Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Г. Конопельченко, Л. Мартинес Алонсо, Е. Медина,
Интегрируемые квазиклассические деформации общих
алгебраических кривых и соответствующие законы со-
хранения, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 3, 458–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6059>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 02:40:26

© 2007 г. Б. Г. Конопельченко*, Л. Мартинес Алонсо[†],
Е. Медина[‡]

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ОБЩИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Дана полная классификация интегрируемых деформаций общих алгебраических кривых, основанная на соотношениях Ленарда. Общее решение соотношения Ленарда строится из условия инвариантности относительно действия элемента группы Галуа кривой. Приведено несколько примеров, а также представлено несколько соответствующих законов сохранения.

Ключевые слова: алгебраические кривые, интегрируемые системы, соотношения Ленарда, законы сохранения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория алгебраических кривых является фундаментальной составной частью методов анализа интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений [1]–[2]. Особый интерес представляет задача характеристики и классификации интегрируемых деформаций алгебраических кривых. В работах [2] Кричевер сформулировал общую теорию бездисперсионных иерархий интегрируемых моделей, связанных с деформациями алгебраических кривых, возникающими в методе усреднения Уизема. Другой подход к поиску интегрируемых деформаций алгебраических кривых $\mathcal{C}$, определенных алгебраическими уравнениями с единичным коэффициентом при старшей степени вида

$$F(p, k) := p^N - \sum_{n=1}^N u_n(k) p^{N-n} = 0, \quad u_n \in \mathbb{C}[k], \quad (1)$$

*Dipartimento di Fisica, Università di Lecce and Sezione INFN, Lecce, Italy.
E-mail: konopel@le.infn.it

[†]Departamento de Física Teórica II, Universidad Complutense, Madrid, Spain.
E-mail: luism@fis.ucm.es

[‡]Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, Puerto Real, Cádiz, Spain.
E-mail: elena.medina@uca.es

был предложен в работах [3]–[7]. Чтобы ввести такие деформации, нужно рассмотреть N ветвей $p_j = p_j(k)$, $j = 1, \dots, N$, многозначной функции, определенной формулой (1):

$$F(p, k) = \prod_{j=1}^N (p - p_j(k)) = 0, \quad \mathbf{p}(k) = (p_1(k), \dots, p_N(k))^T.$$

В терминах этих ветвей задача может быть сформулирована так: требуется найти деформации кривой $\mathcal{C}(x, t)$, согласующиеся со степенями полиномов u_n и характеризующиеся наличием функции *действия* $\mathbf{S} = \mathbf{S}(k, x, t)$, которая удовлетворяет следующим условиям.

1 . Функция $\mathbf{p} = \mathbf{p}(k)$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{S}_x.$$

2 . Функции $\mathbf{S}_x$ и $\mathbf{S}_t$ как функции переменной p являются мероморфными на $\mathcal{C}(x, t)$ с полюсами только при $k = \infty$.

Из этих условий следует, что $\mathbf{p}$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \mathbf{p} = \partial_x \mathbf{Q}, \quad (2)$$

где $\mathbf{Q} := \mathbf{S}_t = (Q_1, \dots, Q_N)^T$ задается равенствами [3], [8]

$$Q_j = \sum_{r=1}^N a_r(k, x, t) p_j^{N-r}, \quad a_r \in \mathbb{C}[k], \quad j = 1, \dots, N,$$

с $Q_j \in \mathbb{C}[k, p]/\mathcal{C}$. Далее нам потребуется важный результат, касающийся поведения ветвей $p_j(k)$. Пусть через $\mathbb{C}((\lambda))$ обозначено поле рядов Лорана по переменной λ , которые содержат не более конечного числа членов с положительными степенями. Тогда имеет место теорема Ньютона [9].

ТЕОРЕМА 1. *Существует положительное целое число l такое, что N ветвей*

$$p_j(z) := (p_j(k))|_{k=z^l}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3)$$

являются элементами поля $\mathbb{C}((z))$. Более того, если $F(p, k)$ есть неприводимый над полем $\mathbb{C}((k))$ полином, то $l_0 = N$ есть наименьшее допустимое значение l , и ветви $p_j(z)$ могут быть пронумерованы таким образом, что

$$p_j(z) = p_N(\epsilon^j z), \quad \epsilon := e^{2\pi i/N}.$$

Соглашение об обозначениях. Впредь для заданной алгебраической кривой $\mathcal{C}$ через z мы будем обозначать переменную, связанную с наименьшим положительным числом l_0 , для которого замена переменных $k = z^{l_0}$ влечет $p_j \in \mathbb{C}((z))$ для любого j . Будем называть l_0 показателем Ньютона кривой $\mathcal{C}$.

Уравнение (2) может быть переписано в терминах потенциалов u_n , $n = 1, 2, \dots, N$, в виде [4], [5]

$$\partial_t \mathbf{u} = J_0 \mathbf{a}, \quad (4)$$

где $J_0 - (N \times N)$ -матричный дифференциальный оператор, элементы которого выражаются через потенциалы и их производные следующим образом:

$$\begin{aligned}(J_0)_{11} &= N\partial_x, \\(J_0)_{i1} &= (i-1)\mathcal{P}_{i-1}\partial_x - \sum_{l=2}^{i-1} u_{i-l}\mathcal{P}_{l-1}\partial_x - Nu_{i-1}\partial_x, \quad i \neq 1, \\(J_0)_{ij} &= (i+j-2)\mathcal{P}_{i+j-2}\partial_x + (j-1)\mathcal{P}_{i+j-2,x} - \\&\quad - \sum_{k=1}^{i-1} u_{i-k}[(k+j-2)\mathcal{P}_{k+j-2}\partial_x + (j-1)\mathcal{P}_{k+j-2,x}], \quad i \neq 1, \quad j \neq 1.\end{aligned}\tag{5}$$

Величины $\mathcal{P}_s$ представляют собой степенные суммы [10]:

$$\mathcal{P}_s := \frac{1}{s}(p_1^s + \dots + p_N^s) = \sum_{1 \leq i \leq s}^{(s)} \frac{1}{i}(u_1 + \dots + u_N)^i,$$

где индекс (s) над знаком суммы означает, что удерживаются лишь члены веса s .

Следующая задача состоит в определении выражений для $\mathbf{a}$ (в уравнении (4)), зависящих от k и $\mathbf{u}$ так, чтобы поток (4) был согласован с полиномиальной зависимостью потенциалов $\mathbf{u}$ от переменной k . Другими словами, если $d_n := \text{degree}(u_n)$ суть степени коэффициентов u_n как полиномов от k , то должны выполняться неравенства

$$\text{degree}(J_0\mathbf{a})_n \leq d_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Стратегия поиска согласованных деформаций [4], [5] заключается в том, чтобы использовать соотношения типа соотношений Ленарда

$$J_0\mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{r} := (r_1, \dots, r_N)^T, \quad r_j \in \mathbb{C}((k)),\tag{6}$$

и взять $\mathbf{a} := \mathbf{r}_+$, где $(\cdot)_+$ и $(\cdot)_-$ используются для обозначения частей с неотрицательными и отрицательными степенями по k , соответственно. Теперь из тождества $J_0\mathbf{a} = J_0\mathbf{r}_+ = -J_0\mathbf{r}_-$ ясно, что достаточное условие согласованности для системы (4) имеет вид

$$\max_{m=1, \dots, N} \{\text{degree}(J_0)_{nm}\} \leq d_n + 1, \quad n = 1, \dots, N.\tag{7}$$

Налагая это условие, мы получаем достаточное условие согласованности, которое зависит лишь от кривой (1) и не зависит от того, какое частное решение соотношения Ленарда было использовано. Все решения системы (7) для случаев $N = 2$ и $N = 3$ были даны в работах [4], [6], а для случая $N = 4$ – в работе [7]. Таким образом, было обнаружено, что согласованные степени таковы:

$$\begin{aligned}N = 2: & \quad d_1 \leq d_2 + 1; \\N = 3: & \quad (0, 0, 1) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 1, 1) \quad (0, 1, 2) \quad (1, 0, 0) \quad (1, 0, 1) \\& \quad (1, 1, 0) \quad (1, 1, 1) \quad (1, 1, 2) \quad (1, 2, 1) \quad (1, 2, 2) \quad (1, 2, 3); \\N = 4: & \quad (0, 0, 0, 1) \quad (0, 0, 1, 0) \quad (0, 0, 1, 1) \quad (0, 1, 0, 0) \\& \quad (0, 1, 0, 1) \quad (0, 1, 1, 0) \quad (0, 1, 1, 1) \quad (0, 1, 1, 2).\end{aligned}\tag{8}$$

Также в работе [7] был доказан общий результат для случая $N \geq 5$. Он формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ ($N \geq 5$) степени $(d_1, \dots, d_N)$ удовлетворяют условию согласованности (7) тогда и только тогда, когда*

$$d_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-3, \quad d_{N-2}, d_{N-1}, d_N \leq 1. \quad (9)$$

Следующим шагом при классификации деформаций является определение решений $\mathbf{r}$ соотношения Ленарда (6). В работах [4], [5] было доказано, что решение уравнения $J_0 \mathbf{r} = 0$ дается формулами

$$\mathbf{r} = T \nabla_{\mathbf{u}} R, \quad R = \sum_{j=1}^N g_j(z) p_j, \quad \nabla_{\mathbf{u}} R = \left(\frac{\partial R}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial R}{\partial u_N} \right)^T, \quad (10)$$

где

$$T := \begin{pmatrix} 1 & -u_1 & \cdots & -u_{N-1} \\ 0 & 1 & \cdots & -u_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

и $g_j \in \mathbb{C}((z))$. Таким образом, остается задача определения подходящего способа выбора функций g_j , при котором $R \in \mathbb{C}((k))$ и, следовательно, $\mathbf{r} \in \mathbb{C}((k))$. Эта задача рассматривалась в работе [6] в терминах элемента σ_0 группы Галуа кривой:

$$\sigma_0(p_j)(z) := p_j(\epsilon_0 z), \quad \epsilon_0 := e^{2\pi i/l_0}. \quad (11)$$

Таким образом, ясно, что требование $R \in \mathbb{C}((k))$ эквивалентно инвариантности функции R относительно действия элемента группы σ_0 :

$$R(\epsilon_0 z, \sigma_0 \mathbf{p}) = R(z, \mathbf{p}). \quad (12)$$

В настоящей работе мы сконцентрируем внимание на построении функций R вида (10), удовлетворяющих условию инвариантности (12). Используя эти функции, мы сможем представить некоторые примеры интегрируемых систем деформаций. Чтобы определить инвариантные функции R (10)–(12), необходимо классифицировать все согласованные степени потенциалов (8), (9) в соответствии с σ_0 и l_0 .

Работа организована следующим образом. Раздел 2 посвящен вычислению показателя Ньютона l_0 и элемента σ_0 (11) группы Галуа кривой в каждом из согласованных случаев (8) и (9). В разделе 3 мы рассматриваем задачу построения функции R вида (10), удовлетворяющую условию (12), в каждом из согласованных случаев. Наконец, в разделе 4 все полученные результаты иллюстрируются некоторыми примерами интегрируемых деформаций алгебраических кривых, в которых мы также получаем некоторые законы сохранения, связанные с каждой интегрируемой деформацией.

ТАБЛИЦА 1. Значения σ_0 и l_0 для $N = 2$.

σ_0	l_0	(d_1, d_2)
$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}$	2	$d_2 > 2d_1, d_2$ нечетная
$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$	1	$d_2 < 2d_1$ или d_2 четная

ТАБЛИЦА 2. Значения σ_0 и l_0 для $N = 3$.

σ_0	l_0	(d_1, d_2, d_3)
$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_1 \end{pmatrix}$	3	$(0, 0, 1) \quad (0, 1, 2)$
$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_1 & p_3 \end{pmatrix}$	2	$(0, 1, 0) \quad (0, 1, 1)$ $(1, 0, 0) \quad (1, 1, 2)$
$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$	1	$(1, 0, 1) \quad (1, 1, 0)$ $(1, 1, 1) \quad (1, 2, 1)$ $(1, 2, 2) \quad (1, 2, 3)$

2. ПОКАЗАТЕЛИ НЬЮТОНА
И ЭЛЕМЕНТЫ ГРУППЫ ГАЛУА КРИВОЙ

Нашей ближайшей целью является классификация всех согласованных случаев в терминах соответствующего показателя Ньютона и элемента σ_0 (11) группы Галуа кривой. Прежде всего, заметим, что при $N = 2, 3, 4$ ветви могут быть выражены через потенциалы, следовательно, используя разложения ветвей по степеням z и определение (11), мы немедленно приходим к результатам, представленным в следующих таблицах.

В общем случае при $N \geq 5$ в силу теоремы Абеля ветви не могут быть записаны через потенциалы. Тем не менее, все алгебраические кривые, соответствующие (9),

ТАБЛИЦА 3. Значения σ_0 и l_0 для $N = 4$.

σ_0	l_0	(d_1, d_2, d_3, d_4)
$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_2 & p_3 & p_4 & p_1 \end{pmatrix}$	4	$(0, 0, 0, 1)$
$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_2 & p_3 & p_1 & p_4 \end{pmatrix}$	3	$(0, 0, 1, 0)$ $(0, 0, 1, 1)$
$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_2 & p_1 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$	2	$(0, 1, 1, 0)$ $(0, 1, 1, 1)$ $(0, 1, 0, 1)$
$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_2 & p_1 & p_4 & p_3 \end{pmatrix}$	2	$(0, 1, 0, 0)$ $(0, 1, 1, 2)$

являются рациональными (k есть рациональная функция p). Таким образом, классификация может быть проведена путем исследования асимптотического поведения N ветвей p_j , $j = 1, 2, \dots, N$, при $k \rightarrow \infty$. Для этого запишем потенциалы в виде

$$u_n = \sum_{j=0}^{d_n} u_{nj} k^j.$$

Тогда имеем следующую классификацию.

- Пусть $(d_1, \dots, d_{N-3}, d_{N-2}, d_{N-1}, d_N) = (0, \dots, 0, 0, 0, 1)$. В этом случае формула (1) может быть записана в виде

$$k = \frac{1}{u_{N1}} \left(p^N - \sum_{l=1}^N u_{l0} p^{N-l} \right),$$

так что

$$p_j^N \sim u_{N1} k \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Следовательно, $p_j \in \mathbb{C}((k^{1/N}))$, $j = 1, 2, \dots, N$, и

$$l_0 = N, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{N-1} & p_N \\ p_2 & p_3 & \cdots & p_N & p_1 \end{pmatrix}.$$

- Пусть $(d_1, \dots, d_{N-3}, d_{N-2}, d_{N-1}, d_N) = (0, \dots, 0, 0, 1, 0)$. Теперь формула (1) имеет вид

$$k = \frac{1}{u_{N-11}} \left(p^{N-1} - \sum_{l=1}^N u_{l0} p^{N-l-1} - \frac{u_{N0}}{p} \right).$$

Таким образом, корни удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} p_j^{N-1} &\sim u_{N-11} k & \text{при } k \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \\ p_N &\sim -\frac{u_{N0}}{u_{N-11}} \frac{1}{k} & \text{при } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и мы имеем

$$l_0 = N-1, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{N-1} & p_N \\ p_2 & p_3 & \cdots & p_1 & p_N \end{pmatrix}.$$

- Пусть $(d_1, \dots, d_{N-3}, d_{N-2}, d_{N-1}, d_N) = (0, \dots, 0, 1, 0, 0)$. Из уравнения (1) кривой следует, что

$$k = \frac{1}{u_{N-21}} \left(p^{N-2} - \sum_{l=1}^{N-2} u_{l0} p^{N-l-2} + \frac{u_{N-10}}{p} + \frac{u_{N0}}{p^2} \right).$$

В таком случае

$$\begin{aligned} p_j^{N-2} &\sim u_{N-21} k & \text{при } k \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \dots, N-2, \\ p_j^2 &\sim \frac{u_{N0}}{u_{N-21}} \frac{1}{k} & \text{при } k \rightarrow \infty, \quad j = N-1, N. \end{aligned}$$

ТАБЛИЦА 4. Классификация (9) по σ_0 и l_0 .

σ_0	l_0	$(d_1, \dots, d_N)$
$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{N-1} & p_N \\ p_2 & p_3 & \dots & p_N & p_1 \end{pmatrix}$	N	$(0, \dots, 0, 0, 0, 1)$
$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{N-1} & p_N \\ p_2 & p_3 & \dots & p_1 & p_N \end{pmatrix}$	$N - 1$	$(0, \dots, 0, 0, 1, 0)$ $(0, \dots, 0, 0, 1, 1)$
$\begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_{N-2} & p_{N-1} & p_N \\ p_2 & \dots & p_1 & p_{N-1} & p_N \end{pmatrix}$	$N - 2$	$(0, \dots, 0, 1, 1, 0)$ $(0, \dots, 0, 1, 1, 1)$ $(0, \dots, 0, 1, 0, 1)$
$\begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_{N-2} & p_{N-1} & p_N \\ p_2 & \dots & p_1 & p_N & p_{N-1} \end{pmatrix}$	$N - 2$, если N четное $2(N - 2)$, если N нечетное	$(0, \dots, 0, 1, 0, 0)$

Таким образом, показатель Ньютона равен

$$l_0 = \begin{cases} N - 2, & \text{если } N \text{ четное,} \\ 2(N - 2), & \text{если } N \text{ нечетное,} \end{cases}$$

а соответствующий элемент группы Галуа задается выражением

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{N-2} & p_{N-1} & p_N \\ p_2 & p_3 & \dots & p_1 & p_N & p_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Действуя аналогичным образом в оставшихся случаях, получаем классификацию, отраженную в табл. 4.

3. ИНВАРИАНТНАЯ ФУНКЦИЯ R

Чтобы получить иерархию интегрируемых деформаций (4), требуется определить функцию R вида (10), удовлетворяющую условию инвариантности (12). Ввиду (12) различные случаи классифицируются по соответствующему элементу σ_0 группы Галуа кривой.

- Пусть $\sigma_0 = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{N-1} & p_N \\ p_2 & p_3 & \dots & p_N & p_1 \end{pmatrix}$.

В соответствии с табл. 1–4 имеем $l_0 = N$, ($\epsilon_0 = \epsilon = e^{2\pi i/N}$). Чтобы определить инвариантную функцию R , будем искать функции

$$R_k = \sum_{j=1}^N \alpha_j p_j \quad \text{такие, что} \quad \sigma_0(R_k) = \epsilon_0^{-k} R_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Легко проверить, что

$$\sigma_0(R_k) = \alpha_N p_1 + \sum_{j=2}^N \alpha_{j-1} p_j,$$

так что из условия $\sigma_0(R_k) = \epsilon_0^{-k} R_k$ следует

$$\alpha_{j-1} = \epsilon_0^{-k} \alpha_j, \quad \alpha_N = \epsilon_0^{-k} \alpha_1; \quad j = 2, \dots, N - 1, N.$$

Эта система допускает нетривиальные решения $\alpha_j = \epsilon_0^{j,k} \alpha_N$. Таким образом, функция R вида (10), удовлетворяющая условию (12), может быть записана следующим образом:

$$R = \sum_{k=0}^{N-1} z^k f_k(z^N) \sum_{j=1}^N \epsilon_0^{j,k} p_j, \quad (13)$$

где $f_k \in \mathbb{C}((z^N))$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

• Пусть $\sigma_0 = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_{N-2} & p_{N-1} & p_N \\ p_2 & \dots & p_{N-1} & p_1 & p_N \end{pmatrix}$.

Соответствующий показатель Ньютона равен $l_0 = N-1$ ($\epsilon_0 = e^{2\pi i/(N-1)}$). В этом случае $\sigma_0(p_N) = p_N$ или, что эквивалентно, $p_N \in \mathbb{C}((k))$. Поступим так же, как и в предыдущем случае, и будем искать функции

$$R_k = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j p_j \quad \text{такие, что} \quad \sigma_0(R_k) = \epsilon_0^{-k} R_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-2.$$

Поскольку действие элемента σ_0 на функцию R_k задается выражением

$$\sigma_0(R_k) = \alpha_{N-1} p_1 + \sum_{j=2}^{N-1} \alpha_{j-1} p_j,$$

условие $\sigma_0(R_k) = \epsilon_0^{-k} R_k$ дает

$$\alpha_{j-1} = \epsilon_0^{-k} \alpha_j, \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \quad \alpha_{N-1} = \epsilon_0^{-k} \alpha_1,$$

так что $\alpha_j = \epsilon_0^{j,k} \alpha_{N-1}$ и

$$R = \sum_{k=0}^{N-2} z^k f_k(z^{N-1}) \sum_{j=1}^{N-1} \epsilon_0^{j,k} p_j + f_{N-1}(z^{N-1}) p_N. \quad (14)$$

ПРИМЕР 3.1. Для $N = 3$

$$R = f_0(z^2)(p_1 + p_2) + z f_1(z^2)(p_1 - p_2) + f_2(z^2) p_3.$$

• Пусть $\sigma_0 = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_{N-2} & p_{N-1} & p_N \\ p_2 & \dots & p_1 & p_{N-1} & p_N \end{pmatrix}$.

В этом случае $l_0 = N-2$, ($\epsilon_0 = e^{2\pi i/(N-2)}$). Заметим, что $p_{N-1}, p_N \in \mathbb{C}((k))$. Будем искать функции

$$R_k = \sum_{j=1}^{N-2} \alpha_j p_j \quad \text{такие, что} \quad \sigma_0(R_k) = \epsilon_0^{-k} R_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-3.$$

Находим

$$\alpha_{j-1} = \epsilon_0^{-k} \alpha_j, \quad j = 2, 3, \dots, N-2, \quad \alpha_{N-2} = \epsilon_0^{-k} \alpha_1,$$

тогда $\alpha_j = \epsilon_0^{j,k} \alpha_{N-2}$ и

$$R = \sum_{k=0}^{N-3} z^k f_k(z^{N-2}) \sum_{j=1}^{N-2} \epsilon_0^{j,k} p_j + f_{N-2}(z^{N-2}) p_{N-1} + f_{N-1}(z^{N-2}) p_N. \quad (15)$$

ПРИМЕР 3.2. Для $N = 4$

$$R = f_0(z^2)(p_1 + p_2) + z f_1(z^2)(p_1 - p_2) + f_2(z^2)p_3 + f_3(z^2)p_4.$$

- Пусть $\sigma_0 = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_{N-2} & p_{N-1} & p_N \\ p_2 & \cdots & p_1 & p_N & p_{N-1} \end{pmatrix}$.

Как было указано в разделе 3, показатель Ньютона для этого элемента σ_0 зависит от того, является ли N четным или нечетным.

Пусть N четное, тогда $l_0 = N - 2$ ($\epsilon_0 = e^{2\pi i/(N-2)}$). Нетрудно видеть, что $p_{N-1} + p_N \in \mathbb{C}((k))$ и $\sigma_0(p_{N-1} - p_N) = -(p_{N-1} - p_N)$. С другой стороны, поскольку σ_0 действует на p_j , $j = 1, 2, \dots, N - 2$, так же, как и в предыдущем случае, и ϵ_0 совпадает с предыдущим, снова имеем, что функции

$$R_k = \sum_{j=1}^{N-2} \epsilon_0^{j k} p_j, \quad k = 0, 1, \dots, N - 3,$$

удовлетворяют условию $\sigma_0(R_k) = \epsilon_0^{-k} R_k$. Поэтому R теперь дается выражением

$$R = \sum_{k=0}^{N-3} z^k f_k(z^{N-2}) \sum_{j=1}^{N-2} \epsilon_0^{j k} p_j + z^{(N-2)/2} f_{N-2}(z^{N-2})(p_{N-1} - p_N) + f_{N-1}(z^{N-2})(p_{N-1} + p_N). \quad (16)$$

ПРИМЕР 3.3. Для $N = 4$

$$R = f_0(z^2)(p_1 + p_2) + z f_1(z^2)(p_1 - p_2) + z f_2(z^2)(p_3 - p_4) + f_3(z^2)(p_3 + p_4).$$

Пусть N нечетное, тогда $l_0 = 2(N - 2)$ ($\epsilon_0 = e^{\pi i/(N-2)}$). В этом случае снова $p_{N-1} + p_N \in \mathbb{C}((k))$ и $\sigma_0(p_{N-1} - p_N) = -(p_{N-1} - p_N)$. Более того, если искать функции

$$R_k = \sum_{j=1}^{N-2} \alpha_j p_j \quad \text{такие, что} \quad \sigma_0(R_k) = \epsilon_0^{-2k} R_k, \quad k = 0, \dots, N - 3,$$

и действовать так же, как и ранее, то будем иметь $\alpha_j = \epsilon_0^{2j k} \alpha_{N-2}$, так что

$$R = \sum_{k=0}^{N-3} z^{2k} f_k(z^{2(N-2)}) \sum_{j=1}^{N-2} \epsilon_0^{2j k} p_j + z^{N-2} f_{N-2}(z^{2(N-2)})(p_{N-1} - p_N) + f_{N-1}(z^{2(N-2)})(p_{N-1} + p_N). \quad (17)$$

ПРИМЕР 3.4. Для $N = 5$

$$R = f_0(z^6)(p_1 + p_2 + p_3) + z^2 f_1(z^6)(e^{2\pi i/3} p_1 + e^{4\pi i/3} p_2 + p_3) + z^4 f_2(z^6)(e^{4\pi i/3} p_1 + e^{2\pi i/3} p_2 + p_3) + z^3 f_3(z^6)(p_4 - p_5) + f_4(z^6)(p_4 + p_5).$$

Таким образом, интегрируемые деформации определяются выражениями (13)–(17) для функции R в зависимости от элемента группы Галуа σ_0 и показателя Ньютона l_0 .

4. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В этот раздел мы включили несколько примеров интегрируемых деформаций алгебраических кривых, соответствующих случаям $N = 3$ и $N = 4$. Прежде всего, отметим, что разложение компонент векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{Q}$ в ряд по z в первом уравнении для деформаций (2) приводит к бесконечному множеству законов сохранения. Именно в этом смысле мы называем деформации интегрируемыми. В приводимых примерах мы определим первые члены этих систем законов сохранения.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $N = 3$, $(d_1, d_2, d_3) = (0, 0, 1)$.

Такой выбор степеней соответствует неприводимому случаю, и, следовательно, показатель Ньютона равен $l_0 = 3$. Из уравнений (4)–(6) находятся тривиальные уравнения $u_{10,t} = u_{31,t} = 0$, поэтому берем

$$u_1 = 1, \quad u_2 = u_{20}, \quad u_3 = k + u_{30},$$

и, выбирая

$$R = \frac{27}{4}(1 - i\sqrt{3})z^5\mathcal{L}_2,$$

получаем, что деформация задается следующей системой законов сохранения:

$$\begin{aligned} u_{20,t} &= \frac{5}{18}\partial_x(7u_{20} + 18u_{20}^2 + 9u_{20}^3 + 54u_{20}u_{30} + 12u_{30} + 81u_{30}^2), \\ u_{30,t} &= \frac{5}{18}\partial_x(2u_{20}^2 + 27u_{30}u_{20}^2 - u_{30} - 27u_{30}^2 + 6u_{20}^3). \end{aligned} \quad (18)$$

Эта система также может быть получена из уравнения (2). Действительно, если рассмотреть коэффициенты при z^{-1} и z^{-2} в (2), то мы придем к (18). С другой стороны, коэффициент при z^{-3} дает тривиальные уравнения, в то время как из рассмотрения коэффициента при z^{-4} мы получаем закон сохранения

$$\begin{aligned} \partial_t(5u_{20} + 9u_{20}^2 + 9u_{30} + 27u_{20}u_{30}) &= \\ = \partial_x \left(\frac{175}{18}u_{20} + \frac{95}{2}u_{20}^2 + \frac{195}{2}u_{20}^3 + \frac{135}{2}u_{20}^4 + \frac{85}{6}u_{30} + \frac{255}{2}u_{20}u_{30} + \frac{675}{2}u_{20}^2u_{30} + \right. \\ \left. + \frac{675}{2}u_{20}^2u_{30} + \frac{405}{2}u_{20}^3u_{30} + 90u_{30}^2 + 405u_{20}u_{30}^2 + 405u_{30}^3 \right). \end{aligned}$$

Коэффициенты при z^{-j} , $j > 4$, приводят к более сложным законам сохранения.

ПРИМЕР 4.2. Пусть $N = 3$, $(d_1, d_2, d_3) = (1, 0, 0)$.

Теперь показатель Ньютона равен $l_0 = 2$, и из уравнений (4)–(6) вытекает, что $(u_{30}/u_{11})_t = 0$. Поэтому полагая

$$u_1 = u_{11}k + u_{10}, \quad u_2 = u_{20}, \quad u_3 = u_{11}$$

и выбирая R в виде

$$R = z^4(p_1 + p_2),$$

получаем

$$\begin{aligned} u_{11,t} &= \partial_x \left(-\frac{2u_{10}}{u_{11}} \right), & u_{10,t} &= \partial_x \left(-\frac{u_{10}^2 + 2u_{20}}{u_{11}^2} \right), \\ u_{20,t} &= \frac{1}{u_{11}^3} [2u_{10}u_{20}u_{11,x} + u_{11}(-2u_{20}u_{10,x} + 4u_{11,x})], \end{aligned} \quad (19)$$

где только первые два уравнения являются законами сохранения. Новые законы сохранения могут быть получены из уравнения (2). Например, рассматривая коэффициенты при z^{-2} , z^{-3} и z^{-4} , получаем

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{u_{20}}{u_{11}} \right) &= \partial_x \left(-\frac{2}{u_{11}^2} \right), & \partial_t \left(\frac{4u_{10}}{u_{11}} + \frac{u_{20}^2}{u_{11}^2} \right) &= \partial_x \left(-\frac{8u_{20}}{u_{11}^3} \right), \\ \partial_t \left(\frac{1}{u_{11}} - \frac{u_{10}u_{20}}{u_{11}^2} \right) &= \partial_x \left(\frac{2u_{10}}{u_{11}^3} + \frac{u_{20}^2}{u_{11}^4} \right). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4.3. Пусть $N = 4$, $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (0, 1, 0, 0)$.

При таком выборе степеней показатель Ньютона равен $l_0 = 2$ и $(u_{40}/u_{21})_t = 0$. Поэтому положим

$$u_1 = u_{10}, \quad u_2 = u_{21}k + u_{20}, \quad u_3 = u_{30}, \quad u_4 = u_{21}.$$

Нумеруя ветви кривой $\mathcal{C}$ так, что $p_{1,2} \sim z + O(1)$, $p_{3,4} \sim z^{-1} + O(z^{-2})$, и выбирая

$$R = z^4(p_3 + p_4),$$

получаем

$$\begin{aligned} u_{10,t} &= \partial_x \left(\frac{2u_{10}^2u_{20} + 2u_{20}^2 - 4u_{21} + 2u_{10}u_{30}}{u_{21}^2} \right), \\ u_{21,t} &= 4u_{21}^{1/2} \partial_x \left(\frac{2u_{10}u_{20} - 2u_{30}}{u_{21}^{3/2}} \right), \\ u_{20,t} &= u_{21}^{-2} [(4u_{20}^2 - 2u_{10}u_{30} + 4u_{21})u_{10,x} + (4u_{10}u_{20} + 2u_{30})u_{20,x} - 2u_{10}^2u_{30,x}] + \\ &\quad + u_{21}^{-3} (6u_{10}u_{21} - 6u_{10}u_{20}^2 + 4u_{10}^2u_{30} - 2u_{20}u_{30} - 14u_{10}u_{21})u_{21,x}, \\ u_{30,t} &= u_{21}^{-2} [(4u_{20}u_{30} - 4u_{10}u_{21})u_{10,x} + (4u_{10}u_{30} + 4u_{21})u_{20,x} - 4u_{30}u_{30,x}] + \\ &\quad + u_{21}^{-3} [(4u_{20} - 2u_{10}^2 - 12u_{20})u_{21} - 6u_{10}u_{20}u_{30} + 6u_{30}^2 + 6u_{10}^2u_{21}]u_{21,x}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь первое уравнение сразу имеет вид закона сохранения, а второе может быть преобразовано к такому виду для $u_{21}^{1/2}$. Новые законы сохранения, соответствующие системе (20), могут быть выведены из уравнения (2). Так, из рассмотрения коэффициентов при z^{-1} находим

$$\partial_t \left(\frac{4u_{10}^2 + 4u_{20}}{u_{21}^{1/2}} \right) = \partial_x \left(\frac{2u_{10}^3u_{20} + 8u_{10}u_{20}^2 + 16u_{10}u_{21} - 2u_{10}^2u_{30} + 8u_{20}u_{30}}{u_{21}^{5/2}} \right),$$

а коэффициентам при z^{-j} , $j = 2, 3, 4$, для двух последних компонент уравнения (2) отвечают следующие законы сохранения:

$$\begin{aligned}\partial_t \left(\frac{u_{30}}{u_{21}} \right) &= \partial_x \left(\frac{4u_{20} - 2u_{10}^2}{u_{21}^2} \right), \\ \partial_t \left(\frac{4u_{20}u_{21} + u_{30}^2}{u_{21}^2} \right) &= \partial_x \left(\frac{16u_{10}u_{21} - 8u_{10}^2u_{30} + 16u_{20}u_{30}}{u_{21}^3} \right), \\ \partial_t \left(\frac{u_{10}u_{21} + u_{20}u_{30}}{u_{21}^2} \right) &= \partial_x \left(-\frac{2}{u_{21}^2} + \frac{4u_{20}^2 - 2u_{10}^2u_{20} + 6u_{10}u_{30}}{u_{21}^3} + \frac{(2u_{20} - u_{10}^2)u_{30}}{u_{21}^4} \right).\end{aligned}$$

Благодарности. Авторы выражают благодарность Ю. Кодаме за его непрерывное внимание и помощь во время выполнения этой работы и М. Павлову за полезные советы. Работа была частично поддержана МЕС (проект № FIS2005-00319) и грантом COFIN 2004 “Sintesi”.

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980; E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'ski, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-Geometric approach to nonlinear integrable equations*, Springer Ser. Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin, 1994; Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *УМН*, **44**:6 (1989), 29; H. Flaschka, M. G. Forest, D. W. McLaughlin, *Commun. Pure Appl. Math.*, **33** (1980), 739; B. A. Dubrovin, *Commun. Math. Phys.*, **145** (1992), 195.
- [2] И. М. Кричевер, *Функции, анализ и его прилож.*, **22**:3 (1988), 37; I. M. Krichever, *Commun. Pure Appl. Math.*, **47** (1994), 437.
- [3] Y. Kodama, B. G. Konopelchenko, *J. Phys. A*, **35** (2002), L489.
- [4] B. G. Konopelchenko, L. Martínez Alonso, *J. Phys. A*, **37** (2004), 7859.
- [5] Ю. Кодама, Б. Г. Конопельченко, Л. Мартинес Алонсо, *ТМФ*, **144** (2005), 94.
- [6] Y. Kodama, B. G. Konopelchenko, L. Martínez Alonso, E. Medina, *J. Math. Phys.*, **46** (2005), 113502.
- [7] B. G. Konopelchenko, L. Martínez Alonso, E. Medina, *J. Phys. A*, **39** (2006), 11231.
- [8] C. L. Siegel, *Topics in complex function theory, v. I. Elliptic Functions and Uniformization Theory*, Wiley, New York–London–Sydney, 1969.
- [9] R. Y. Walker, *Algebraic Curves*, Springer, New York–Heidelberg–Berlin, 1978; S. S. Abhyankar, *Algebraic Geometry for Scientists and Engineers*, Math. Surveys Monogr., **35**, AMS, Providence, RI, 1990.
- [10] L. Redei, *Algebra*, v. I, Pergamon, Oxford–New York–Toronto, 1967.