Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Сорба, Деформированные алгебры Вирасоро и $\mathcal{W}$ -алгебры, полученные из эллиптических алгебр, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 2, 311–322

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf606>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 18:00:36

© 2000 г.

П. Сорба*

ДЕФОРМИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ
ВИРАСОРО И $\mathcal{W}$ -АЛГЕБРЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ
ИЗ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ АЛГЕБР

Деформированные W_n -алгебры в классическом (т.е. пуассоновы структуры) и в квантовом (обменные алгебры) случаях построены из эллиптических алгебр $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$.

Памяти М. Савельева

Когда я думаю о Мише (а это в последние месяцы случалось довольно часто), первое, что вспоминается, — это его энтузиазм и его энергия в общении. Дружба значила многое для Миши. Мы, ученые, пользуемся счастливой возможностью приобретать настоящих друзей в среде коллег, и именно таким другом был Миша. Другой фундаментальной ценностью для него была его семья — родители, жена и дочь. Как сказал профессор Ю. И. Манин, просто и точно охарактеризовав Мишу, он был “хорошим сыном, хорошим мужем, хорошим отцом”. Мишины родители умерли около трех лет назад, и я помню, с какой скорбью он рассказал мне об этом во время нашей встречи в Грузии в сентябре 96-го. С тех пор он отдавал все свои силы заботе о жене и дочери, двух Светланах, как он любил их называть. Он так гордился своей одаренной дочерью — хорошим музыкантом, хорошей художницей, блестящей студенткой. Я хотел бы выразить им свое самое глубокое уважение.

Миша был выдающимся экспертом в области интегрируемых систем. Он был глубоко увлечен созданием моделей и очень успешно занимался этим в рамках теории Тоды. Я узнал от него многое о теориях Тоды и о непрерывных алгебрах Ли. Миша был убежден в важности симметрий и особенно интересовался использованием бесконечных симметрий, в частности $\mathcal{W}$ -алгебрами. Обсуждение непрерывных, в том числе бесконечномерных, симметрий становится в последние годы все более содержательным и богатым, и я беру на себя смелость предположить, что Мишу заинтересовало бы скромное сообщение, представленное ниже.

Настоящая работа является результатом сотрудничества, начатого около двух лет назад, с Ж. Аваном, Л. Фраппа и М. Росси. Наши результаты [1–3] относятся к построению деформированных алгебр Вирасоро (или, в более общем случае, деформиро-

*Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique LAPTH, Annecy-le-Vieux Cedex, France

ванных $\mathcal{W}$ -алгебр) из квантовых эллиптических алгебр $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$. В определенном смысле наш подход может рассматриваться как разновидность построения Сугавары в деформированном случае. Нужно заметить, что наш метод существенно отличается от прочих [4–6]: во-первых, он использует алгебры $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$, а во-вторых, вычисления выполняются прямым образом, исходя из абстрактных генераторов эллиптической алгебры. При этом нет нужды прибегать к какой-либо специальной реализации, как это делалось в процитированных выше работах, основанных, в частности, на q -деформированной бозонизации квантовой группы $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}(N)_c)$.

После введения алгебры $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$ [7, 8] мы прежде всего доказываем существование расширенного центра в $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$ при $c = -N$ и рассчитываем пуассоновы структуры в этом центре. Эти структуры идентифицируются как q -деформированные алгебры $Vir_q(sl(N))$. Мы показываем, что замкнутые (квадратичные) обменные алгебры существуют в случае, если $(-p^{1/2})^{NM} = q^{-c-N}$ для любого $M \in \mathbb{Z}$. Эти алгебры допускают классический предел (коммутирующие алгебры) при $p = q^{Nh}$ и $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Соответствующие пуассоновы структуры включают для четных h пуассоновы структуры из работы [4]. Обменные алгебры, таким образом, реализуют новое квантование этих пуассоновых структур. Однако для нечетных h этот классический предел принимает форму, отличную от формы исходных структур $Vir_q(sl(N))$. Этим подчеркивается ключевое значение исходной 3-параметрической структуры $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$ для существования промежуточной квантовой q -деформированной алгебры Вирасоро. При вычислении разложения этих структур по модам (как в классическом, так и в квантовом случаях) требуется маркировка “секторного типа” из-за сингулярного поведения структурной функции, рассматриваемой как аналитическое продолжение и потому допускающей различные формальные разложения в ряды, соответствующие сходящимся рядам в определенных областях комплексной плоскости. В конце мы кратко описываем существенные особенности обобщения нашего вычисления на поля высших спинов. В заключение мы обсуждаем перспективы, а также указываем на важную роль твистов Дринфельда, приводящих к унифицированному рассмотрению деформированных алгебр.

1. ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$

Определим R -матрицу для $\mathbb{Z}_N$ -вершинной модели ($\mathbb{Z}_N \equiv \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$) [9, 10]:

$$\tilde{R}(z, q, p) = \frac{z^{\frac{2}{N-2}}}{\kappa(z^2)} \frac{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right] (\zeta, \tau)}{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right] (\xi + \zeta, \tau)} \sum_{(\alpha_1, \alpha_2)} W_{(\alpha_1, \alpha_2)}(\xi, \zeta, \tau) I_{(\alpha_1, \alpha_2)} \otimes I_{(\alpha_1, \alpha_2)}^{-1},$$

где $z = e^{i\pi\xi}$, $q = e^{i\pi\zeta}$, $p = e^{2i\pi\tau}$ и $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$, ϑ – тэта-функции Якоби с рациональными характеристиками $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}/N \times \mathbb{Z}/N$:

$$\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{smallmatrix} \right] (\xi, \tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(i\pi(m + \gamma_1)^2\tau + 2i\pi(m + \gamma_1)(\xi + \gamma_2)).$$

Фактор нормализации задается соотношением

$$\frac{1}{\kappa(z^2)} = \frac{(q^{2N} z^{-2}; p, q^{2N})_{\infty} (q^2 z^2; p, q^{2N})_{\infty} (p z^{-2}; p, q^{2N})_{\infty} (p q^{2N-2} z^2; p, q^{2N})_{\infty}}{(q^{2N} z^2; p, q^{2N})_{\infty} (q^2 z^{-2}; p, q^{2N})_{\infty} (p z^2; p, q^{2N})_{\infty} (p q^{2N-2} z^{-2}; p, q^{2N})_{\infty}}.$$

Функции $W_{(\alpha_1, \alpha_2)}$ определяются как

$$W_{(\alpha_1, \alpha_2)}(\xi, \zeta, \tau) = \frac{1}{N} \frac{\vartheta \left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{\alpha_1}{N}}{\frac{1}{2} + \frac{\alpha_2}{N}} \right] (\xi + \frac{\zeta}{N}, \tau)}{\vartheta \left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{\alpha_1}{N}}{\frac{1}{2} + \frac{\alpha_2}{N}} \right] (\frac{\zeta}{N}, \tau)},$$

а матрицы $I_{(\alpha_1, \alpha_2)} = g^{\alpha_2} h^{\alpha_1}$, где $g_{ij} = \omega^i \delta_{ij}$, $h_{ij} = \delta_{i+1, j}$, суть $(N \times N)$ -матрицы (сложение индексов понимается по модулю N) и $\omega = e^{2i\pi/N}$.

R -матрица $\tilde{R}$ является $\mathbb{Z}_N$ -симметричной:

$$\tilde{R}_{c+s, d+s}^{a+s, b+s} = \tilde{R}_{c, d}^{a, b}, \quad a, b, c, d, s \in \mathbb{Z}_N.$$

Введем “калибровочно-преобразованную” матрицу

$$R(z, q, p) = (g^{\frac{1}{2}} \otimes g^{\frac{1}{2}}) \tilde{R}(z, q, p) (g^{-\frac{1}{2}} \otimes g^{-\frac{1}{2}}).$$

Эта матрица:

а) удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера: $R_{12}(z) R_{13}(w) R_{23}(w/z) = R_{23}(w/z) \times R_{13}(w) R_{12}(z)$,

б) унитарна: $R_{12}(z) R_{21}(z^{-1}) = 1$,

в) кроссинг-симметрична: $R_{12}(z)^{t_2} R_{21}(q^{-N} z^{-1})^{t_2} = 1$,

г) антисимметрична: $R_{12}(-z) = \omega (g^{-1} \otimes \mathbb{I}) R_{12}(z) (g \otimes \mathbb{I})$,

д) квазипериодична: $\hat{R}_{12}(-p^{1/2} z) = (g^{1/2} h g^{1/2} \otimes \mathbb{I})^{-1} (\hat{R}_{21}(z^{-1}))^{-1} (g^{1/2} h g^{1/2} \otimes \mathbb{I})$,
где

$$\hat{R}_{12}(x) = \tau_N(q^{\frac{1}{2}} x^{-1}) R_{12}(x), \quad \tau_N(z) = z^{\frac{2}{N}-2} \frac{\Theta_{q^{2N}}(q z^2)}{\Theta_{q^{2N}}(q z^{-2})}.$$

Функция $\tau_N(z)$ периодична с периодом q^N ($\tau_N(q^N z) = \tau_N(z)$) и удовлетворяет условию $\tau_N(z^{-1}) = \tau_N(z)^{-1}$.

Определим эллиптическую квантовую алгебру $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$ [7, 8] как алгебру операторов $L_{ij}(z) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_{ij}(n) z^n$, где $i, j \in \mathbb{Z}_N$:

$$L(z) = \begin{pmatrix} L_{11}(z) & \cdots & L_{1N}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N1}(z) & \cdots & L_{NN}(z) \end{pmatrix}.$$

При этом q -детерминант задается соотношением

$$q\text{-det } L(z) \equiv \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^N L_{i, \sigma(i)}(z q^{i-N-1})$$

($\varepsilon(\sigma)$ – знак перестановки σ). Алгебра $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{gl}(N)_c)$ определяется наложением следующих ограничений на $L(z)$:

$$\widehat{R}_{12}\left(\frac{z}{w}\right)L_1(z)L_2(w) = L_2(w)L_1(z)\widehat{R}_{12}^*\left(\frac{z}{w}\right),$$

где $L_1(z) \equiv L(z) \otimes \mathbb{I}$, $L_2(z) \equiv \mathbb{I} \otimes L(z)$ и $\widehat{R}_{12}^*(z, q, p) \equiv \widehat{R}_{12}(z, q, p^* = pq^{-2c})$. Этот q -детерминант находится в центре $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{gl}(N)_c)$, и можно положить

$$\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c) = \frac{\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{gl}(N)_c)}{\langle q\text{-det } L - q^{\frac{c}{2}} \rangle}.$$

2. ЦЕНТР $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$

Мы принимаем, что $L^+(z) \equiv L(q^{c/2}z)$ и $L^-(z) \equiv g^{1/2}hg^{1/2}L(-p^{1/2}z)(g^{1/2}hg^{1/2})^{-1}$. Определим следующий оператор в $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$:

$$t(z) \equiv \text{Tr}(\mathcal{L}(z)) \equiv \text{Tr}(L^+(q^{c/2}z)L^-(z)^{-1}).$$

Из определяющих соотношений эллиптической алгебры и свойств матрицы $\widehat{R}$ (в частности, свойства квазипериодичности) можно получить следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *На критическом уровне $c = -N$ операторы, порождаемые $t(z)$, лежат в центре алгебры $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$:*

$$[t(z), L^+(w)] = [t(z), L^-(w)] = 0.$$

ТЕОРЕМА 2. *На критическом уровне $c = -N$ операторы, порождаемые $t(z)$, замыкаются в абелеву алгебру:*

$$[t(z), t(w)] = 0.$$

Это позволяет определить пуассонову структуру в центре $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$ при $c = -N$. Когда $c \neq -N$, имеем

$$\begin{aligned} t(z)t(w) &= \mathcal{Y}\left(\frac{w}{z}\right)_{j_1j_2}^{i_1i_2} \mathcal{L}(w)_{i_2}^{j_2} \mathcal{L}(z)_{i_1}^{j_1} = \\ &= t(w)t(z) + (c + N) \left(\frac{d\mathcal{Y}}{dc} \left(\frac{w}{z} \right) \right)_{j_1j_2}^{i_1i_2} \mathcal{L}(w)_{i_2}^{j_2} \mathcal{L}(z)_{i_1}^{j_1} \Big|_{\text{cr}} + \dots \end{aligned}$$

Тогда пуассонова структура определяется соотношением

$$\{t(z), t(w)\} = \left(\frac{d\mathcal{Y}}{dc} \left(\frac{w}{z} \right) \right)_{j_1j_2}^{i_1i_2} \mathcal{L}(w)_{i_2}^{j_2} \mathcal{L}(z)_{i_1}^{j_1} \Big|_{\text{cr}}.$$

Представив $\mathcal{Y}(x)$ в виде $\mathcal{Y}(x) = T(x) \mathcal{M}(x)$, где

$$T(x) = \frac{\tau_N(q^{\frac{1}{2}}x^{-1})\tau_N(q^{\frac{1}{2}-c}x)}{\tau_N(q^{\frac{1}{2}}x)\tau_N(q^{\frac{1}{2}-c}x^{-1})}$$

и

$$\mathcal{M}(x) = \left((R_{21}(x) R_{21}(q^{c+N}x)^{-1} R_{12}(x^{-1})^{-1})^{t_2} R_{12}(q^c x^{-1})^{t_2} \right)^{t_2},$$

получаем

$$\left. \frac{d\mathcal{Y}}{dc}(x) \right|_{\text{cr}} = \left. \frac{dT}{dc}(x) \right|_{\text{cr}} \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 + \left. \frac{d\mathcal{M}}{dc}(x) \right|_{\text{cr}},$$

поскольку $T(x)_{\text{cr}} = 1$ и $\mathcal{M}(x)_{\text{cr}} = \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2$ на критическом уровне $c = -N$.

Из свойств матрицы R_{12} видно, что производная от $\mathcal{M}$ по c на критическом уровне обращается в нуль и

$$\{t(z), t(w)\} = \left. \frac{dT}{dc} \left(\frac{w}{z} \right) \right|_{\text{cr}} t(z) t(w) \equiv f \left(\frac{w}{z} \right) t(z) t(w),$$

где

$$f(x) = -2 \ln q \left[\sum_{l \geq 0} \left(\frac{2x^2 q^{2Nl}}{1 - x^2 q^{2Nl}} - \frac{x^2 q^{2Nl+2}}{1 - x^2 q^{2Nl+2}} - \frac{x^2 q^{2Nl-2}}{1 - x^2 q^{2Nl-2}} \right) - \frac{x^2}{1 - x^2} + \frac{1}{2} \frac{x^2 q^2}{1 - x^2 q^2} + \frac{1}{2} \frac{x^2 q^{-2}}{1 - x^2 q^{-2}} - (x \leftrightarrow x^{-1}) \right].$$

Пуассонова структура в центре $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}(N)_c)$ при $c = -N$ не зависит от p .

Определим теперь пуассонову структуру для модпроизводящей функции $f(x)$. Моды $t(z)$ определены в смысле формальных разложений:

$$t_m = \oint_C \frac{dz}{2i\pi z} z^{-m} t(z),$$

где C – контур вокруг начала координат. Однако функция $f(x)$ имеет полюсы в $x = \pm q^{\pm Nl}$ и $x = \pm q^{\pm Nl \pm 1}$ при $l \geq 0$, и, следовательно,

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i z} \oint_{C_2} \frac{dw}{2\pi i w} \neq \oint_{C_2} \frac{dz}{2\pi i z} \oint_{C_1} \frac{dw}{2\pi i w}.$$

Чтобы получить однозначный ответ для скобок Пуассона, необходимо специфицировать относительную позицию контуров C_1 и C_2 . Более того, антисимметрия скобок Пуассона на уровне мод может быть гарантирована только при явной симметризации по отношению к положению контуров C_1 и C_2 . Таким образом, скобка Пуассона определяется в терминах мод следующим образом:

$$\{t_n, t_m\} = \frac{1}{2} \left(\oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i z} \oint_{C_2} \frac{dw}{2\pi i w} + \oint_{C_2} \frac{dz}{2\pi i z} \oint_{C_1} \frac{dw}{2\pi i w} \right) \times \\ \times z^{-n} w^{-m} f \left(\frac{w}{z} \right) t(z) t(w),$$

где C_1 и C_2 суть окружности с радиусами R_1 и R_2 , причем условимся, что $R_1 > R_2$. Скобка Пуассона зависит от относительных позиций контуров C_1 и C_2 .

Введем понятие секторов: сектор k определяется соотношением $R_1/R_2 \in]|q|^{-P(k)}, |q|^{-P(k+1)}[$, где $\{P(k)\}$ есть упорядоченное множество степеней q^{-1} , в котором расположены полюсы производящей функции f : $\{P(k)\} = \{0, 1; N-1, N, N+1; \dots; Nl-1, Nl, Nl+1; \dots\}$.

В случае с $sl(N)$ при $R_1/R_2 \in]1, |q|^{-1}[$ (первый сектор) получим следующую формулу:

$$\{t_n, t_m\}_{k=0} = -2(q - q^{-1}) \ln q \sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{[(N-1)r]_q [r]_q}{[Nr]_q} t_{n-2r} t_{m+2r},$$

где $[r]_q$ — q -числа: $[r]_q \equiv (q^r - q^{-r})/(q - q^{-1})$.

В случае с $sl(2)$ при $R_1/R_2 \in]|q|^{\pm k}, |q|^{\pm(k+1)}[$ можно получить изящную компактную формулу для любого сектора:

$$\begin{aligned} \{t_n, t_m\}_k &= (-1)^{k+1} 2 \ln q \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i z} \oint_{C_2} \frac{dw}{2\pi i w} \times \\ &\times \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{q^{(2k+1)s} - q^{-(2k+1)s}}{q^s + q^{-s}} \left(\frac{z}{w}\right)^{2s} z^{-n} w^{-m} t(z) t(w). \end{aligned}$$

Таким образом можно получить семейство скобок Пуассона, пронумерованных числами $k \in \mathbb{Z}$, причем сектор $k = 0$ соответствует скобке Пуассона из работы [4].

Чтобы получить реализацию деформированных пуассоновых $\mathcal{W}_N$ -структур, необходимо ввести производящие функции для объектов высших спинов. Имея в распоряжении всего одну коммутирующую производящую функцию $t(z)$, мы приходим к необходимости определить сдвинутые произведения, хотя и с тем же генератором. Поэтому мы определим объекты высших спинов для $1 \leq i \leq N-1$ как

$$s_i(z) = \prod_{u=-(i-1)/2}^{(i-1)/2} t(q^u z).$$

Алгебра Пуассона выглядит следующим образом:

$$\{s_i(z), s_j(w)\} = \sum_{u=-(i-1)/2}^{(i-1)/2} \sum_{v=-(j-1)/2}^{(j-1)/2} f\left(q^{v-u} \frac{w}{z}\right) s_i(z) s_j(w).$$

Как и раньше, можно ввести понятие секторов для скобок Пуассона разложений по модам, теперь помеченных числами $k(i, j)$ [3]. Для сектора $k = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \{s_i(n), s_j(m)\} &= - \sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{[(N - \max(i, j))r]_q [\min(i, j)r]_q}{[Nr]_q} \times \\ &\times 2(q - q^{-1}) \ln q s_i(n - 2r) s_j(m + 2r). \end{aligned} \quad (1)$$

Любая пуассонова структура в заданном секторе $k(i, j)$ может быть получена из выражения (1) прибавлением к коэффициенту структуры, зависящему от r , вкладов от соответствующих сингулярностей структурной функции, т.е. степенных разложений членов $\delta(\pm q^{\pm P_{ij}(s)} w/z) s_i(z) s_j(w)$, $1 \leq s \leq k(i, j)$.

3. ОБМЕННЫЕ АЛГЕБРЫ $\mathcal{W}_{q,p}(sl(N))$

3.1. Обменные q -алгебры Вирасоро. В то время как при $c = -N$ операторы $t(z)$ и $L(w)$ коммутируют, при $(-p^{1/2})^{NM} = q^{-c-N}$ ($M \in \mathbb{Z}$) они реализуют *обменную алгебру*:

$$t(z) L(w) = F\left(M, \frac{w}{z}\right) L(w) t(z),$$

где

$$F(M, x) = \begin{cases} q^{2M(N-1)} \prod_{k=0}^{NM-1} \frac{\Theta_{q^{2N}}(x^{-2}p^{-k}) \Theta_{q^{2N}}(x^2p^k)}{\Theta_{q^{2N}}(x^{-2}q^2p^{-k}) \Theta_{q^{2N}}(x^2q^2p^k)} & \text{при } M > 0, \\ q^{-2|M|(N-1)} \prod_{k=1}^{N|M|} \frac{\Theta_{q^{2N}}(x^{-2}q^2p^k) \Theta_{q^{2N}}(x^2q^2p^{-k})}{\Theta_{q^{2N}}(x^{-2}p^k) \Theta_{q^{2N}}(x^2p^{-k})} & \text{при } M < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует

ТЕОРЕМА 3. На двумерной поверхности $\Sigma_{N,M} = \{(p, q) \mid (-p^{1/2})^{NM} = q^{-c-N}\}$ трехмерного пространства параметров q, p, c операторы, порождаемые $t(z)$, составляют квадратичную алгебру:

$$t(z) t(w) = \mathcal{Y}_{N,p,q,M}\left(\frac{w}{z}\right) t(w) t(z),$$

где

$$\mathcal{Y}_{N,p,q,M}(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{NM} \frac{\Theta_{q^{2N}}^2(x^2p^{-k}) \Theta_{q^{2N}}(x^2q^2p^k) \Theta_{q^{2N}}(x^2q^{-2}p^k)}{\Theta_{q^{2N}}^2(x^2p^k) \Theta_{q^{2N}}(x^2q^2p^{-k}) \Theta_{q^{2N}}(x^2q^{-2}p^{-k})} & \text{при } M > 0, \\ \prod_{k=1}^{N|M|-1} \frac{\Theta_{q^{2N}}^2(x^2p^{-k}) \Theta_{q^{2N}}(x^2q^2p^k) \Theta_{q^{2N}}(x^2q^{-2}p^k)}{\Theta_{q^{2N}}^2(x^2p^k) \Theta_{q^{2N}}(x^2q^2p^{-k}) \Theta_{q^{2N}}(x^2q^{-2}p^{-k})} & \text{при } M < 0. \end{cases}$$

При $N = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{2,p,q,M}(xq^2) &= \mathcal{Y}_{2,p,q,M}(x), \\ \mathcal{Y}_{2,p,q,M}(x) \mathcal{Y}_{2,p,q,M}(xq) &= 1. \end{aligned}$$

Восстанавливаются те же свойства периодичности, что и у структурной функции $\varphi(x)$ из работ [5, 6] в случае $sl(2)$ (при $M = 1$ выполняется замена переменных $q^2 \rightarrow p, p \rightarrow q, x^2 \rightarrow x$, тогда $\mathcal{Y}_{2,p,q,1}(x) \rightarrow \varphi^2(x)$ [6]).

При $N > 2$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{N,p,q,M}(xq^N) &= \mathcal{Y}_{N,p,q,M}(x), \\ \mathcal{Y}_{N,p,q,M}(x) \mathcal{Y}_{N,p,q,M}(xq) \cdots \mathcal{Y}_{N,p,q,M}(xq^{N-1}) &= 1. \end{aligned}$$

3.2. Обменные алгебры $\mathcal{W}_{q,p}(sl(N))$. Обобщение для генераторов высших спинов в квантовом случае следует из классического случая, однако требуется ввести упорядочение $t(z)$ -генераторов:

$$s_i(z) = \prod_{\substack{\frac{i-1}{2} \geq u \geq -\frac{i-1}{2}}}^{\curvearrowright} t(q^u z).$$

Обменная алгебра теперь принимает вид

$$s_i(z)s_j(w) = \prod_{u=-\frac{i-1}{2}}^{\frac{i-1}{2}} \prod_{v=-\frac{j-1}{2}}^{\frac{j-1}{2}} \mathcal{Y}_{N,p,q,M} \left(q^{v-u} \frac{w}{z} \right) s_j(w)s_i(z).$$

Далее можно убедиться в том, что $s_N(z)$ коммутирует со всеми остальными генераторами, таким образом, можно ограничиться следующими значениями для i : $i = 1, \dots, N-1$.

3.3. Классический предел.

ТЕОРЕМА 4. *На поверхности $\Sigma_{N,M}$ при $p = q^{Nh}$ и $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ справедливо равенство*

$$\mathcal{Y}_{N,p,q,M} = 1.$$

Таким образом, $t(z)$ реализует абелеву подалгебру в $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$ (хотя, вообще говоря, не находится в центре $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$).

Утверждение теоремы 3 позволяет определить пуассоновы структуры соответствующих абелевых алгебр, порождаемых $t(z)$. Они получаются как пределы обменной алгебры из теоремы 3 при $p = q^{Nh}$ и $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Если принять $q^{Nh} = p^{1-\beta}$, то пуассонова структура, помеченная числом h , определяется соотношением

$$\{t(z), t(w)\}^{(h)} \equiv \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} (t(z)t(w) - t(w)t(z)),$$

для четных h она совпадает с пуассоновой структурой для критического случая $c = -N$, тогда как для нечетных h — приводит к новым пуассоновым структурам (для $sl(N)$, $N > 2$). Имеем следующее явное выражение:

$$\{t(z), t(w)\}^{(h)} = f_h \left(\frac{w}{z} \right) t(z)t(w)$$

при

$$f_h(x) = \begin{cases} \mathcal{N}_{\text{odd}} \left[\sum_{\ell \geq 0} E\left(\frac{NM}{2}\right) \left(E\left(\frac{NM}{2}\right) + 1\right) \left(\frac{2x^2 q^{2N\ell}}{1 - x^2 q^{2N\ell}} - \frac{x^2 q^{2N\ell+2}}{1 - x^2 q^{2N\ell+2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{x^2 q^{2N\ell-2}}{1 - x^2 q^{2N\ell-2}}\right) + E\left(\frac{NM+1}{2}\right)^2 \left(\frac{2x^2 q^{2N\ell+N}}{1 - x^2 q^{2N\ell+N}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{x^2 q^{2N\ell+N+2}}{1 - x^2 q^{2N\ell+N+2}} - \frac{x^2 q^{2N\ell+N-2}}{1 - x^2 q^{2N\ell+N-2}}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} E\left(\frac{NM}{2}\right) \left(E\left(\frac{NM}{2}\right) + 1\right) \left(\frac{2x^2}{1 - x^2} - \frac{x^2 q^2}{1 - x^2 q^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{x^2 q^{-2}}{1 - x^2 q^{-2}}\right) - (x \leftrightarrow x^{-1}) \right] \quad \text{для нечетных } h, \\ \mathcal{N}_{\text{even}} \left[\sum_{\ell \geq 0} \left(\frac{2x^2 q^{2N\ell}}{1 - x^2 q^{2N\ell}} - \frac{x^2 q^{2N\ell+2}}{1 - x^2 q^{2N\ell+2}} - \frac{x^2 q^{2N\ell-2}}{1 - x^2 q^{2N\ell-2}}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{2x^2}{1 - x^2} - \frac{x^2 q^2}{1 - x^2 q^2} - \frac{x^2 q^{-2}}{1 - x^2 q^{-2}}\right) - (x \leftrightarrow x^{-1}) \right] \quad \text{для четных } h, \end{cases}$$

где $\mathcal{N}_{\text{odd}} = 2Nh \ln q$, $\mathcal{N}_{\text{even}} = N^2 M(NM + 1)h \ln q$, $E(n)$ обозначает целую часть числа n .

Скобки Пуассона для мод в секторе $k = 0$ задаются соотношениями:

$$\{t_n, t_m\}^{(h)} = \begin{cases} -2(q - q^{-1}) \ln q \sum_{r \in \mathbb{Z}} \left(-E\left(\frac{NM+1}{2}\right)^2 \frac{[r]_q^2}{[Nr]_q} + \right. \\ \left. + E\left(\frac{NM}{2}\right) \left(E\left(\frac{NM}{2}\right) + 1\right) \frac{[(N-1)r]_q [r]_q}{[Nr]_q} \right) t_{n-2r} t_{m+2r} \\ \quad \text{для нечетных } h, \\ -2(q - q^{-1}) \ln q \sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{[(N-1)r]_q [r]_q}{[Nr]_q} t_{n-2r} t_{m+2r} \\ \quad \text{для четных } h. \end{cases}$$

Поскольку начальная неабелева структура для $t(z)$ является замкнутой, обменные алгебры

$$t(z)t(w) = \mathcal{Y}_{N,p,q,M}\left(\frac{w}{z}\right)t(w)t(z)$$

суть *неэквивалентные квантования* (по отношению к p) скобки Пуассона, определяющей $Vir_q(sl(N))$, оператор $t(z)$ генерирует алгебру $Vir_{q,p}(sl(N))$.

Обобщение для генераторов высших спинов $s_i(z)$ не представляет затруднений. Получаются следующие результаты:

Для четных $h \{s_i(z), s_j(w)\}^{(h)}$ совпадает с пуассоновой структурой критического случая $c = -N$. Скобка Пуассона снова идентична “основному” (т.е. без расширений для низших спинов) вкладу из работы [4].

Для нечетных $h \{s_i(z), s_j(w)\}^{(h)}$ порождает два новых типа квадратичных пуассоновых структур (т.е. q -деформированных классических $\mathcal{W}_N$ -алгебр) соответственно при $i + j \leq N$ и $i + j > N$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описано построение деформированных алгебр Вирасоро и $\mathcal{W}$ -алгебр из эллиптических алгебр как в классическом, так и в квантовом случаях. Отметим, что исследование корректных центральных расширений, позволившее, в частности, получить общие результаты в простейших случаях $Vir_q(sl(2))$, было недавно предпринято в работе [11]. Также был выполнен прямой расчет абстрактных генераторов для q -деформированных $\mathcal{W}_N$ -алгебр. Такое универсальное построение $\mathcal{W}_{q,p}$ -алгебр предложено в статье [12].

Важным приложением приведенных выше построений является их применение для определения интегрируемых моделей, обладающих данными симметриями. Известно, что тригонометрическая модель Калоджеро–Мозера связана с алгеброй Вирасоро, а модель Руджинарса–Шнейдера – с q -деформированной алгеброй Вирасоро, рассмотренной в [5]. По-видимому, должны существовать обобщенные модели Руджинарса–Шнейдера, симметрии которых задаются описанными выше обменными q -алгебрами Вирасоро. Необходимым и пока не созданным инструментом представляется бозонизация этих алгебр.

В заключение заметим, что уравнение Янга–Бакстера допускает два класса эллиптических решений, называемых решениями типа вершины и типа грани, которым соответствуют эллиптические алгебры $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$ и $\mathcal{B}_{q,\lambda}(\mathcal{G})$, где $\mathcal{G}$ – любая простая алгебра Ли. Каждая из этих алгебр может быть получена из квантовой аффинной алгебры $\mathcal{U}_q(\mathcal{G}_c)$ посредством твиста Дринфельда [8]. Интересно также отметить, что второй хорошо известный тип деформации алгебры – янгиан $Y(\mathcal{G})$ – может быть включен в эту схему посредством своего дубля следующим образом. При переходе к пределу $q = 1$ в эллиптической алгебре $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}(N)_c)$ при $p = q^2\eta$ и фиксированном η получается деформированная центрально расширенная структура дубля янгиана $\mathcal{DY}_r(\widehat{sl}(N)_c)$, к которой может быть применена процедура, аналогичная описанной выше и приводящая к обменным подалгебрам (см. [13] и цитируемую там литературу). Тогда переход к пределу бесконечных η дает центрально расширенный дубль янгиана $\mathcal{DY}(\widehat{sl}(N)_c)$. Соотношения между этими алгебрами схематически изображены на рисунке. Надеемся, что эта иллюстрация окажется полезной для более глубокого понимания структуры взаимосвязей деформированных алгебр.

Благодарности. Я хотел бы выразить свою благодарность профессорам Ч. Девчанду, Ю. И. Манину и М. А. Ольшанецкому за организацию конференции памяти Миши Савельева и за предоставленную мне возможность в ней участвовать.

Модели типа грани

Вершинные модели

Схема деформированных алгебр Ли

Список литературы

- [1] *J. Avan, L. Frappat, M. Rossi, P. Sorba.* Phys. Lett. A. 1997. V. 235. P. 323.
- [2] *J. Avan, L. Frappat, M. Rossi, P. Sorba.* Phys. Lett. A. 1998. V. 239. P. 27.
- [3] *J. Avan, L. Frappat, M. Rossi, P. Sorba.* Commun. Math. Phys. 1999. V. 199. P. 697.
- [4] *E. Frenkel, N. Reshetikhin.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 178. P. 237.
- [5] *J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata, S. Odake.* Lett. Math. Phys. 1996. V. 38. P. 33.
- [6] *B. Feigin, E. Frenkel.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 178. P. 653.
- [7] *O. Foda, K. Iohara, M. Jimbo, R. Kedem, T. Miwa, H. Yan.* Lett. Math. Phys. 1994. V. 32. P. 259.
- [8] *M. Jimbo, H. Konno, S. Odake, J. Shiraishi.* Quasi-Hopf twistors for elliptic quantum groups. q-alg/9712029.
- [9] *Р. Бэктер.* Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
- [10] *A. A. Belavin.* Nucl. Phys. B. 1981. V. 180. P. 189.
- [11] *J. Avan, L. Frappat, M. Rossi, P. Sorba.* Phys. Lett. A. 1999. V. 251. P. 13.
- [12] *J. Avan, L. Frappat, M. Rossi, P. Sorba.* Commun. Math. Phys. 1999. V. 202. P. 445.
- [13] *D. Arnaudon, J. Avan, L. Frappat, M. Rossi.* Deformed double Yangian structures. Preprint PAP-LPTHE 99-05. Paris: Univ. Paris-VI, 1999; math. QA/9905100; Rev. Math. Phys. (in press).