Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Г. Конопельченко, Ф. Магри, Бездисперсионные интегрируемые уравнения как коизотропные деформации. Обобщения и редукции, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 3, 439–457

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6058>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:44:27

© 2007 г.

Б. Г. Конопельченко*, Ф. Магри†

БЕЗДИСПЕРСИОННЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК КОИЗОТРОПНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ. ОБОБЩЕНИЯ И РЕДУКЦИИ

Обсуждается трактовка бездисперсионных интегрируемых иерархий как уравнений коизотропных деформаций для некоторых ассоциативных алгебр и других алгебраических структур. Показано, что в рамках такого подхода бездисперсионные уравнения Хироты для бездисперсионной иерархии Кадомцева–Петвиашвили являются не чем иным, как условиями ассоциативности в некоторой параметризации. Рассмотрено несколько обобщений. Доказано, что бездисперсионные интегрируемые иерархии типа Б, подобно бездисперсионной иерархии Кадомцева–Петвиашвили типа Б и бездисперсионной иерархии Веселова–Новикова, представляют собой коизотропные деформации тройных систем Йордана. Показано, что стационарные редукции бездисперсионных интегрируемых уравнений связаны с динамическими системами на плоскости, вполне интегрируемыми на фиксированном уровне энергии.

Ключевые слова: ассоциативные алгебры, коизотропные деформации, интегрируемые уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОИЗОТРОПНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

На протяжении двух последних десятилетий бездисперсионные интегрируемые уравнения и иерархии привлекали к себе значительное внимание (см., например, работы [1]–[10]). Основным примером таких уравнений является бездисперсионное уравнение Кадомцева–Петвиашвили (уравнение бКП)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_3} &= \frac{3}{2}u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} &= \frac{3}{4} \frac{\partial u}{\partial x_2}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Это уравнение эквивалентно условию совместности

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 S}{\partial x_3 \partial x_2}$$

*Dipartimento di Fisica, Università di Lecce and Sezione INFN, 73100 Lecce, Italy.
E-mail: konopel@le.infn.it

†Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Milano Bicocca, 20126 Milano, Italy

для пары уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 + u, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^3 + \frac{3}{2} u \frac{\partial S}{\partial x_1} + v. \quad (1.3)$$

Высшие уравнения БКП возникают как условия совместности для уравнения (1.2) и уравнений (см. работы [1]–[7])

$$\frac{\partial S}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^n + \sum_{m=0}^{n-2} u_{nm}(x) \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^m. \quad (1.4)$$

Другие бездисперсионные интегрируемые уравнения обычно ассоциируются с уравнениями типа Гамильтона–Якоби вида [6], [7]

$$\frac{\partial S}{\partial x_n} = \Omega_n \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}, x \right), \quad (1.5)$$

где Ω_n – некоторые мероморфные функции первого аргумента.

В этой традиционной постановке переменные x_1 и $p = \partial S / \partial x_1$ играют выделенную роль. Они образуют пару канонически сопряженных переменных, и условия совместности для уравнений (1.5) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial x_m}(p, x) - \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_n}(p, x) - \{\Omega_n(p, x), \Omega_m(p, x)\} = 0, \quad (1.6)$$

где скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ определена следующим образом:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial x_1}. \quad (1.7)$$

Таким образом, в целом при обычном подходе мы имеем дело с нестационарными уравнениями Гамильтона–Якоби (1.5) и гамильтонианом $\Omega_n(p, x)$.

В настоящей работе будет рассмотрен новый подход к бездисперсионным интегрируемым уравнениям и иерархиям, при котором они представляют собой коизотропные деформации ассоциативных алгебр и других алгебраических структур [11].

Исходным пунктом этого подхода, представляющего собой сплав идей, позаимствованных из гамильтоновой механики и теории ассоциативных алгебр, является представление уравнений Гамильтона–Якоби (1.5) как стационарных уравнений. В рамках такого представления естественно рассматривать все переменные $x_1, x_2, x_3, \dots$ на единой основе и ввести соответствующие канонические переменные $p_1, p_2, p_3, \dots$, сопряженные переменным $x_1, x_2, x_3, \dots$ относительно стандартной скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$, заданной выражением

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right). \quad (1.8)$$

Таким образом, мы вводим симплектическое многообразие M^{2n} , снабженное скобкой Пуассона (1.8). Уравнения Гамильтона–Якоби (1.5) заменяются условиями обращения в нуль (нулевым множеством) гамильтонианов

$$h_n \equiv -p_n + \Omega_n(p_1, x) = 0. \quad (1.9)$$

Подчеркнем, что теперь x_i, p_i образуют пары канонически сопряженных переменных, и $p_i \neq \partial S / \partial x_i$. Будем обозначать подмногообразие в M^{2n} , заданное нулевым множеством (1.9), через Γ .

Так, например, вместо уравнений (1.2), (1.3) имеем теперь нулевое множество гамильтонианов

$$\begin{aligned} h_2 &= -p_2 + p_1^2 + u(x_1, x_2, x_3), \\ h_3 &= -p_3 + p_1^3 + \frac{3}{2}up_1 + v. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подмногообразие Γ , определенное уравнениями (1.10), “параметризуется” функциями u и v координат x_1, x_2, x_3 .

Второй шаг в нашем подходе заключается в том, чтобы ввести особый класс подмногообразий Γ . Естественнo потребовать, чтобы гамильтоновы потоки, порожденные гамильтонианами h_2 и h_3 , сохраняли Γ , или, другими словами, чтобы гамильтоновы векторные поля, ассоциированные с h_2 и h_3 , являлись касательными к подмногообразию Γ . Данное требование эквивалентно условию

$$\{h_2, h_3\}|_{\Gamma} = 0. \quad (1.11)$$

Нетрудно проверить, что это условие выполнено тогда и только тогда, когда функции u и v удовлетворяют уравнению БКП (1.1). В этом случае $\{h_2, h_3\} = 0$.

Таким образом, для любого решения u, v уравнения БКП (1.1) гамильтонианы h_2 и h_3 находятся в инволюции, и деформация переменных x_1, x_2, x_3 гамильтоновыми потоками сохраняет подмногообразие Γ .

Подобные деформации мы будем называть коизотропными по следующей причине. Подмногообразие Γ , определяемое уравнениями (1.10) и удовлетворяющее указанным выше условиям, является 4-мерным подмногообразием в M^6 , для которого $\{h_2, h_3\}|_{\Gamma} = 0$, и, более того, сужение стандартной симплектической 2-формы

$$\omega \equiv \sum_{i=1}^3 dp_i \wedge dx_i \quad (1.12)$$

на подмногообразии Γ не обращается в нуль тождественно. Поскольку ядро формы ω натягивается на гамильтоновы векторные поля, ассоциированные с гамильтонианами h_2 и h_3 , то ранг сужения $\omega|_{\Gamma}$ равен двум, и, следовательно,

$$\omega_{\Gamma} = d\mathcal{L} \wedge d\mathcal{M}, \quad (1.13)$$

где $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ – канонические переменные на подмногообразии Γ . Подмногообразия с такими свойствами называются коизотропными подмногообразиями (см., например, работы [12]).

Итак, любое решение u, v уравнения бКП посредством условий (1.10) определяет 4-мерное коизотропное подмногообразие в M^6 , и в силу этого естественно называть соответствующие деформации коизотропными.

Аналогично условия $\{h_n, h_m\} = 0$ для гамильтонианов h_n , заданных формулой (1.9), определяют коизотропные деформации. Нетрудно проверить, что условия коизотропности для гамильтонианов (1.9) в точности совпадают с условиями (1.6). В частности, для полиномиальных $\Omega_n(p_1)$ типа (1.10) коизотропные деформации даются бездисперсионной иерархией Кадомцева–Петвиашвили (иерархией бКП).

Переформулировка бездисперсионных интегрируемых уравнений и иерархий на языке коизотропных деформаций не только приводит к техническим упрощениям, но и открывает путь для существенных обобщений и новой интерпретации [11].

В основе значительного расширения предложенного подхода лежит то наблюдение, что можно перейти от нулевого множества функций h_n к порожденному ими идеалу J . Действительно, любая полиномиальная функция f_n от $h_1, h_2, \dots$ принадлежит подмногообразию Γ , и условие коизотропности $\{f_n, f_m\}|_\Gamma = 0$ выполнено благодаря условию $\{h_n, h_m\}|_\Gamma = 0$. Более того, оба набора функций порождают одни и те же уравнения для потенциалов.

Таким образом, условие коизотропности принимает вид условия замкнутости идеала J относительно скобки Пуассона (1.8), т.е.

$$\{J, J\} \subset J. \quad (1.14)$$

Переход к идеалу J предоставляет свободу выбора в нем базиса разными способами. Рассмотрим для примера идеал, порожденный гамильтонианами уравнения бКП

$$h_0 \equiv -p_0 + 1$$

и

$$h_n = -p_n + p^n + \sum_{m=0}^{n-2} u_{nm}(x)p^m, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.15)$$

где для удобства мы добавили гамильтонианы $h_0 = -p_0 + 1$ и $h_1 = -p_1 + p$. Формально мы должны ввести переменную x , сопряженную переменной p . Это означает, что функции u_{nm} будут зависеть только от $x_1 + x$. Прежде всего, поскольку $-p_2 + p_1^2 + u = 0$ на Γ , имеем $u = p_2 - p_1^2$. Подставляя это выражение для u в выражение для h_3 , получаем новый гамильтониан

$$\tilde{h}_3 = -p_3 - \frac{1}{2}p_1^3 + \frac{3}{2}p_1p_2 + v. \quad (1.16)$$

Продолжая подобную процедуру далее, мы получаем бесконечное множество гамильтонианов $\tilde{h}_n$, которые имеют вид суммы полиномов по переменным $p_1, p_2, \dots$ и функций $u_n(x_1, x_2, \dots)$, а именно

$$\tilde{h}_n = nP_n(\tilde{p}) + u_n(x), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (1.17)$$

где $\tilde{p} = (-p_1, -p_2/2, -p_3/3, \dots)$, $u_2 = u_{20} = u$, $u_3 = u_{30} = v$ и $P_n(t)$ – полиномы Шура, определяемые формулой

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n t_n\right) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m(t).$$

Гамильтонианы $\tilde{h}_n$ вместе с гамильтонианами h_0 и h_1 образуют базис в том же идеале J , который порождается функциями h_n (1.15).

Для гамильтонианов (1.17) условие коизотропности (1.14) означает, что

$$\{\tilde{h}_n, \tilde{h}_m\} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{n}{k(n-k)} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \tilde{h}_{n-k} - \sum_{k=1}^{m-2} \frac{m}{k(m-k)} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} \tilde{h}_{m-k} \quad (1.18)$$

и верны следующие уравнения:

$$\frac{n-1}{n} \frac{\partial u_n}{\partial x_{m-1}} = \frac{m-1}{m} \frac{\partial u_m}{\partial x_{n-1}}, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_n} - \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \sum_{k=1}^{m-2} \frac{m}{k(m-k)} u_{m-k} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{n}{k(n-k)} u_{n-k} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} = 0, \quad (1.20)$$

где $m, n = 2, 3, \dots$. Можно проверить, что уравнения (1.19) и (1.20) эквивалентны обычной иерархии БКП.

Интересный базис возникает при попытке преобразовать (1.15) в базис, билинейный по переменным $p_1, p_2, p_3, \dots$. Он может быть легко построен следующим образом. Из первого уравнения (1.10) имеем $p_1^2 = p_2 - u$. Подставляя это выражение для p_1^2 во второе уравнение (1.10), получаем уравнение

$$-f_{12} \equiv p_1 p_2 - p_3 + \frac{1}{2} u p_1 + v = 0. \quad (1.21)$$

Затем, получая из второго уравнения (1.10) выражение $p_1^3 = p_3 - 3u p_1/2 - v$ и подставляя его и выражение $p_1^2 = p_2 - u$ в уравнение (1.15) с $n = 4$, приходим к уравнению

$$-f_{13} = p_1 p_3 - p_4 + \left(u_{42} - \frac{3}{2}u\right) p_2 - v p_1 + u_{40} - u u_{42} = 0. \quad (1.22)$$

Повторяя подобную процедуру, мы получаем семейство гамильтонианов вида [11]

$$-f_{jk} \equiv p_j p_k - \sum_{l=0}^{j+k} C_{jk}^l(x) p_l = 0, \quad j, k, = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.23)$$

где C_{jk}^l – некоторые коэффициенты и $p_0 \equiv 1$. Знак минус в левой части последней формулы выбран для того, чтобы функции f_{jk} были теми же, что и в работе [11]. Соотношение

$$f_{jk} = h_j h_k - \sum_{l \geq 0} C_{jk}^l(x) h_l + p_j h_k + p_k h_j$$

показывает, что нулевое множество гамильтонианов h_k совпадает с нулевым множеством гамильтонианов f_{jk} . Прямые (хотя и громоздкие) вычисления показывают, что условия коизотропности для гамильтонианов f_{jk} снова дают начало иерархии БКП.

Таким образом, выбор базиса в идеале J не влияет на условия коизотропности. Интересно, однако, что указанная свобода позволяет обнаружить глубокие алгебраические корни бездисперсионных интегрируемых уравнений. Действительно, уравнения (1.23) весьма похожи на реализацию таблицы умножения для ассоциативной алгебры в базисе, образованном переменными $p_0, p_1, p_2, \dots$. Это наблюдение приводит к возможности трактовать иерархию БКП как коизотропные деформации коммутативной ассоциативной алгебры [11].

Именно, пусть мы имеем коммутативную ассоциативную алгебру. Выберем в алгебре базис $p_0 (\equiv 1), p_1, p_2, \dots$ и, таким образом, получим соответствующую таблицу умножения

$$p_j p_k = \sum_{l=0} C_{jk}^l p_l. \quad (1.24)$$

Коммутативность означает, что $C_{jk}^l = C_{kj}^l$, а из ассоциативности следует

$$\sum_{l=0} C_{jk}^l C_{lm}^p = \sum_{l=0} C_{mk}^l C_{lj}^p. \quad (1.25)$$

Чтобы рассмотреть деформации, предположим, что структурные константы C_{jk}^k зависят от набора переменных $x_1, x_2, x_3, \dots$. Для определения деформации свяжем с таблицей умножения (1.24) набор квадратичных гамильтонианов

$$f_{jk} = -p_j p_k + \sum_{l=0} C_{jk}^l(x) p_l, \quad (1.26)$$

где x_j, p_j образуют пары канонически сопряженных переменных в симплектическом многообразии M , снабженном скобкой Пуассона (1.8).

Рассмотрим затем полиномиальный идеал $J = \langle f_{jk} \rangle$, порожденный этими гамильтонианами, и подмногообразие Γ , определяемое формулой

$$\Gamma = \{ (x_j, p_j \in M; f_{jk} = 0) \}. \quad (1.27)$$

Наконец, если идеал J замкнут относительно скобки Пуассона, т.е.

$$\{J, J\} \subset J, \quad (1.28)$$

так что Γ является коизотропным подмногообразием в M , то говорят, что функции $C_{jk}^l(x)$ определяют коизотропную деформацию ассоциативной алгебры (1.24) [11].

Можно показать, что условие (1.28) выполнено, если структурные константы C_{jk}^l удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{s=1} \left(C_{sj}^m \frac{\partial C_{lr}^s}{\partial x_k} + C_{sk}^m \frac{\partial C_{lr}^s}{\partial x_j} - C_{sr}^m \frac{\partial C_{jk}^s}{\partial x_l} - C_{sl}^m \frac{\partial C_{jk}^s}{\partial x_r} + \frac{\partial C_{jk}^m}{\partial x_s} C_{lr}^s - \frac{\partial C_{lr}^m}{\partial x_s} C_{jk}^s \right) = 0. \quad (1.29)$$

Система уравнений (1.25), (1.29) полностью определяет коизотропные деформации ассоциативной алгебры (1.24) и составляет основу нашего подхода [11]. По этой причине мы будем называть эту систему основной системой теории коизотропных деформаций.

Подчеркнем, что основная система – это система алгебраических и дифференциальных уравнений исключительно для структурных констант C_{jk}^l . Мы увидим, что данная особенность является существенным преимуществом рассматриваемого здесь подхода.

2. КОИЗОТРОПНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ТИПА БКП: ТАУ-ФУНКЦИЯ И УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ

Центральной проблемой, связанной с основной системой (1.25), (1.29), является, разумеется, существование и смысл ее нетривиальных решений. Решение дается иерархией БКП, для которой структурные константы C_{jk}^l могут быть восстановлены через потенциалы $u_{nm}(x)$ формулы (1.15) посредством формулы (1.23).

С другой стороны, анализ уравнений (1.23) показывает [11], что структурные константы C_{jk}^l иерархии БКП имеют следующий общий вид:

$$C_{kj}^l = \delta_{k+j}^l + H_{j-l}^k + H_{k-l}^j, \quad (2.1)$$

где $k, j, l = 0, 1, 2, 3, \dots$, δ_k^l – символ Кронекера и H_j^k – функции переменных $x_1, x_2, \dots$ такие, что $H_0^k = 0$ и $H_j^k = 0$ для $j \leq -1$. Мы покажем, что использование структурных констант общего (не параметризованного) вида (2.1) в основной системе приводит к существованию тау-функции и новой алгебраической интерпретации бездисперсионных уравнений Хироты [11].

Первый шаг состоит в том, чтобы обеспечить выполнение условий ассоциативности в терминах коэффициентов H_j^k . Прямая подстановка выражений (2.1) в уравнения (1.25) и использование тождества

$$\sum_{l=n-1}^{k-1} H_{k-l}^i H_{l-n}^m = \sum_{l=n-1}^{k-1} H_{k-l}^m H_{l-n}^i$$

показывают, что структурные константы C_{jk}^l удовлетворяют условиям ассоциативности тогда и только тогда, когда скобка

$$[H, H]_{ikm} := H_m^{i+k} - H_{m+k}^i - H_{i+m}^k + \sum_{l=1}^{i-1} H_{i-l}^k H_m^l + \sum_{l=1}^{k-1} H_{k-l}^i H_m^l - \sum_{l=1}^{m-1} H_{m-l}^k H_l^i \quad (2.2)$$

тождественно обращается в нуль при любом выборе индексов $(i, k, m) \in N$. Интересное следствие этого результата может быть выведено путем свертывания индексов. Действительно, можно проверить, что следствием приведенных выше уравнений являются полезные соотношения симметрии

$$pH_p^i = iH_i^p. \quad (2.3)$$

Далее, необходимо обеспечить выполнение условий коизотропности. Получающиеся уравнения в терминах коэффициентов H_k^i достаточно сложны, однако более тщательное рассмотрение показывает, что они радикально упрощаются, если учесть только что полученные условия ассоциативности. Действительно, можно доказать, что условия коизотропности могут быть сведены к уравнениям

$$\frac{\partial[H, H]_{l,n,i-j}}{\partial x_k} + \frac{\partial[H, H]_{l,n,k-j}}{\partial x_i} - \frac{\partial[H, H]_{i,k,l-j}}{\partial x_n} - \frac{\partial[H, H]_{i,k,n-j}}{\partial x_l} = 0,$$

которые автоматически выполняются при наличии условий ассоциативности, и к линейным уравнениям

$$\frac{\partial H_p^i}{\partial x_l} = \frac{\partial H_p^l}{\partial x_i}.$$

Итак, в случае структурных констант вида (2.1) условия ассоциативности и коизотропности вместе эквивалентны набору квадратичных алгебраических уравнений

$$[H, H]_{ikl} = 0 \quad (2.4)$$

и набору линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial H_p^i}{\partial x_l} = \frac{\partial H_p^l}{\partial x_i}, \quad (2.5)$$

имеющих вид системы законов сохранения. Уравнения (2.4) и (2.5) дают конкретный вид основной системы для иерархии БКП. Эта система содержит в закодированном виде всю информацию об иерархии. Из нее, в частности, вытекает, что для любого решения основной системы имеет место формула

$$\{f_{ik}, f_{ln}\} = \sum_{s, t \geq 1} K_{ikln}^{st} f_{st}, \quad (2.6)$$

где

$$K_{ikln}^{st} = \left(\delta_{it} \frac{\partial}{\partial x_k} + \delta_{kt} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (H_{l-s}^n + H_{n-s}^l) - \left(\delta_{nt} \frac{\partial}{\partial x_l} + \delta_{lt} \frac{\partial}{\partial x_n} \right) (H_{i-s}^k + H_{k-s}^i).$$

Из этой формулы видно, что гамильтонианы f_{jk} иерархии БКП образуют алгебру Пуассона. Упомянутая выше основная система может рассматриваться также как бездисперсионный предел основной системы для полной дисперсионной иерархии Кадомцева–Петвиашвили [13].

Существуют две стратегии по раскодированию информации, содержащейся в основной системе. Согласно первой мы сначала пытаемся разрешить условия ассоциативности (2.4), замечая, что они позволяют вычислить коэффициенты $(H_k^2, H_k^3, \dots)$ в виде полиномиальных функций от H_k^1 . Например, условия симметрии

$$H_1^2 = 2H_2^1, \quad H_1^3 = 3H_3^1$$

дают (H_1^2, H_1^3) , а затем условие (2.4) с $i = k = 1, l = 2$, т.е.

$$H_1^3 - H_3^1 - H_2^2 + H_1^1 H_1^1 = 0,$$

дает H_2^2 , и т.д. Переименовывая свободные коэффициенты в соответствии с таблицей умножения предыдущего раздела, т.е. полагая

$$H_1^1 = -\frac{1}{2}u, \quad H_2^1 = -\frac{1}{3}v, \quad H_3^1 = -\frac{1}{4}w + \frac{1}{8}u^2,$$

получаем

$$H_1^2 = -\frac{2}{3}v, \quad H_2^2 = -\frac{1}{2}w + \frac{1}{2}u^2, \quad H_1^3 = -\frac{3}{4}w + \frac{3}{8}u^2.$$

Подставляя теперь эти выражения в простейшие линейные условия коизотропности

$$\frac{\partial H_1^1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_1^2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial H_2^1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial H_1^1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_1^3}{\partial x_1} = 0,$$

приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x_1} &= \frac{3}{4} \frac{\partial u}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} &= \frac{3}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - 3u \frac{\partial u}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} &= \frac{3}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x_1}.\end{aligned}$$

Исключение членов, содержащих $\partial w / \partial x_1$, приводит в конечном счете к уравнению бКП и к высшим уравнениям, если проявить достаточную настойчивость при вычислениях. Используя данную стратегию, мы возвращаемся к иерархии в ее обычной формулировке.

Простое изменение порядка рассмотрения уравнений приводит вместо этого к представлению Хироты. Достаточно заметить, что из уравнений (2.5) вытекает существование последовательности потенциалов S_m таких, что

$$H_m^i = \frac{\partial S_m}{\partial x_i}.$$

Тогда условия симметрии (2.3) налагают на потенциалы S_m следующие ограничения:

$$i \frac{\partial S_i}{\partial x_l} = l \frac{\partial S_l}{\partial x_i},$$

которые, в свою очередь, приводят к существованию суперпотенциала $F(x_1, x_2, \dots)$ такого, что

$$S_i = -\frac{1}{i} \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad H_m^i = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_m}. \quad (2.7)$$

Данный результат дает новую по сравнению с описанной выше параметризацию структурных констант. Подстановка этой параметризации в полный набор условий ассоциативности приводит в конечном счете к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{m} F_{i+k,m} + \frac{1}{m+k} F_{i,k+m} + \frac{1}{i+m} F_{k,i+m} + \\ + \sum_{l=1}^{i-1} \frac{1}{m(i-l)} F_{k,i-l} F_{l,m} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{m(k-l)} F_{i,k-l} F_{l,m} - \\ - \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{i(m-l)} F_{k,m-l} F_{i,l} = 0,\end{aligned} \quad (2.8)$$

где $F_{i,k}$ обозначает производную второго порядка потенциала F по переменным x_i и x_k . Эти уравнения эквивалентны знаменитым билинейным уравнениям Хироты для тау-функции иерархии бКП (см., например, работы [4], [5], [8]). Для $i = k = 1$, $m = 2$, или $i = m = 1$, $k = 2$, или $m = k = 1$, $i = 2$, например, мы получаем первое уравнение Хироты

$$-\frac{1}{2} F_{2,2} + \frac{2}{3} F_{1,3} - (F_{1,1})^2 = 0.$$

Переменная x_0 , сопряженная переменной p_0 , является циклической, и мы опускаем соответствующий член в формуле (3.2). В силу вида гамильтониана h_1 коэффициенты u_{nm} зависят от суммы $x + x_1$.

Условия коизотропности для гамильтонианов (3.1) дают начало обобщенной иерархии бКП (см. работу [11]). В частном случае калибровки $u_{20} = 0$, $u_{30} = 0$ мы получаем бездисперсионную модифицированную иерархию Кадомцева–Петвиашвили (иерархию бмКП) [11].

Дальнейшее очевидное расширение состоит в том, чтобы позволить коэффициентам u_{nn} зависеть от x . Соответствующие деформации содержат бездисперсионную иерархию Гарри Дима в качестве подкласса [15]. Действительно, выбирая

$$\begin{aligned} h_2 &= -p_2 + \rho^2 p_1^2, \\ h_3 &= -p_3 + \rho^3 p_1^3 + \mu \rho^2 p_1^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

получаем из условия коизотропности систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^2}{\partial x_3} &= \frac{\partial (\mu \rho^2)}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial x_1} &= \frac{3}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

которая представляет собой $(2 + 1)$ -мерное бездисперсионное уравнение Гарри Дима [15].

В рассмотренных выше расширениях мы оставались в классе полиномиальных алгебр с единственным генератором p . Обобщение всего подхода до полиномиальных алгебр с n генераторами посредством процедуры склеивания было предложено в работе [11]. В простейшем случае двух генераторов p и q эта процедура заключается в добавлении к двум полиномиальным алгебрам (3.1) склеивающего соотношения

$$pq = ap + bq + c. \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) дает возможность построить полную таблицу умножений между элементами p_i и q_k . В работе [11] было показано, что соответствующие коизотропные деформации даются двухточечной иерархией бКП, которая эквивалентна универсальной иерархии Уизема на римановой сфере с двумя выколотыми точками [6]. В частности, эта иерархия содержит простейшее $(2 + 1)$ -мерное уравнение Бенни, введенное в работе [7].

Здесь мы хотели бы указать способ включения бездисперсионной двумерной цепочки Тоды (бДЦТ) в нашу схему. С этой целью рассмотрим две копии полиномиальных алгебр общего вида и, следовательно, два семейства гамильтонианов

$$\begin{aligned} h_0 &= -p_0 + 1, \\ h_1 &= -p_1 + ap + b, \\ &\dots\dots\dots \\ h_n &= -p_n + \sum_{m=0}^n u_{nm}(x, y)p^m \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\theta = \ln(a\tilde{a})$. Это уравнение Бойера–Финли, или уравнение бДЦТ (см., например, работы [3], [5], [6]). Рассматривая условия коизотропности для высших гамильтонианов $h_n, \tilde{h}_n$, мы получаем высшие уравнения бДЦТ и всю иерархию бДЦТ в целом.

То обстоятельство, что для получения бДЦТ как коизотропных деформаций полиномиальных алгебр необходимо рассматривать модифицированную скобку Пуассона (3.9), заслуживает большого внимания. Оно указывает на то, что симплектическая структура деформаций должна быть согласована с алгеброй, которая подвергается деформации. Разумеется, можно легко превратить модифицированную скобку (3.9) в каноническую, если ввести переменную w такую, что $p = e^w$, $q = e^{-w}$. Однако в терминах этой переменной гамильтонианы $h_n, \tilde{h}_n$ превращаются в полиномы экспонент e^w и e^{-w} . Это явление, а также первая половина скобки (3.9) (при $q = 1/p$) хорошо известны для иерархии бДЦТ (см., например, работы [3], [5], [6]).

Похожая ситуация – согласованность скобки Пуассона и вида гамильтонианов – имеет место для бездисперсионных уравнений, рассмотренных в работе [16].

4. КОИЗОТРОПНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ТРОЙНЫХ СИСТЕМ ЙОРДАНА: ИЕРАРХИИ ТИПА Б

Совершенно другие интересные структуры появляются для “алгебр”, совместимых с дискретной группой, т.е. в случае, когда дискретная группа нетривиально действует на элементы базиса, в то же время оставляя неизменными структурные константы. Здесь будет рассмотрен лишь простой пример группы одновременных отражений всех элементов базиса $p_i \rightarrow -p_i$.

Начнем с однокомпонентного случая. Естественный базис теперь задается нечетными степенями p^{2i+1} , и аналоги полиномов (1.15) имеют вид

$$\begin{aligned} p_1 &= p, \\ p_3 &= p^3 + up, \\ p_5 &= p^5 + v_3p^3 + v_1p, \\ p_7 &= p^7 + w_5p^5 + w_3p^3 + w_1p \end{aligned} \quad (4.1)$$

и т.д. Такая алгебра, очевидно, не является замкнутой относительно обычной операции умножения $p_i p_k$. Однако соотношения

$$\begin{aligned} p_1^3 &= p_3 - up_1, \\ p_1^2 p_3 &= p_5 + (u - v_3)p_3 - [u(u - v_3) + v_1]p_1, \\ p_1 p_3^2 &= p_7 + (2u - w_5)p_5 + [u^2 - w_3 - v_3(2u - w_5)]p_3 + \\ &\quad + [(2u - w_5)(v_3u - v_1) - u(u^2 - w_3) - w_1]p_1, \\ p_1^2 p_5 &= p_7 + (v_3 - w_5)p_5 + [v_1 - w_3 - v_3(v_3 - w_5)]p_3 + \\ &\quad + [(v_3 - w_5)(v_3u - v_1) - u(v_1 - w_3) - w_1]p_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

и аналогичные наводят на мысль о рассмотрении кубической операции $p_i p_k p_l$. Таким образом, нечетные полиномы (4.1) дают нам пример “алгебры” с базисом $p_1, p_3, p_5, \dots$, замкнутой относительно коммутативной трilinearной операции

$$p_i p_k p_l = \sum_{m=1}^{i+k+l} C_{ikl}^m p_m, \quad (4.3)$$

где все индексы принимают только нечетные целые значения и

$$\begin{aligned} C_{111}^3 &= 1, & C_{111}^1 &= -u, & C_{113}^5 &= 1, \\ C_{113}^3 &= u - v_3, & C_{113}^1 &= -[u(u - v_3) + v_1] \end{aligned}$$

и т.д. Алгебраические структуры, определенные трilinearным законом (4.3), известны как тройные системы Йордана (см., например, книгу [17]). Ассоциативность для тройной системы Йордана определяется как

$$(p_i p_k p_l) p_n p_m = p_i p_k (p_l p_n p_m) = p_i (p_k p_l p_n) p_m, \quad (4.4)$$

что ведет к следующим условиям “ассоциативности”:

$$\begin{aligned} \sum_t C_{ikl}^t C_{tnm}^s &= \sum_t C_{lnm}^t C_{ikt}^s, \\ \sum_t C_{lnm}^t C_{ikt}^s &= \sum_t C_{klm}^t C_{int}^s. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Рассмотренный выше подход может быть применен для определения коизотропных деформаций тройных систем Йордана. Итак, превратим таблицу умножения (4.3) в нулевое множество Γ гамильтонианов

$$f_{ikl} := -p_i p_k p_l + \sum_{m=1} C_{ikl}^m(x) p_m, \quad i, k, l = 1, 3, 5, \dots, \quad (4.6)$$

а затем потребуем коизотропности Γ относительно канонической скобки Пуассона. Мы получим уравнения коизотропных деформаций для структурных констант C_{ikl}^m , аналогичные уравнениям (1.29).

Рассмотрим здесь простейшие из этих уравнений, возникающие как условия коизотропности для низших гамильтонианов:

$$f_{111} = -p_1^3 + p_3 - u p_1, \quad f_{113} = -p_1^2 p_3 + p_5 - v p_3 - w p_1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \{f_{111}, f_{113}\} &= (-u_{x_2} + 3w_{x_1}) f_{111} + (-2u_{x_1} + 3v_{x_1}) f_{113} + (-2u_{x_1} + 3v_{x_1}) p_5 + \\ &+ (-u_{x_3} + 3w_{x_1} + 2v u_{x_1} - 3v v_{x_1} - v_{x_3} + u v_{x_1}) p_3 + \\ &+ (u u_{x_3} - 2u w_{x_1} + 2w u_{x_1} - 3w v_{x_1} - w u_{x_1} - u_{x_2} v + u_{x_5} - w_{x_3}) p_1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Правая часть равенства (4.7) обращается на Γ в нуль, если

$$\begin{aligned} 2u_{x_1} - 3v_{x_1} &= 0, \\ u_{x_3} - 3w_{x_1} + v_{x_3} - u v_{x_1} &= 0, \\ u_{x_5} + u u_{x_3} - 2u w_{x_1} - u_{x_1} w - v u_{x_3} - w_{x_3} &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения, как обычно, имеем $v = 2u/3$. Таким образом, мы получаем систему

$$\begin{aligned} w_{x_1} + \frac{1}{9}(u)_{x_1}^2 - \frac{5}{9}u_{x_3} &= 0, \\ u_{x_5} - \frac{7}{9}u u_{x_3} + \frac{4}{9}u^2 u_{x_1} - u_{x_1} w - w_{x_3} &= 0 \end{aligned}$$

или, что эквивалентно, уравнение

$$\frac{9}{5}u_{x_5} - uu_{x_3} + u^2u_{x_1} - u_{x_1}\partial_{x_1}^{-1}u_{x_3} - \partial_{x_1}^{-1}u_{x_3x_3} = 0, \quad (4.8)$$

которое есть просто уравнение БКП типа Б (БКПБ) [9], [18]. Аналогичным образом можно получить всю иерархию БКПБ, которая представляет собой коизотропные деформации тройных систем Йордана (4.3).

Структурные константы имеют следующий, аналогичный случаю БКП (2.1), вид:

$$\begin{aligned} C_{ikl}^m = & \delta_{i+k+l+1}^m + H_{2(k+l-m)+1}^{2i+1} + H_{2(i+l-m)+1}^{2k+1} + H_{2(i+k-m)+1}^{2l+1} + \\ & + \sum_{\substack{p,t=0 \\ p+t=l-1-m; m \geq 0}}^{\infty} H_{2p+1}^{2i+1} H_{2t+1}^{2k+1} + \sum_{\substack{p,s=0 \\ p+s=k-1-m; m \geq 0}}^{\infty} H_{2p+1}^{2i+1} H_{2s+1}^{2l+1} + \\ & + \sum_{\substack{t,s=0 \\ t+s=i-1-m; m \geq 0}}^{\infty} H_{2t+1}^{2k+1} H_{2s+1}^{2l+1}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $H_{2p+1}^{2i+1} = 0$ при $p \leq 1$. Условия ассоциативности (4.5) эквивалентны бесконечному множеству кубических уравнений для коэффициентов H_{2p+1}^{2i+1} , а условия коизотропности эквивалентны этим алгебраическим условиям ассоциативности и уравнениям точности, аналогичным тем, которые мы имели в случае БКП.

Двухточечная иерархия БКП с инволюцией $p_i \rightarrow -q_i$, $q_i \rightarrow -p_i$ дает нам еще один интересный пример. В этом случае мы имеем два семейства соотношений (4.1), а именно

$$\begin{aligned} p_{2i+1} &= \sum_{k=0}^i v_{i,k}(x, y) p_1^{2k+1}, \\ q_{2i+1} &= \sum_{k=0}^i w_{i,k}(x, y) q_1^{2k+1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

со склеивающим соотношением

$$p_1 q_1 = u(x, y), \quad (4.11)$$

где $(x, y) = (x_1, x_3, x_5, \dots; y_1, y_3, y_5, \dots)$.

Соответствующая замкнутая “алгебра” определяется следующей таблицей умножения:

$$\begin{aligned} p_i p_k p_l &= \sum_{m=1} A_{ikl}^m(x, y) p_m, \\ q_i q_k q_l &= \sum_{m=1} B_{ikl}^m(x, y) q_m, \\ p_i p_k q_l &= \sum_{m=1} C_{ikl}^m(x, y) p_m + \sum_{m=1} D_{ikl}^m(x, y) q_m, \\ p_i q_k q_l &= \sum_{m=1} E_{ikl}^m(x, y) p_m + \sum_{m=1} F_{ikl}^m(x, y) q_m. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Формулы (4.12) определяют двойную тройную систему Йордана. В параметризации (4.10), (4.11) структурные константы A и B определяются соотношениями типа (4.2), в то время как

$$\begin{aligned} C_{111}^1 &= u, & D_{111}^m &= 0, & E_{111}^m &= 0, & F_{111}^1 &= u, \\ C_{113}^1 &= w_{1,1}u, & D_{113}^1 &= u^2, & E_{311}^1 &= u^2, & F_{311}^1 &= uv_{1,1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

и т.д.

Вообще “структурные константы” A, B, C, D, E, F удовлетворяют набору кубических условий “ассоциативности”. Условие коизотропности для гамильтонианов, определяемых формулами (4.12), снова порождает интегрируемые деформации тройной системы (4.12). Они могут быть названы двухточечной иерархией БКПБ.

Рассмотрим совокупность трех низших гамильтонианов из формул (4.10), (4.11), т.е.

$$\begin{aligned} f &= p_3 - p_1^3 + vp, \\ \tilde{f} &= q_3 - q_1^3 + wq_1, \\ H &= p_1q_1 - u(x, y). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Условия коизотропности для нулевого множества Γ : $f = g = H = 0$ принимают вид

$$\begin{aligned} \{f, \tilde{f}\} &= 3(w_{x_1}p_1 - v_{y_1}q_1)H, \\ \{f, H\} &= v_{x_1}H, \\ \{\tilde{f}, H\} &= w_{y_1}H \end{aligned} \quad (4.15)$$

вместе с уравнениями

$$\begin{aligned} u_{x_3} + (uv)_{x_1} &= 0, \\ v_{y_1} - 3u_{x_1} &= 0, \\ u_{y_3} + (uw)_{y_1} &= 0, \\ w_{x_1} - 3u_{y_1} &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Эта система представляет собой бездисперсионный предел уравнения Нижника–Веселова–Новикова (уравнение БНВН) [10] (для решений вида $u = u(x_1, y_1, x_3 + y_3)$, если точнее). Все семейство коизотропных деформаций для алгебры (4.12) дается иерархией БНВН.

Основные системы для рассмотренных выше алгебраических структур, существование тау-функций и соответствующих бездисперсионных уравнений Хироты будут рассмотрены в последующих работах.

5. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕДУКЦИИ БЕЗДИСПЕРСИОННЫХ ИЕРАХИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ НА ФИКСИРОВАННОМ УРОВНЕ ЭНЕРГИИ

Интегрируемые иерархии и в целом конструкция, рассмотренная в настоящей работе, допускают редукции, для которых некоторые переменные x_i являются циклическими. Например, в случае иерархии БКП цикличность переменной x_2 сводит ее

к бездисперсионной иерархии Кортевега–де Фриза. При такой редукции $\{p_i, f\} = 0$ для любой функции f и, следовательно, $p_i = \text{const}$. Таким образом, число канонических переменных эффективно уменьшается вдвое, и число гамильтонианов становится равным половине от полного числа переменных.

Проанализируем такую ситуацию более внимательно. Начнем с уравнения бКП и предположим, что переменная x_3 является циклической, следовательно, $p_3 = \text{const}$. При такой стационарной редукции уравнение бКП принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_1^2} = 0, \quad (5.1)$$

и мы имеем два гамильтониана (1.10):

$$\begin{aligned} H &:= h_2 = -p_2 + p_1^2 + u(x_1, x_2), \\ H_1 &:= h_3 = p_1^3 + \frac{3}{2}up_1 + v + \text{const}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $\partial v / \partial x_1 = (4/3)\partial u / \partial x_2$; они находятся в инволюции: $\{H, H_1\} = 0$.

Динамическая система, соответствующая гамильтониану H , содержит, в частности, уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= 2 \frac{\partial H}{\partial p_1} = 2p_1, \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\frac{\partial u}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = -2 \frac{\partial u}{\partial x_1}. \quad (5.4)$$

Функция H_1 является для динамической системы (5.3) интегралом движения, кубическим по импульсу. Это наблюдение воспроизводит результат работы [19], утверждающий, что динамическая система (5.3), (5.4) с потенциалом $u(x_1, x_2)$, удовлетворяющим уравнению (5.1), имеет дополнительный интеграл движения, кубический по импульсу p_1 .

В случае цикличности по переменным x_n ($n \geq 4$) мы имеем гамильтониан $H_n = p_1^n + \dots$, находящийся в инволюции с гамильтонианом H , который является интегралом движения для системы (5.3) порядка n [19].

Другой простой пример дает стационарная система бНВН (4.14), (4.15). Чтобы установить связь с обычными двумерными динамическими системами, наложим ограничения $y_1 = \bar{x}_1$, $q_1 = \bar{p}_1$, $q_3 = \bar{p}_3$, $w = \bar{v}$ (черта означает комплексное сопряжение) и предположим, что u зависит только от переменных x_1 , $\bar{x}_1$ и $t = x_3 + y_3$. Переходя к новым переменным $x_1 \rightarrow z := x_1 + ix_2$, $p_1 \rightarrow p := p_1 + ip_2$, можно переписать гамильтониан H в виде

$$H = p_1^2 + p_2^2 + u(x_1, x_2, t), \quad (5.5)$$

а соответствующее уравнение примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial z} + \frac{\partial(u\bar{v})}{\partial \bar{z}} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} &= 3 \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Это есть бездисперсионное уравнение Веселова–Новикова (уравнение бВН) [2], [10]. Вместо двух гамильтонианов f и $\tilde{f}$ (4.14) мы имеем для уравнения (5.6) их сумму

$$\tilde{H} = f + \tilde{f} = p_3 + \bar{p}_3 - p^3 + vp - \bar{p}^3 + \bar{v}\bar{p}\tag{5.7}$$

и

$$\{H, \tilde{H}\} = (v_z + \bar{v}_{\bar{z}}) H.\tag{5.8}$$

Формулы (5.7), (5.8) означают, что для любого решения уравнения бВН (5.6) динамическая система с гамильтонианом H (5.5) обладает на нулевом уровне энергии $E = 0$ дополнительным интегралом движения $\tilde{H}$ (5.7). В частности, в стационарном случае $\partial u / \partial t = 0$ сумма $p_3 + \bar{p}_3$ постоянна и, следовательно,

$$\tilde{H} = -p^3 + vp - \bar{p}^3 + \bar{v}\bar{p} + \text{const}.\tag{5.9}$$

Таким образом, в этом случае мы имеем динамическую систему с двумя степенями свободы, которая при нулевом уровне энергии $E = 0$ имеет дополнительный кубический интеграл движения (5.9), если потенциал u является решением стационарного уравнения бВН

$$\frac{\partial(uv)}{\partial z} + \frac{\partial(u\bar{v})}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 3 \frac{\partial u}{\partial z}.\tag{5.10}$$

Такие интегралы движения обычно называются условными, или конфигурационными (см., например, монографии [20]). Связь между существованием условных кубических интегралов (5.9) и уравнением (5.10) была установлена в рамках другого подхода в работе [21] (формула (7.5.12)). Аналогично высшие условные интегралы нечетного порядка для гамильтоновой системы (5.5), найденные в работе [21], являются гамильтонианами H_n , связанными с высшими стационарными уравнениями бВН.

Таким образом, стационарные иерархии бКП, бВН и другие стационарные бездисперсионные интегрируемые иерархии предоставляют нам динамические системы, вполне интегрируемые по Лиувиллю на фиксированном уровне энергии.

Полные бездисперсионные иерархии в нашей схеме характеризуются существованием такого числа независимых гамильтонианов, которое равно половине размерности симплектического пространства минус один. Они представляют собой иерархии, наиболее близкие к вполне интегрируемым по Лиувиллю иерархиям, и их можно назвать почти полностью интегрируемыми по Лиувиллю.

Благодарности. Авторы выражают благодарность А. Моро за помощь в подготовке статьи. Работа была частично поддержана грантами COFIN 2004 “Sintesi” и COFIN 2004 “Nonlinear Waves and Integrable systems”.

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, *Функц. анализ и его прилож.*, **14**:2 (1980), 15–24; Y. Kodama, *Phys. Lett. A*, **129** (1988), 223–226; Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *УМН*, **44**:6 (1989), 29–98; B. A. Kuperschmidt, *J. Phys. A*, **23** (1990), 871–886; R. Carroll, Y. Kodama, *J. Phys. A*, **28** (1995), 6373–6387; J. Gibbons, S. P. Tsarev, *Phys. Lett. A*, **211** (1996), 19–24; P. B. Wiegmann, A. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.*, **213** (2000), 523–538.
- [2] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прилож.*, **22**:3 (1988), 37–52.
- [3] Y. Kodama, *Phys. Lett. A*, **147** (1990), 477–482.
- [4] K. Takasaki, T. Takebe, *Internat. J. Modern Phys. A*, **7** (1992), 889–922.
- [5] K. Takasaki, T. Takebe, *Rev. Math. Phys.*, **7** (1995), 743–808.
- [6] I. M. Krichever, *Commun. Pure Appl. Math.*, **47** (1994), 437–475.
- [7] V. E. Zakharov, “Dispersionless limit of integrable systems in $2 + 1$ dimensions”, *Singular Limits of Dispersive Waves*, Proc. NATO Adv. Res. Workshop (Lyon, France, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B, Phys., **320**, eds. N. M. Ercolani et al., Plenum, New York, 1994, 165–174.
- [8] A. Boyarsky, A. Marshakov, O. Ruchayskiy, P. B. Wiegmann, A. Zabrodin, *Phys. Lett.*, **515** (2001), 483–492.
- [9] B. G. Konopelchenko, L. Martinez Alonso, *J. Math. Phys.*, **43** (2003), 3807–3823.
- [10] B. G. Konopelchenko, L. Martínez Alonso, *Stud. Appl. Math.*, **109** (2002), 313–336.
- [11] B. G. Konopelchenko, F. Magri, *Coisotropic deformations of associative algebras and dispersionless integrable hierarchies*, [nlin.SI/0606069](https://arxiv.org/abs/nlin.SI/0606069).
- [12] A. Weinstein, *J. Math. Soc. Japan*, **40** (1988), 705–727; R. Berndt, *An Introduction to Symplectic Geometry*, Grad. Stud. Math., **26**, AMS, Providence, RI, 2001.
- [13] G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni, *Commun. Math. Phys.*, **197** (1998), 303–324.
- [14] E. Witten, *Nuclear Phys. B*, **340** (1990), 281–332; R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde, *Nuclear Phys. B*, **352** (1991), 59–86.
- [15] L. C. Li, *Commun. Math. Phys.*, **203** (1999), 573–592.
- [16] M. Błaszak, *Phys. Lett. A*, **297** (2002), 191–195.
- [17] N. Jacobson, *Structure and Representation of Jordan Algebras*, Colloq. Publ., **39**, AMS, Providence, RI, 1968; E. Neher, *Jordan Triple Systems by the Grid Approach*, Lect. Notes Math., **1280**, Springer, Berlin, 1987.
- [18] K. Takasaki, *Lett. Math. Phys.*, **28** (1993), 177–185.
- [19] В. В. Козлов, *Матем. заметки*, **45**:4 (1989), 46–52.
- [20] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, AMS, New York, 1927; E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies with an Introduction to the Problem of Three Bodies*, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1937.
- [21] J. Hietarinta, *Phys. Rep.*, **147** (1987), 87–154.