образом, мы получаем следующие приближенные соотношения:

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\Psi} \left| i \frac{d}{dt} \right| \tilde{\Psi} \right\rangle &\approx -\partial_t \arg[\Phi(\vec{q}_c, t)] + \langle u_{(\vec{r}_c, t)}^{\vec{q}_c} | i \partial_t u_{(\vec{r}_c, t)}^{\vec{q}_c} \rangle_{\text{cell}} + \dot{\vec{r}}_c \cdot \langle u_{(\vec{r}_c, t)}^{\vec{q}_c} | i \nabla_{\vec{r}_c} u_{(\vec{r}_c, t)}^{\vec{q}_c} \rangle_{\text{cell}} = \\ &= -\partial_t \arg[\Phi(\vec{q}_c, t)] + \mathcal{T}(\vec{r}_c, \vec{q}_c, t) + \dot{\vec{r}}_c \cdot \vec{\mathcal{R}}(\vec{r}_c, \vec{q}_c, t), \end{aligned} \quad (13)$$

где по аналогии с величиной $\vec{\mathcal{Q}}$ в (7) введены компоненты связи $\mathcal{T}$ и $\vec{\mathcal{R}}$. Первый член в правой части соотношения (13), включающий частную производную по времени от фазы распределения квазиимпульсов, может быть преобразован в выражение, содержащее полную производную по времени:

$$\begin{aligned} \partial_t \arg[\Phi(\vec{q}_c, t)] &= \frac{d}{dt} \arg[\Phi(\vec{q}_c, t)] - \dot{\vec{q}}_c \cdot \nabla_{\vec{q}_c} \arg[\Phi(\vec{q}_c, t)] = \\ &= \frac{d}{dt} \arg[\Phi(\vec{q}_c, t)] + \dot{\vec{q}}_c \cdot [\vec{r}_c - \vec{\mathcal{Q}}(\vec{r}_c, \vec{q}_c, t)], \end{aligned} \quad (14)$$

где было использовано соотношение (12). Поэтому, принимая во внимание третий член в формуле (14), получаем, что в окончательное выражение для приближенного лагранжиана первые производные “обобщенных координат” $(\vec{r}_c, \vec{q}_c)$ будут входить только линейно. Фактически отбрасывание полных производных по времени позволяет записать лагранжиан в виде лагранжиана классической точечной частицы

$$\begin{aligned} L_{\text{app}} &= \dot{\vec{r}}_c \cdot (\vec{q}_c + \vec{\mathcal{R}}(\vec{r}_c, \vec{q}_c, t)) + \dot{\vec{q}}_c \cdot \vec{\mathcal{Q}}(\vec{r}_c, \vec{q}_c, t) + \mathcal{T}(\vec{r}_c, \vec{q}_c, t) - \\ &- \mathcal{E}(\vec{r}_c, \vec{q}_c, t) - \Delta \mathcal{E}(\vec{r}_c, \vec{q}_c, t), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\mathcal{E} = \langle \tilde{\Psi} | \hat{H}_{(\vec{r}_c, t)} | \tilde{\Psi} \rangle, \quad \Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \langle \tilde{\Psi} | [\partial_f \hat{H} \nabla_{\vec{r}_c} f(\vec{r}_c, t) \cdot (\dot{\vec{r}} - \vec{r}_c) + \dots] | \tilde{\Psi} \rangle. \quad (16)$$

Последнее выражение, вообще говоря, является достаточно сложным [2], однако нетрудно проверить, что оно принимает элегантный вид в случае внешнего электромагнитного поля, заданного потенциалами $(\vec{A}(\vec{r}, t), V_{\text{el}}(\vec{r}, t))$. Действительно, для медленно меняющихся векторных потенциалов решение приближенной задачи Блоха на собственные значения

$$\left[\frac{1}{2m} (\hat{p} + e\vec{A}(\vec{r}_c, t))^2 + V_{\text{latt}}(\vec{r}, t) - eV_{\text{el}}(\vec{r}_c, t) \right] \psi = E\psi \quad (17)$$

может быть записано в терминах функций

$$\psi'_{(\vec{r}_c, t)}^{\vec{q}} \approx \exp[i(\vec{q} - e\vec{A}(\vec{r}_c, t)) \cdot \vec{r}] u_{(\vec{r}_c, t)}^{\vec{q}}, \quad (18)$$

где $u_{(\vec{r}_c, t)}^{\vec{q}}$ – периодическая часть решения Блоха для того же кристалла при отсутствии магнитного поля. В силу своего определения в (7) пространственно-временное изменение фазы не влияет на связь Берри. Более того, $\vec{\mathcal{Q}}(\vec{r}_c, \vec{q}_c, t) = \vec{\mathcal{Q}}(\vec{k}_c)$, где

$$\vec{k}_c = \vec{q}_c + e\vec{A}(\vec{r}_c, t) \quad (19)$$

– калибровочно-инвариантный квазиимпульс. С другой стороны, из соотношения (13) имеем $\vec{\mathcal{R}}(\vec{r}_c, \vec{k}_c, t) \simeq e\nabla_{\vec{r}_c}(\vec{A}(\vec{r}_c, t) \cdot \vec{r}_c) - e\vec{A}(\vec{r}_c, t)$ и $\mathcal{T}(\vec{r}_c, \vec{k}_c, t) \simeq e\partial_t\vec{A}(\vec{r}_c, t) \cdot \vec{r}_c$. Далее, выражения для квазиклассического приближения энергии зоны и поправки к ней первого порядка принимают вид

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0(\vec{k}_c) + eV_{\text{el}}(\vec{r}_c, t), \quad \Delta\mathcal{E} = -\vec{M}(\vec{r}_c, \vec{k}_c, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}_c, t), \quad (20)$$

где $\vec{M}(\vec{r}_c, \vec{k}_c, t) = (-e/2m_e)\langle\tilde{\Psi}|\hat{L}|\tilde{\Psi}\rangle$ – локальный средний магнитный момент волнового пакета, а $\vec{B}(\vec{r}_c, t) = \nabla_{\vec{r}_c} \times \vec{A}(\vec{r}_c, t)$ – обычное выражение для среднего магнитного поля, действующего на волновой пакет. Аналогичное выражение для среднего электрического поля имеет вид $\vec{E}(\vec{r}, t) = \partial_t\vec{A}(\vec{r}, t) - \nabla_{\vec{r}}V_{\text{el}}(\vec{r}, t)$.

В заключение отметим, что свойства, обусловленные дискретными симметриями кристаллов, приводят к ограничениям в выражениях для рассмотренных выше связей Берри. В частности, инвариантность относительно обращения времени влечет за собой преобразование $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ и $\vec{\Theta}(-\vec{k}) = -\vec{\Theta}(\vec{k})$. Таким образом, величина $\vec{\Theta}$ всегда обращается в нуль при $\vec{k} = \vec{0}$. Кроме того, инверсия пространства означает, что $\vec{\Theta}(-\vec{k}) = \vec{\Theta}(\vec{k})$. Симметрия, связанная с одновременной инверсией пространства-времени, влечет $\vec{\Theta}(-\vec{k}) \equiv 0$. Отметим, наконец, что кристаллы, допускающие временную и пространственную инверсии, не могут нести в себе никакой двойственной магнитной структуры. Существуют, однако, конкретные примеры кристаллов, для которых одна из этих симметрий или обе симметрии одновременно нарушаются, так что геометрические фазовые эффекты имеют большое значение [2], [4].

3. ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА

Из квазиклассического лагранжиана (15) можно вывести уравнения движения волнового пакета

$$\begin{aligned} (1 + \Xi)\dot{\vec{r}} + \Theta\dot{\vec{q}} &= \nabla_{\vec{q}}[\mathcal{E} + \Delta\mathcal{E} - \mathcal{T}] + \partial_t\vec{\mathcal{Q}}, \\ X\dot{\vec{r}} + (1 + \Xi)\dot{\vec{q}} &= -\nabla_{\vec{r}}[\mathcal{E} + \Delta\mathcal{E} - \mathcal{T}] - \partial_t\vec{\mathcal{R}}, \end{aligned} \quad (21)$$

(индекс s для простоты опущен), где антисимметричные матрицы Ξ и X состоят из элементов

$$\begin{aligned} \Xi_{i,j}(\vec{r}, \vec{q}, t) &= \partial_{r_i}\mathcal{Q}_j - \partial_{q_j}\mathcal{R}_i = i(\langle\nabla_{\vec{q}}u_{(\vec{r},t)}^{\vec{q}}| \times |\nabla_{\vec{r}}u_{(\vec{r},t)}^{\vec{q}}\rangle_{\text{cell}})_{ij}, \\ X_{i,j}(\vec{r}, \vec{q}, t) &= \partial_{r_i}\mathcal{R}_j - \partial_{r_j}\mathcal{R}_i = i(\langle\nabla_{\vec{r}}u_{(\vec{r},t)}^{\vec{q}}| \times |\nabla_{\vec{r}}u_{(\vec{r},t)}^{\vec{q}}\rangle_{\text{cell}})_{ij}. \end{aligned} \quad (22)$$

Имеем также

$$\partial_t\vec{\mathcal{Q}} - \nabla_{\vec{q}}\mathcal{T} = 2\text{Im}\langle\nabla_{\vec{q}}u_{(\vec{r},t)}^{\vec{q}}| \partial_tu_{(\vec{r},t)}^{\vec{q}}\rangle_{\text{cell}}, \quad \nabla_{\vec{r}}\mathcal{T} - \partial_t\vec{\mathcal{R}} = -2\text{Im}\langle\nabla_{\vec{r}}u_{(\vec{r},t)}^{\vec{q}}| \partial_tu_{(\vec{r},t)}^{\vec{q}}\rangle_{\text{cell}}. \quad (23)$$

Эта динамическая система определена на касательном многообразии TM к конфигурационному пространству, параметризованному обобщенными координатами $\xi = (\vec{r}, \vec{q})$.

Система (21) может быть записана (по крайней мере в случае $\partial_t\vec{\mathcal{Q}} = \partial_t\vec{\mathcal{R}} = 0$) в терминах симплектической 2-формы

$$\omega = (\delta_{i,j} + \Xi_{ij})dr_i \wedge dq_j + \frac{1}{2}[X_{ij}dq_i \wedge dq_j - \Theta_{ij}dr_i \wedge dr_j] \quad (24)$$

и функции Гамильтона

$$\mathcal{H} = \mathcal{E} + \Delta\mathcal{E} - \mathcal{T}. \quad (25)$$

Система принимает вид $i_\Delta\omega = d\mathcal{H}$, где $\Delta = \dot{\vec{r}}\partial/\partial\vec{r} + \dot{\vec{q}}\partial/\partial\vec{q}$ [15], [16]. Поэтому ее движения можно рассматривать как интегральные кривые векторного поля Δ .

Предположим, кроме того, что 2-форма ω является замкнутой, т.е. $d\omega = 0$. Условие замкнутости формы ω эквивалентно следующим дифференциальным связям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j,k}\partial_{q_i}\Theta_{j,k} &= 0, & \varepsilon_{i,j,k}\partial_{r_i}X_{j,k} &= 0, \\ \partial_{q_j}\Xi_{i,j} &= -\partial_{r_j}\Theta_{i,j}, & \partial_{r_j}\Xi_{i,j} &= \partial_{q_j}X_{i,j}, \\ (1 - \delta_{h,k})\varepsilon_{k,i,j}\partial_{q_k}\Xi_{i,j} &= \varepsilon_{h,i,j}\partial_{r_h}\Theta_{i,j}, & (1 - \delta_{h,k})\varepsilon_{k,i,j}\partial_{r_k}\Xi_{i,j} &= -\varepsilon_{h,i,j}\partial_{q_h}X_{i,j}. \end{aligned} \quad (26)$$

В силу антисимметричности и дифференцируемости тензоров Θ , Ξ и X , определенных формулами (9) и (22), равенства, приведенные выше, автоматически выполнены для вариационной системы. Заметим, в частности, что первая пара уравнений в (26) представляет собой условия обращения в нуль дивергенции двух векторных полей $\varepsilon_{i,j,k}\Theta_{j,k}$ и $\varepsilon_{i,j,k}X_{j,k}$ в $\vec{q}$ - и $\vec{r}$ -пространствах, соответственно. Это обстоятельство будет иметь точный физический смысл в случае электронов Блоха, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем.

Если форма ω является невырожденной, ее можно обратить, и система примет гамильтонов вид [15], [16]. Невырожденная замкнутая 2-форма $\omega = \omega_{\alpha,\beta}d\xi_\alpha \wedge d\xi_\beta$ определяет, конечно, скобку Пуассона. Любой паре функций $f(\vec{r}, \vec{q})$ и $g(\vec{r}, \vec{q})$ ставится в соответствие выражение $\{f, g\} = \omega^{\alpha,\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta g$, где $\omega^{\alpha,\gamma}$ – матрица, обратная к симплектической, $\omega^{\alpha,\gamma}\omega_{\gamma,\beta} = \delta^\alpha_\beta$. Тогда уравнения Гамильтона принимают вид

$$\dot{\xi}_\alpha = \{\xi_\alpha, \mathcal{H}\}. \quad (27)$$

В вырожденном случае необходимо прибегнуть к симплектической редукции [15], [17].

В рассматриваемом здесь случае мы имеем блочную (6×6) -матрицу

$$\omega_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X & \mathbf{1} + \Xi \\ -\mathbf{1} + \Xi & -\Theta \end{pmatrix}, \quad (28)$$

которая является невырожденной при $1 - \frac{1}{2} \text{Tr}(\Xi^2 + X(\mathbf{1} + 2\Xi)\Theta) \neq 0$. Тогда матрица, обратная к симплектической, есть

$$\begin{aligned} \omega^{\alpha,\beta} &= -2 \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tr}(\Xi^2 + X(\mathbf{1} + 2\Xi)\Theta) \right)^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \Theta + [\Theta, \Xi] & [1 - \frac{\text{Tr}(\Xi^2 + X\Theta)}{2}] \mathbf{1} + (\Xi^2 + X\Theta)^T \\ -[1 - \frac{\text{Tr}(\Xi^2 + X\Theta)}{2}] \mathbf{1} - (\Xi^2 + X\Theta) & -X + [\Xi, X] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

На основании теоремы Дарбу о невырожденных симплектических формах можно найти канонические координаты, т.е. такие координаты, в которых $\omega_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда уравнение (27) примет обычный канонический вид; неудобство заключается в том, что гамильтониан может стать достаточно сложным.

Следует отметить, что наше описание сформулировано на касательном пространстве TM , а не на кокасательном расслоении, как это обычно принято в теории гамильтоновых систем.

Общим следствием рассмотренного геометрического формализма является то, что теорема Лиувилля остается справедливой для волновых пакетов электронов Блоха, а инвариантный объем изменяется по отношению к обычному выражению квазиклассического приближения [1] следующим образом:

$$\sqrt{\det \omega_{\alpha,\beta}} \prod dr_i \wedge dq_i = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tr}(\Xi^2 + X(1 + 2\Xi)\Theta) \right) \prod_i dr_i \wedge dq_i. \quad (30)$$

Прежде чем перейти к дальнейшим рассмотрениям, заметим, что при наличии внешнего электромагнитного поля уравнения (21) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \nabla_{\vec{q}} [\mathcal{E}_0(\vec{k}) - \vec{M}(\vec{r}, \vec{k}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)] - \dot{\vec{k}} \times \vec{\Theta}(\vec{k}), \\ \dot{\vec{k}} &= -e(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t) + \vec{E}(\vec{r}, t)) + \nabla_{\vec{r}} (\vec{M}(\vec{r}, \vec{k}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)), \end{aligned} \quad (31)$$

где введено так называемое “дуальное”, или “двойственное”, магнитное поле $\Theta_i(\vec{k}) = \epsilon_{ijk} \Theta_{j,k}(\vec{k})/2$.

С помощью уравнений (31) можно получить оценку для средней скорости электрона: $\vec{v} = \langle \Psi | \nabla_{\vec{k}} \hat{H} | \Psi \rangle \approx \langle \tilde{\Psi} | \nabla_{\vec{k}} \hat{H} | \tilde{\Psi} \rangle$. Это, в частности, позволяет объяснить аномальный эффект Холла, предсказанный Карплусом и Латтинджером полвека назад [3]. Действительно, в случае обращаемого в нуль магнитного поля и электрического поля вида $\vec{E} = E\hat{x}$ получаем

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{v}(\vec{k}) = \nabla_{\vec{k}} \mathcal{E}_0(\vec{k}) + eE\Theta_z(\vec{k})\hat{y}, \\ \dot{\vec{k}} &= \vec{k}_0 - eEt\hat{x}. \end{aligned} \quad (32)$$

На макроскопическом уровне для статических однородных электрического и температурного полей электрический ток будет даваться средним значением

$$\vec{j} = -e \int_{\text{ПЗВ}} \frac{d^3 \vec{k}}{4\pi^3} \vec{v}(\vec{k}) g(\vec{r}, \vec{k}) \quad (33)$$

с подходящей неравновесной функцией распределения $g(\vec{r}, \vec{k})$. Хорошим приближением распределения является функция $g(\vec{r}, \vec{k}) = f_{\text{FD}}(\mathcal{E}) + e\tau(\mathcal{E}) \frac{\partial f_{\text{FD}}}{\partial \mathcal{E}} \vec{E} \cdot \vec{v}$ (см. [1]), где $f_{\text{FD}}(\mathcal{E}(\vec{k}))$ – распределение Ферми–Дирака, а τ – время релаксации, т.е. величина, обратная вероятности рассеяния электрона с импульсом $\vec{k}$ в единицу времени. В простейшей ситуации заполненной зоны, т.е. при $f_{\text{FD}} \equiv 1$, выражение для тока (33) будет содержать только вклад Холла, который принимает вид

$$j_y = -e^2 E \int_{\text{ПЗВ}} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \Theta_z(\vec{k}). \quad (34)$$

Таким образом, этот “аномальный” эффект Холла связан исключительно с существованием обратного магнитного поля $\vec{\Theta}$. Более того, для призматической фундаментальной ячейки обратной решетки выражение (34) пропорционально k_z -компоненте интегрального потока величины Θ_z через поверхность, образованную пересечением ПЗБ с плоскостью (k_x, k_y) . В действительности, поскольку подынтегральное выражение связано с кривизной Берри (см. (9)), такой поток интерпретируется как первое число Черна (которое является топологическим инвариантом, принимающим целые значения) главного расслоения, порождаемого приклеиванием в каждой точке ПЗБ $U(1)$ -слоя, которому принадлежит связь Берри [18], [19].

4. ГРУППА СИММЕТРИЙ И СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

Уравнения движения типа (31) в размерности $2+1$ изучались рядом авторов с точки зрения симметрий, в частности, исходя из плоской группы Галилея. Эта группа допускает двукратное центральное расширение, которое характеризуется массой m и “экзотическим” параметром κ . Последний может интерпретироваться как частный случай фазы Берри. Он фигурирует в модели, рассмотренной в работах [8], [10], где также изучалось взаимодействие с внешним электромагнитным полем.

Рассмотрим в двумерном калибровочно-инвариантном импульсном пространстве линейную связь Берри, равную $\vec{Q}_i(\vec{k}) = -\theta\epsilon_{i,j}k_j/2$ по модулю дополнительных калибровочных преобразований по $\vec{k}$. Это приводит к постоянной кривизне Берри $\Theta_3 = -\theta$, которая связана с “экзотическим” зарядом κ группы симметрий Галилея. Тогда лагранжиан первого порядка (15) упрощается и принимает вид

$$L = \vec{k} \cdot \dot{\vec{r}} - \frac{\vec{k}^2}{2m} + e(\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} + V_{\text{el}}) + \frac{\theta}{2} \vec{k} \times \dot{\vec{k}}, \quad (35)$$

где электромагнитное поле зависит только от переменных (r_1, r_2, t) . Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа, уточняющие (31), суть

$$m^* \dot{\vec{r}} = \vec{k} - em\theta\hat{e}\vec{E}, \quad \dot{\vec{k}} = eB\hat{e}\dot{\vec{r}} + e\vec{E}, \quad (36)$$

где $m^* = m(1 - e\theta B)$ – эффективная масса, а через $\hat{e}$ обозначен оператор поворота векторов плоскости на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. В рамках гамильтонова формализма модифицированные скобки Пуассона, определенные симплектической формой (29), сводятся к

$$\{r_i, r_j\} = \frac{m}{m^*} \theta \epsilon_{ij}, \quad \{r_i, k_j\} = \frac{m}{m^*} \delta_{ij}, \quad \{k_i, k_j\} = \frac{m}{m^*} eB \epsilon_{ij}. \quad (37)$$

Первое важное наблюдение заключается в том, что тождество Якоби для скобок Пуассона (37) выполняется для любых зависящих от пространства-времени магнитных полей. Это можно проверить непосредственно, сужая уравнения (27) на пространство двух измерений.

Вторым свойством модели является то, что при $m^* = 0$, т.е. когда магнитное поле принимает критическое значение

$$B = B'_{\text{crit}} = \frac{1}{e\theta}, \quad (38)$$

система становится сингулярной, и допустимы только движения, подчиняющиеся закону Холла [10]. Этот факт представляет собой пример вырожденности симплектической 2-формы ω в (30). Наложение однородного постоянного магнитного поля $B = B'_{\text{crit}}$ равносильно сужению движения на низший уровень Ландау, а квантование позволяет восстановить волновую функцию Лафлина [10]. Кроме того, обращение в нуль эффективной массы m^* сигнализирует о своего рода “фазовом переходе”, в том смысле, что спектр углового момента может включать только строго положительные целые значения при $m^* \leq 0$ [20].

Теперь, следуя работам [7] и [8] и имея целью описать систему с помощью большей группы симметрий, рассмотрим однородное зависящее от времени электрическое поле $\vec{E}(t)$ и его канонически сопряженный импульс $\vec{\pi}$ в качестве дополнительных динамических переменных. Рассматривая компоненты импульса π_i как множители Лагранжа, определим новый лагранжиан

$$L^{\text{enl}} = L + \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{E}}, \quad (39)$$

приводящий к дополнительным уравнениям движения

$$\dot{\vec{E}} = 0, \quad \dot{\vec{\pi}} = e\vec{r}. \quad (40)$$

Таким образом, в действительности электрическое поле является постоянным. Гамильтонова структура “расширяется”, к фундаментальным скобкам Пуассона (37) добавляется скобка $\{E_i, \pi_j\} = \delta_{ij}$. В подходящей калибровке для потенциала V_{el} гамильтониан имеет вид $H_0 = \vec{k}^2/2m - e\vec{E} \cdot \vec{r}$ и приводит к уравнениям движения (36) и (40).

Расширенный лагранжиан (39) (квази)инвариантен относительно следующих инфинитезимальных преобразований:

трансляции (сдвиги)	$\delta\vec{r} = \vec{a}, \quad \delta\vec{k} = 0, \quad \delta\vec{E} = 0, \quad \delta\vec{\pi} = e\vec{a}t,$
вращения	$\delta\vec{r} = -\phi\hat{e}\vec{r}, \quad \delta\vec{k} = -\phi\hat{e}\vec{k}, \quad \delta\vec{E} = -\phi\hat{e}\vec{E}, \quad \delta\vec{\pi} = -\phi\hat{e}\vec{\pi},$
преобразования буста	$\delta\vec{r} = \vec{b}t, \quad \delta\vec{k} = m\vec{b}, \quad \delta\vec{E} = -B\hat{e}\vec{b}, \quad \delta\vec{\pi} = \frac{e\vec{b}t^2}{2}, \quad (41)$
электрическая суперпозиция	$\delta\vec{r} = 0, \quad \delta\vec{k} = 0, \quad \delta\vec{E} = \vec{d}, \quad \delta\vec{\pi} = 0,$

где двухкомпонентные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ суть параметры, связанные с пространственными сдвигами, преобразованиями буста и линейными изменениями электрического поля, соответственно. Скалярный параметр ϕ – параметр вращения.

Сохраняющиеся величины могут быть легко построены по теореме Нётер. Действительно, непосредственное интегрирование второго уравнения в (36) дает постоянную движения

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{k} - eB\hat{e}\vec{r} - e\vec{E}t, \quad (42)$$

описывающую равномерное движение направляющего центра заряженной частицы. Коммутационные соотношения

$$\{r_i, \mathcal{P}_j\} = \delta_{ij}, \quad \{k_i, \mathcal{P}_j\} = 0, \quad \{E_j, \mathcal{P}_i\} = 0 \quad \{\pi_i, \mathcal{P}_j\} = et\delta_{ij} \quad (43)$$

позволяют установить, что соотношение (42) порождает расширенные трансляции в формуле (41). Аналогично величины

$$\mathcal{J} = \vec{r} \times \vec{k} + \frac{eB}{2} \vec{r}^2 + \frac{\theta}{2} \vec{k}^2 + \vec{E} \times \vec{\pi} + s_0, \quad \vec{\mathcal{K}} = m\vec{r} - \left(\vec{P} + \frac{e\vec{E}t}{2} \right) + m\theta\hat{e}\vec{k} - B\hat{e}\vec{\pi} \quad (44)$$

сохраняются и порождают соответственно вращения и преобразования буста в (41). “Анионный” спин s_0 добавлен к угловому моменту $\mathcal{J}$ в (44) “руками”; момент $\mathcal{J}$ включает также магнитный поток и новый “экзотический” (или “дуальный”) поток, пропорциональный “площади”, заметаемой в импульсном пространстве. Разумеется, электрическое поле $\vec{E}$ также рассматривается как еще одна сохраняющаяся величина. Вместе с гамильтонианом H_0 эти величины порождают 11-мерную алгебру симметрий Ли, для которой ненулевые коммутационные соотношения Ли–Пуассона имеют вид

$$\begin{aligned} \{\mathcal{P}_i, H_0\} &= eE_i, & \{\mathcal{K}_i, H_0\} &= \mathcal{P}_i, & \{\mathcal{P}_i, \mathcal{J}\} &= -\epsilon_{ij}\mathcal{P}_j, \\ \{\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j\} &= -eB\epsilon_{ij}, & \{\mathcal{K}_i, \mathcal{J}\} &= -\epsilon_{ij}\mathcal{K}_j, & \{\mathcal{P}_i, \mathcal{K}_j\} &= -m\delta_{ij}, \\ \{\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j\} &= -\theta m^2\epsilon_{ij}, & \{E_i, \mathcal{J}\} &= -\epsilon_{ij}E_j, & \{E_i, \mathcal{K}_j\} &= B\epsilon_{ij}, \end{aligned} \quad (45)$$

где m и B – центральные заряды. Однако ключевым наблюдением является то, что генераторы преобразований буста $\mathcal{K}_i$ не коммутируют между собой, как это обычно бывает. Фактически их коммутатор приводит к “экзотическому” центральному заряду $\kappa = -\theta m^2$ и, следовательно, дает нам явную реализацию второго центрального расширения группы Галилея.

Действие группы симметрий на указанные функции, формально принадлежащие дуальному пространству алгебры симметрий, задается формулами

$$\begin{aligned} H'_0 &= H_0 - \vec{b} \cdot R_\phi \vec{P} + \frac{1}{2} m \vec{b}^2 - e \vec{a} \cdot \vec{E}', & \vec{P}' &= R_\phi \vec{P} + e \tau \vec{E}' - e B \hat{e} \vec{a} - m \vec{b}, \\ \mathcal{J}' &= \mathcal{J} + \frac{1}{2} e B \vec{a}^2 - m \vec{a} \times \vec{b} + \frac{1}{2} m^2 \theta \vec{b}^2 + \vec{a} \times R_\phi \vec{P} + \vec{b} \times R_\phi \vec{K} + (R_\phi \vec{a} + e \tau \vec{a}) \times \vec{E}', & (46) \\ \vec{\mathcal{K}}' &= R_\phi \vec{K} + m \vec{a} + \tau m \vec{b} - m^2 \theta \hat{e} \vec{b} + \frac{1}{2} e \tau^2 \vec{E}' - \tau R_\phi \vec{P}, & \vec{E}' &= R_\phi \vec{E} + B \hat{e} \vec{b}, \end{aligned}$$

где R_ϕ представляет собой вращение в плоскости на угол ϕ , а параметр τ задает сдвиг по времени. Помимо центральных зарядов m , $\kappa = -m^2\theta$ и B расширенная группа Галилея обладает независимыми функциями Казимира

$$\mathcal{C} = e\theta \left(B H_0 - \vec{P} \times \vec{E} + \frac{m}{2B} \vec{E}^2 \right) = \frac{e\theta B}{2m} \left(k_i - \frac{m}{B} \epsilon_{ij} E_j \right)^2, \quad (47)$$

$$\mathcal{C}' = \frac{\vec{P}^2}{2m} - H_0 - \frac{e}{m} (\vec{K} \cdot \vec{E} + \mathcal{J} B) - \frac{m e \theta}{2B} \vec{E}^2 = -\mathcal{C} - \frac{e s_0 B}{m}, \quad (48)$$

где $\mathcal{C}'$ интерпретируется как внутренняя энергия системы, а $\mathcal{C} + \mathcal{C}'$ – спин, выраженный в энергетических единицах. Существует нетривиальная выпуклая оболочка функций Казимира, так что они ограничивают орбиты группы в дуальном пространстве алгебры симметрий до шестимерных многообразий, за исключением случая критической точки $\mathcal{C} = 0$, когда многообразие является четырехмерным. Все эти

подмногообразия могут быть снабжены подходящими пуассоновыми структурами. Шестимерные орбиты, характеризуемые параметрами $m, \kappa, B, C (\neq 0), s_0$, наделены локальными координатами $(\vec{\mathcal{P}}, \vec{\mathcal{K}}, \vec{E})$. Будучи суженным на такие орбиты, гамильтониан H_0 становится линейным по импульсам $\mathcal{P}_i$, т.е.

$$H_1 = \frac{\vec{\mathcal{P}} \times \vec{E}}{B} - \frac{m}{2B^2} \vec{E}^2 + \frac{C}{e\theta B}. \quad (49)$$

Соответствующие скобки Пуассона можно извлечь из соотношений (45), в результате имеем несингулярную симплектическую форму на орбите

$$\omega_1 = \frac{1}{B} d\mathcal{P}_1 \wedge d\mathcal{P}_2 + \frac{m}{B^2 e} d\mathcal{P}_i \wedge dE_i - \frac{\epsilon_{ij}}{B} d\mathcal{K}_i \wedge dE_j + \frac{mm^*}{B^3 e} dE_1 \wedge dE_2. \quad (50)$$

Уравнения движения на такой орбите могут быть прямо выведены из первого соотношения в (45). Решение этих уравнений, которое может быть получено немедленно,

$$\vec{\mathcal{P}} = e\vec{E}_0 t + \vec{\mathcal{P}}_0, \quad \vec{\mathcal{K}} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 t^2 + \vec{\mathcal{P}}_0 t + \vec{\mathcal{K}}_0, \quad \vec{E} = \vec{E}_0, \quad (51)$$

в новых переменных описывает решения исходных уравнений движения (36). Таким образом, мы получаем обычное движение по циклоиде, параметры которой (направляющий центр, радиус и частота) выражаются через интегралы движения следующим образом:

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{B^2 e} (m\vec{E}_0 + B\hat{e}\vec{\mathcal{P}}_0) + \hat{e} \frac{\vec{E}_0}{B} t, \quad \rho = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{C}{em\theta B}}, \quad \Omega = \frac{eB}{m^*}. \quad (52)$$

Сингулярные четырехмерные орбиты могут быть выражены эквивалентным образом:

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{m}{B} \hat{e} \vec{E} + \alpha \vec{E} \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \quad (53)$$

В терминах исходных переменных второе равенство в (51) ограничивает обе компоненты импульса $\vec{k}$. Следовательно, уравнения движения (36) принимают прогнозируемый на основе (38) вид

$$\dot{\vec{r}} = \hat{e} \frac{\vec{E}}{B}, \quad \dot{\vec{k}} = \frac{m}{B} \hat{e} \vec{E}, \quad (54)$$

при $m^* = 0 \Leftrightarrow B = B'_{\text{crit}}$. Заметим также, что приведенные выше формулы показывают, что радиус циклоиды стремится к нулю, а частота Ω стремится к бесконечности. Другими словами, все движения сводятся к равномерному перемещению, совершаемому со скоростью Холла. На орбитах $(m, \kappa, B, C = 0, s_0)$ естественно вводится набор координат $(\vec{\mathcal{K}}, \vec{E})$ и определяется невырожденная симплектическая 2-форма

$$\omega_2 = \epsilon_{ij} d\mathcal{K}_i \wedge dE_j + em^2 \theta^2 dE_1 \wedge dE_2. \quad (55)$$

Гамильтониан принимает вид $H_2 = \frac{m}{2B_{\text{crit}}^2} \vec{E}^2$ и дает уравнения $\dot{\vec{E}} = 0, \dot{\vec{\mathcal{K}}} = \frac{m}{B} \hat{e} \vec{E}$, показывающие, что движение частицы снова сводится к равномерному движению направляющего центра.

Следуя предложенной Бакри [21] процедуре, можно получить непосредственное обобщение системы (36)–(40), наделенное расширенной симметрией Галилея, из единственного полиномиального гамильтониана

$$H_{\text{аном}} = H_0 + \frac{g}{2}C' = \frac{\vec{k}^2}{2m} \left(1 - \frac{g}{2}e\theta B\right) - e\vec{E} \cdot \vec{r} - \mu B + \frac{ge\theta}{2}\vec{k} \times \vec{E} - \frac{mge\theta}{4B}\vec{E}^2. \quad (56)$$

Здесь $\mu = ges_0/(2m)$, где g – вещественный параметр, интерпретируемый как аномальный гироманнитный множитель. Описывающий кинетическую энергию член приобретает зависящий от поля множитель, который в соответствии с формулами (20) и (31) также можно рассматривать как результат магнитного дипольного взаимодействия волнового пакета, обладающего магнитным моментом $M = ge\theta\vec{k}^2/(4m)$. Гамильтониан (56) наряду с обычным соответствующим магнитному моменту μB членом содержит также аналогичные гамильтониану (49) вклады, пропорциональные g . Необходимо, однако, принять во внимание, что теперь мы используем “естественные” координаты. Соответствующие уравнения движения суть

$$m^*\dot{\vec{r}} = \left(1 - \frac{g}{2}e\theta B\right)\vec{k} - \left(1 - \frac{g}{2}\right)em\theta\hat{e}\vec{E}, \quad \dot{\vec{k}} = eB\hat{e}\dot{\vec{r}} + e\vec{E}. \quad (57)$$

Они представляют собой частный случай уравнений (31) и напоминают уравнения (5.3) работы [22]. В частности, при $g = 2$ и $e\theta B \neq 1$ получаем $m\dot{\vec{r}} = \vec{k}$, так что наши уравнения описывают обычную заряженную частицу в электромагнитном поле. При $g = 2$ и $e\theta B = 1$ первое из уравнений (57) выполняется тождественно. Разумеется, поскольку структура симметрий этой новой аномальной системы остается такой же, как и для обычного случая $g = 0$, исследование движений по существу повторяет рассмотрения, проведенные ранее. Единственное отличие состоит в том, что частота вращательного движения дается выражением $\Omega = \frac{eB}{2m^*}(1 - \frac{g}{2}e\theta B)$, которое при $g = 2$ сводится к обычной частоте Лармора eB/m . Теперь, однако, частота Ω обращается в нуль при новом критическом значении $B = B''_{\text{crit}} = 2/(eg\theta)$. При таком значении $m^* = m(1 - 2/g)$, а первое уравнение в (57) превращается в тождество при $g = 2$. С другой стороны, при $g \neq 2$ оно сводится к уравнению $\dot{\vec{r}} = ge\theta\hat{e}\vec{E}/2$, которое снова определяет движения по закону Холла (54) с тем исключением, что теперь $\dot{\vec{k}} = 0$, т.е. импульс представляет собой произвольную постоянную.

Обобщение иного рода может быть получено с помощью деформации алгебры симметрий, даже если генераторы симметрий по существу не меняются. Изменим, в частности, один лишь гамильтониан, объединив H_0 с другими генераторами. Хотя систематическое исследование данного вопроса выходит за рамки настоящей работы, рассмотрим гамильтониан с магнитным взаимодействием вида

$$H_{\text{mag}} = H_0 + \mu B\mathcal{J}. \quad (58)$$

Эту модель не следует путать с моделью, введенной в начале статьи в контексте физики твердого тела, поскольку величина $\mathcal{J}$ имеет иной физический смысл по сравнению с величиной $\vec{M}$. Она, однако, может оказаться полезной в определенных

пределах. Скобки Пуассона (45) изменяются лишь для коммутаторов с гамильтонианом H_{mag} , а именно

$$\{H_{\text{mag}}, \vec{P}\} = -e\vec{E} + \mu B \hat{e} \vec{P}, \quad \{H_{\text{mag}}, \vec{K}\} = -\vec{P} + \mu B \hat{e} \vec{K}, \quad \{H_{\text{mag}}, \vec{E}\} = \mu B \hat{e} \vec{E}. \quad (59)$$

Заметим, что импульс $\vec{\pi}$ входит в величину $\mathcal{J}$, и это приводит к тому, что электрическое поле перестает быть постоянным. Кроме того, существует лишь один оператор Казимира

$$C_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \vec{P}^2 - eB\mathcal{J} + \frac{mm^*}{B^2} \vec{E}^2 - e\vec{K} \cdot \vec{E} - \frac{m}{B} \vec{P} \times \vec{E} = \frac{m^*}{m} B^2 \left(\vec{k} - \frac{m}{B} \hat{e} \vec{E} \right)^2 - 2eB^2 s_0. \quad (60)$$

Этот инвариант является выпуклой функцией, поэтому следует ожидать редукции размерности орбиты группы, как в (53). Уравнения движения в естественных координатах $\vec{r}$ и $\vec{k}$ принимают вид

$$m^* \dot{\vec{r}} = \vec{k} - em\theta \hat{e} \vec{E}, \quad \dot{\vec{k}} = e(1 + Bm\theta\mu) \vec{E} + B(e + m^*\mu)(\hat{e} \dot{\vec{r}} - B\mu \vec{r}), \quad (61)$$

$$\dot{\vec{E}} = -B\mu \hat{e} \vec{E}, \quad \dot{\vec{\pi}} = B\mu \vec{\pi} + e\vec{r}.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модель квазиклассического электрона Блоха обеспечивает физическое обоснование для моделей “экзотических частиц” в плоскости и “расширенных симметрий Галилея”, давая нам полезные дополнительные подсказки. Обобщения “экзотических” моделей, которые строятся путем добавления оператора Казимира к гамильтониану, в определенных пределах вбирают в себя взаимодействия, обусловленные аномальным моментом и орбитальным магнитным дипольным моментом. В работе дано алгебраическое описание движений Холла в терминах критических условий для операторов Казимира симметрий.

Благодарности. Эта работа включает обзор, основанный на исследованиях, проведенных совместно с С. Дювалем, З. Хорват и П. Штихелем, которым мы весьма обязаны. П. А. Хорвати выражает благодарность Lecce University за оказанное ему гостеприимство. Работа была частично поддержана MURST (грант SINTESI-2004) и INFN (грант LE41).

Список литературы

- [1] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, Philadelphia, 1976.
- [2] M.-C. Chang, Q. Niu, *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995), 1348; *Phys. Rev. B*, **53** (1996), 7010; G. Sundaram, Q. Niu, *Phys. Rev. B*, **59** (1999), 14915; A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi et al., *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Texts Monogr. Phys., Springer, Berlin, 2003.
- [3] R. Karplus, J. M. Luttinger, *Phys. Rev.*, **95** (1954), 1154; T. Jungwirth, Q. Niu, A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2002), 207208; D. Culcer, A. H. MacDonald, Q. Niu, *Phys. Rev. B*, **68** (2003), 045327.
- [4] Z. Fang, N. Nagaosa, K. S. Takahashi et al., *Science*, **302** (2003), 92; S. Onoda, N. Sugimoto, N. Nagaosa, *Phys. Rev. Lett.*, **97** (2006), 126602; [cond-mat/0605580](#).

- [5] P. Kramer, M. Saraceno, *Geometry of the Time Dependent Variational Principle in Quantum Mechanics*, Lect. Notes Phys., **140**, eds. J. Ehlers et al., Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1981.
- [6] J.-M. Lévy-Leblond, “Galilei group and Galilean invariance”, *Group Theory and Applications*, v. II, ed. E. M. Loebl, Academic Press, New York, 1971, 221.
- [7] J. Negro, M. A. del Olmo, *J. Math. Phys.*, **31** (1990), 2811; J. Negro, M. A. del Olmo, J. Tosiek, *J. Math. Phys.*, **47** (2006), 033508.
- [8] P. A. Horváthy, L. Martina, P. Stichel, *Phys. Lett. B*, **615** (2005), 87; [hep-th/0412090](#).
- [9] J. Lukierski, P. C. Stichel, W. J. Zakrzewski, *Ann. Physics*, **260** (1997), 224; [hep-th/9612017](#).
- [10] C. Duval, P. A. Horváthy, *Phys. Lett. B*, **479** (2000), 284; [hep-th/0002233](#); *J. Phys. A*, **34** (2001), 10097; [hep-th/0106089](#).
- [11] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.*, **50** (1983), 1395.
- [12] A. Bérard, H. Mohrbach, *Phys. Rev. D*, **69** (2004), 127701; [hep-th/0310167](#).
- [13] P. Horváthy, L. Martina, P. Stichel, *Modern Phys. Lett. A*, **20** (2005), 1177.
- [14] M. R. Douglas, N. A. Nekrasov, *Rev. Modern Phys.*, **73** (2001), 977; R. J. Szabo, *Phys. Rep.*, **378** (2003), 207.
- [15] J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970; *Structure of Dynamical Systems. A Symplectic View of Physics*, Progr. Math., **149**, Birkhäuser, Boston, 1997.
- [16] R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin, Reading, MA, 1978; G. Marmo, E. J. Saletan, A. Simoni, B. Vitale, *Dynamical Systems. A Differential Geometric Approach to Symmetry and Reduction*, Wiley-Intersci. Publ., Wiley, Chichester, 1985.
- [17] L. D. Faddeev, R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.*, **60** (1988), 1692.
- [18] D. Thouless, M. Kohmoto, M. Nightingale, M. den Nijs, *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1982), 405.
- [19] J. E. Avron, R. Seiler, B. Simon, *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983), 51.
- [20] P. A. Horváthy, M. S. Plyushchay, *Nucl. Phys. B*, **714** (2005), 269; [hep-th/0502040](#).
- [21] H. Bacry, *Lett. Math. Phys.*, **1** (1976), 295.
- [22] C. Duval, P. A. Horváthy, *Phys. Lett. B*, **594** (2004), 402; [hep-th/0402191](#); B. S. Skagerstam, A. Stern, *Phys. Scr.*, **24** (1981), 493; G. Grignani, M. Plyushchay, P. Sodano, *Nucl. Phys. B*, **464** (1996), 189; [hep-th/9511072](#).