Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Кунду, Алгебра Янга–Бакстера и генерация квантовых интегрируемых моделей, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 3, 470–485

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6060>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:21:56

© 2007 г.

А. Кунду*

АЛГЕБРА ЯНГА–БАКСТЕРА И ГЕНЕРАЦИЯ КВАНТОВЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

На основе анализа квантового уравнения Янга–Бакстера с тригонометрической R -матрицей обнаружена операторно-деформированная квантовая алгебра. Эта новая алгебра Хопфа (и ее предел при $q \rightarrow 1$) представляется наиболее общей алгеброй Янга–Бакстера, лежащей в основе квантовых интегрируемых систем. Указаны три направления применения этой алгебры в интегрируемых системах в зависимости от различных наборов значений деформирующих операторов. Фиксированные равные значения на всей решетке приводят к подалгебрам, связанным со стандартными квантовыми интегрируемыми моделями, а соответствующие операторы Лакса порождают и классифицируют их единообразным способом. Переменные значения деформирующих операторов приводят к новой серии квантовых интегрируемых неоднородных моделей. Фиксированные, но различные значения в узлах решетки могут дать новый тип интегрируемых гибридных моделей, включающий интегрируемые модели взаимодействия излучения с веществом, квантово-полевые модели с дефектами, в частности, новую квантовую интегрируемую модель синус-Гордон с дефектом.

Ключевые слова: операторно-деформированная квантовая алгебра, объединяющая схема для квантовых интегрируемых систем, неоднородные модели, модели взаимодействия излучения с веществом, модель синус-Гордон с дефектом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовые интегрируемые системы (КИС) представляют собой нелинейные, непертурбативные квантовые системы многих тел с взаимодействием или полевые модели с большим числом симметрий с набором взаимно коммутирующих сохраняющихся операторов $\{C_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Такие модели обычно допускают точное решение задачи на собственные значения с помощью алгебраического анзаца Бете для всех сохраняющихся операторов, включая гамильтониан системы.

*Saha Institute of Nuclear Physics, Theory Group & Centre for Applied Mathematics and Computer Science, 1/AF Bidhan Nagar, Calcutta 700 064, India.
E-mail: anjan.kundu@saha.ac.in

Каждая решеточная КИС представлена своим собственным оператором Лакса $L_j(\lambda)$ в каждом узле решетки, $j = 1, 2, \dots, N$; для интегрируемости он должен удовлетворять квантовому уравнению Янга–Бакстера (КУЯБ)

$$R(\lambda - \mu)L_j(\lambda) \otimes L_j(\mu) = (L_j(\mu) \otimes I)(L_j(\lambda) \otimes I)R(\lambda - \mu), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

а также условию ультра-локальности $L_j(\lambda) \otimes L_k(\mu) = (L_k(\mu) \otimes I)(L_j(\lambda) \otimes I)$ при $k \neq j$. Эти два соотношения, взятые вместе, приводят к нескольким важным следствиям.

Во-первых, они дают достаточное условие квантовой интегрируемости. Используя определенную на решетке матрицу монодромии $T(\lambda) = \prod_j L_j(\lambda)$, можно показать, что то же КУЯБ выполнено и для этого глобального объекта:

$$R(\lambda - \mu)T(\lambda) \otimes T(\mu) = (T(\mu) \otimes I)(T(\lambda) \otimes I)R(\lambda - \mu). \quad (1.2)$$

Если взять след обеих частей, то мы получим тождество $[\tau(\lambda), \tau(\mu)] = 0$, где $\tau(\lambda) = \text{Tr}(T(\lambda))$, приводящее к ключевому условию интегрируемости $[C_n, C_m] = 0$, где $\tau(\lambda) = \sum_n C_n \lambda^n$.

Во-вторых, КУЯБ (1.2) играет важную роль при получении точного решения с помощью алгебраического анзаца Бете, давая коммутационные соотношения между диагональными и внедиагональными элементами $T(\lambda)$ -матрицы (генераторами сохраняющихся операторов и операторами рождения/уничтожения, соответственно).

Наконец, КУЯБ (1.1) задает коммутационные соотношения (алгебру Янга–Бакстера (ЯБ)) между операторными элементами квантового оператора Лакса, определяемого квантовой R -матрицей – c -числовой матрицей, задающей структурные константы алгебры. Примечательным образом, тот факт, что то же самое КУЯБ выполнено и на глобальном уровне (1.2), означает, что эта алгебра ЯБ должна быть алгеброй Хопфа A с определяющими ее *копроизведением* $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$, *произведением* $m: A \otimes A \rightarrow A$, *единицей* $e: k \rightarrow A$, *коединицей* $\epsilon: A \rightarrow k$ и *антиподом* $S: A \rightarrow A$.

Для некоторых интегрируемых систем при отсутствии последнего свойства алгебра становится просто биалгеброй (алгеброй+коалгеброй). Соответствующая алгебра ЯБ порождает классификацию квантовых интегрируемых моделей по трем основным классам: *рациональные*, *тригонометрические* и *эллиптические* модели, определяющиеся соответствующими решениями для квантовой R -матрицы. Ниже мы сконцентрируемся на первых двух классах.

2. ИЗВЕСТНАЯ АЛГЕБРА ЯНГА–БАКСТЕРА

Простейшая алгебра ЯБ задается стандартной алгеброй Ли $sl(2)$: $[s^+, s^-] = 2s^3$, $[s^3, s^\pm] = \pm s^\pm$. Это кокоммутативная алгебра Хопфа, порожденная квантовой R -матрицей, элементы которой суть

$$R_{11}^{11} = R_{22}^{22} = a(\lambda), \quad R_{12}^{12} = R_{21}^{21} = b(\lambda), \quad R_{21}^{12} = R_{12}^{21} = c, \quad (2.1)$$

с решением R^{rat} в рациональных функциях спектрального параметра: $a(\lambda) = \lambda + \alpha$, $b(\lambda) = \lambda$, $c = \alpha$. Эта алгебра связана с такими хорошо известными квантовыми интегрируемыми моделями [1], как нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) и решеточное НУШ, ХХХ-цепочка со спином $1/2$, рациональная модель Годена.

Более общая (и более интересная) алгебра ЯБ связана с тригонометрической R^{trig} -матрицей при $a(\lambda) = \sin(\lambda + \alpha)$, $b(\lambda) = \sin \lambda$, $c = \sin \alpha$ в (2.1). Эта алгебра представляет собой знаменитую квантовую алгебру $sl_q(2)$: $[s_q^+, s_q^-] = \sin(\alpha 2s^3)/\sin \alpha$, $[s^3, s_q^\pm] = \pm s_q^\pm$, где $q = e^{i\alpha}$ – параметр деформации. Конструкция Фаддеева–Решетихина–Тахтаджяна (ФРТ) [2], [3] предоставляет элегантный способ получить эту квантовую алгебру вместе с ее свойствами как некокоммутативной алгебры Хопфа, а также соответствующий (2×2) -оператор Лакса в явном виде. В работе [3] было показано, что алгебра $sl_q(2)$ лежит в основе алгебр ЯБ таких хорошо известных квантовых интегрируемых систем, как модель синус-Гордон (СГ) и решеточная модель СГ, а также спиновая ХХЗ-цепочка.

С другой стороны, можно заметить, что имеется ряд важных квантовых интегрируемых моделей различной природы с совершенно различными операторами Лакса, однако эти модели связаны с одной и той же квантовой матрицей R^{trig} или R^{rat} . Несколько таких примеров доставляются квантовой цепочкой Тоды, принадлежащей к рациональному классу, и релятивистской цепочкой Тоды, моделями Лиувилля, НУШ с производными (ДНУШ) и т.д., принадлежащими к тригонометрическому классу. Поэтому несмотря на значительные достижения, связанные с квантовой алгеброй $sl_q(2)$, уместно задать следующие вопросы.

1. Исчерпывает ли алгебра $sl_q(2)$ все возможные алгебры ЯБ, связанные с тригонометрической R -матрицей?
2. Какие алгебры ЯБ лежат в основе других интегрируемых моделей?
3. Можно ли их получить из $sl_q(2)$ или $sl(2)$?
4. Нет ли более глубоких связей между различными интегрируемыми моделями, имеющими одну и ту же квантовую R -матрицу, несмотря на то, что их операторы Лакса совершенно различны?

При поиске ответов на эти фундаментальные вопросы мы высказываем гипотезу, что должны существовать более общая алгебра ЯБ и соответствующий квантовый оператор Лакса, связанные с одной и той же R^{trig} -матрицей (и предел алгебры при $q \rightarrow 1$, связанный с R^{rat} -матрицей), которые должны охватывать все квантовые интегрируемые модели с (2×2) -матрицами Лакса. Сюда как частные случаи должны включаться известные квантовые алгебры (и их пределы при $q \rightarrow 1$) и соответствующие им модели, но при этом должна присутствовать свобода, необходимая для генерации алгебр ЯБ, лежащих в основе всех других известных и новых квантовых интегрируемых моделей.

3. ОПЕРАТОРНО-ДЕФОРМИРОВАННАЯ КВАНТОВАЯ АЛГЕБРА

В подтверждение нашей гипотезы мы обнаружили концептуально новую алгебру ЯБ, деформированную не только обычным параметром q , но и некоторыми операторами. Наша идея состоит в том, чтобы близко следовать конструкции ФРТ для

$sl_q(2)$ и соответствующего оператора Лакса [2], но дополнительно деформировать соответствующую подалгебру Бореля с помощью операторов $\hat{c}_a^\pm$, $a = 1, 2$, что дает новый оператор Лакса

$$L_{\text{anc}}^{\text{trig}}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi \hat{c}_1^+ e^{i\alpha S^3} + \xi^{-1} \hat{c}_1^- e^{-i\alpha S^3} & 2 \sin \alpha S^- \\ 2 \sin \alpha S^+ & \xi \hat{c}_2^+ e^{-i\alpha S^3} + \xi^{-1} \hat{c}_2^- e^{i\alpha S^3} \end{pmatrix}, \quad \xi = e^{i\lambda}, \quad (3.1)$$

в то время как $R^{\text{trig}}(\lambda)$ -матрица остается той же самой. Подставляя (3.1) в КУЯБ (1.1), получаем новую операторно-деформированную квантовую алгебру, называемую алгеброй-прародителем (*ancestor algebra*) [4] и определяемую посредством соотношений

$$\begin{aligned} [s_q^+, s_q^-] &= \frac{\widehat{M}^+ \sin(2\alpha s^3) - i \widehat{M}^- \cos(2\alpha s^3)}{\sin \alpha}, \\ [s^3, s_q^\pm] &= \pm s_q^\pm, \quad [\widehat{M}^\pm, \cdot] = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где деформирующие операторы $\widehat{M}^\pm = (\hat{c}_1^+ \hat{c}_2^- \pm \hat{c}_1^- \hat{c}_2^+)/2$ и все операторы $\hat{c}_a^\pm$, $a = 1, 2$, взаимно коммутируют и являются центральными (коммутируют со всеми остальными генераторами алгебры (3.2)). Мы полагаем, что (3.1) – это наиболее общий вид оператора Лакса, который может породить (2×2) -операторы Лакса всех интегрируемых систем, принадлежащих этому классу, а операторно-деформированная квантовая алгебра (3.2) является наиболее общей алгеброй ЯБ, допускающей простейшую R^{trig} -матрицу. Эта алгебра-прародитель демонстрирует следующие уникальные и определяющие свойства.

1. Операторно-деформированная квантовая алгебра (3.2) является биалгеброй со следующими свойствами алгебры Хопфа.

Копроизведение Δ :

$$\Delta(s_q^+) = s_q^+ \otimes \hat{c}_1^- q^{-s^3} + \hat{c}_2^- q^{s^3} \otimes s_q^+, \quad \Delta(s_q^-) = s_q^- \otimes \hat{c}_2^+ q^{-s^3} + \hat{c}_1^+ q^{s^3} \otimes s_q^-, \quad (3.3)$$

$$\Delta(s^3) = I \otimes s^3 + s^3 \otimes I, \quad \Delta(\hat{c}_a^\pm) = \hat{c}_a^\pm \otimes \hat{c}_a^\pm, \quad a = 1, 2. \quad (3.4)$$

Заметим, что в отличие от деформирующего параметра q , деформирующие операторы $\hat{c}_a^\pm$, а потому и $\widehat{M}^\pm$, имеют нетривиальное копроизведение.

Антипод S :

$$S(s_q^-) = -(\hat{c}_1^+)^{-1} e^{-i\alpha s^3} s_q^- e^{i\alpha s^3} (\hat{c}_2^+)^{-1}, \quad S(s_q^+) = -(\hat{c}_2^-)^{-1} e^{-i\alpha s^3} S^+ e^{i\alpha s^3} (\hat{c}_1^-)^{-1}, \quad (3.5)$$

$$S(\hat{c}_a^\pm) = (\hat{c}_a^\pm)^{-1}, \quad S(e^{\pm i\alpha s^3}) = e^{\mp i\alpha s^3}. \quad (3.6)$$

Если в КИС все $\hat{c}_a^\pm = 0$, то антипод исчезает, превращая алгебру Хопфа в биалгебру.

Коединица ϵ :

$$\epsilon(S^\pm) = 0, \quad \epsilon(e^{\pm i\alpha s^3}) = 1, \quad \epsilon(\hat{c}_i^\pm) = c_i^\pm. \quad (3.7)$$

Для задания произведения m можно взять формальное определение умножения в алгебре, тогда как единицу η можно определить через унитарный элемент 1 как $\eta(\xi) \rightarrow \xi 1$.

2. Заметим, что алгебра (3.2) как обычная квантовая алгебра деформирована параметром q , но, кроме того, она деформирована и центральными операторами $\widehat{M}^\pm$, что подталкивает нас к определению этой деформированной алгебры как новой *операторно-деформированной* квантовой алгебры. Будучи центральными, деформирующие операторы действуют просто как мультипликативные параметры, которые, однако, могут принимать положительные, отрицательные или нулевые значения, приводя тем самым к различным возможным подалгебрам, как это описано ниже. Следует заметить, что для квадратичной алгебры (3.2) такие более сложные конструкции, как квантовый дубль, универсальная R -матрица или даже конечномерные представления, могут оказаться проблематичными, что представляет интересную задачу для будущих исследований. Но это не должно быть проблемой в случае применения указанной алгебры в качестве алгебры ЯБ для генерации и классификации КИС, что и является основной целью данного исследования. В случае общего положения эта алгебра допускает бесконечномерное представление, которое можно задать с помощью канонических операторов $([u, p] = i)$ как

$$s^3 = u, \quad s_q^+ = e^{-ip} g(u), \quad s_q^- = g(u) e^{ip}, \quad (3.8)$$

где

$$g^2(u) = \frac{\kappa + \sin \alpha (s - u) (M^+ \sin \alpha (u + s + 1) - i M^- \cos \alpha (u + s + 1))}{2 \sin^2 \alpha}, \quad (3.9)$$

причем κ и спиновая переменная s – произвольные константы. Мы опускаем шляпку в обозначениях для деформирующих центральных операторов $\widehat{M}^\pm$, которые действуют только мультипликативно и могут также иметь нулевые значения.

Интегрируемая модель-прародитель, получаемая путем использования (3.8), (3.9) в операторе Лакса (3.1), представляет собой обобщенную решеточную модель синус-Гордон (модель РСГ). Она редуцируется к известной модели РСГ из работы [5] при отсутствии деформирующих операторов (т.е. при $\widehat{M}^+ = 1$, $\widehat{M}^- = 0$), когда из (3.2) воспроизводится хорошо известная алгебра $sl_q(2)$, а из (3.1) – известный оператор Лакса из работы [2]. Вообще, алгебра (3.2) может привести к *девяти* основным подалгебрам при значениях $M^+ > 0$, $M^+ < 0$, $M^+ = 0$ (с точностью до перемасштабирования) в каждом из секторов $M^- = 0$, $M^- > 0$, $M^- < 0$. Среди этих подалгебр в случае $M^+ > 0$, $M^- = 0$ получаем хорошо известную алгебру $sl_q(2)$, а для $M^+ < 0$, $M^- = 0$ – соответствующий некомпактный вариант. Остальные случаи дают многообразие подалгебр, описывающих алгебры ЯБ, на которых основаны важные квантовые интегрируемые системы, в том числе несколько новых систем.

3.1. Операторно-деформированная алгебра в пределе $q \rightarrow 1$. Рассмотрим теперь предел операторно-деформированной алгебры при $q \rightarrow 1$, когда соответствующие структуры редуцируются к своим рациональным пределам: квантовая R^{trig} -матрица переходит в рациональную R^{rat} -матрицу. Для операторов имеем $s_q^b \rightarrow s^b$, $b = 1, 2, 3$, $\hat{c}_a^\pm \rightarrow \hat{c}_a^{0,1}$, $a = 1, 2$ (поскольку они также q -деформированы!), а спектральный параметр $\xi \rightarrow \lambda$, тогда как лаксовый оператор-прародитель (3.1) редуцируется

к своему рациональному виду

$$L_{\text{anc}}^{\text{rat}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{c}_1^0(\lambda + s^3) + \hat{c}_1^1 & s^- \\ s^+ & \hat{c}_2^0(\lambda - s^3) - \hat{c}_2^1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Наконец, алгебра (3.2) с деформирующими операторами $\widehat{M}^\pm \rightarrow \widehat{m}^\pm$ редуцируется к другой новой операторно-деформированной (хотя и с $q \rightarrow 1$) биалгебре

$$[s^+, s^-] = 2\widehat{m}^+ s^3 + \widehat{m}^-, \quad [s^3, s^\pm] = \pm s^\pm, \quad [\widehat{m}^\pm, \cdot] = 0 \quad (3.11)$$

с центральными операторами $\widehat{m}^+ = \hat{c}_1^0 \hat{c}_2^0$, $\widehat{m}^- = \hat{c}_1^1 \hat{c}_2^0 + \hat{c}_1^0 \hat{c}_2^1$. Интересно, что она по-прежнему обладает некокоммутативным копроизведением, заданным формулами $\Delta(s^+) = \hat{c}_1^0 \otimes s^+ + s^+ \otimes \hat{c}_2^0$, $\Delta(s^-) = \hat{c}_2^0 \otimes s^- + s^- \otimes \hat{c}_1^0$ и т.д. Заметим, что для нетривиального $\widehat{m}^-$ – это новая операторно-деформированная алгебра Хопфа с *девятью* различными подалгебрами при $m^+ > 0$, $m^+ < 0$, $m^+ = 0$ для каждой из комбинаций, составленных из $m^- = 0$, $m^- > 0$, $m^- < 0$. В случае $m^+ > 0$, $m^- = 0$ получаем стандартную алгебру Ли $sl(2)$, а в случае $m^+ < 0$, $m^- = 0$ – ее некомпактный вариант $sl(1, 1)$. Остальные случаи дают свободу, необходимую для описания других интегрируемых моделей.

3.2. Применение к квантовым интегрируемым системам. Поскольку деформирующие операторы входят только в лаксовый оператор-прародитель (3.1), но не в соответствующую R^{trig} -матрицу, можно построить операторы Лакса всех интегрируемых систем, принадлежащих одному и тому же тригонометрическому классу, вместе с их алгебрами ЯБ, подходящим образом выбирая деформирующие операторы. Аналогично в пределе $q \rightarrow 1$ получаем результат для моделей, принадлежащих к рациональному классу, причем все они имеют общую R^{rat} -матрицу. Мы укажем три типа интегрируемых моделей, которые можно построить по нашей схеме в зависимости от разных областей значений деформирующих операторов.

1. При фиксированных значениях деформирующих операторов на всей решетке из алгебры (3.2) получаем ее различные подалгебры, интересным образом представляющие алгебры ЯБ, на которых основаны исходные интегрируемые модели. В то же время $L_{\text{anc}}^{\text{trig}}(\xi)$ -оператор-прародитель (3.1) и его рациональный предел $L_{\text{anc}}^{\text{rat}}$ (3.10) единообразным способом порождают репрезентативные операторы Лакса как хорошо известных, так и новых квантовых интегрируемых моделей.

Так, $R(XXZ): L_{\text{anc}}^{\text{trig}} \Rightarrow$ а) XXZ -спиновая цепочка, б) модель СГ (решеточная + полевая), в) модель ДНУШ (решеточная + полевая), г) q -бозон, д) релятивистская цепочка Тоды, е) модель Лиувилля (решеточная + полевая), ж) массивная модель Тирринга (бозонная).

При $q \rightarrow 1$ (рациональный предел) имеем $R(XXX): L_{\text{anc}}^{\text{rat}} \Rightarrow$ а) XXX -спиновая цепочка, б) модель НУШ (решеточная + полевая), в) простая решеточная модель НУШ, г) цепочка Тоды.

Эта систематическая генерация квантовых интегрируемых моделей из одной модели-прародителя также дает ответ на поставленные выше захватывающие вопросы. Наши результаты ясно показывают, что все эти интегрируемые модели имеют глубокие связи друг с другом, поскольку являются потомками одного и того же

прародителя, а потому обладают общей для всех R -матрицей. Более того, лежащие в их основе алгебры ЯБ получаются как различные подалгебры в одной и той же алгебре-прародителе.

2. С другой стороны, для переменных значений деформирующих операторов на решетке мы получаем ряд новых квантовых интегрируемых неоднородных моделей.

3. Выбирая различные, но фиксированные значения деформирующих операторов в различных секторах решетки, можно скомбинировать различные взаимодействующие интегрируемые модели, что приведет к новому классу интегрируемых гибридных моделей.

Ниже мы обсуждаем алгебры ЯБ как подалгебры нашей алгебры-прародителя и их основные применения в квантовых интегрируемых системах.

4. ГЕНЕРАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ И ЛЕЖАЩИХ В ИХ ОСНОВЕ АЛГЕБР ЯБ

Исходя из лаксовых операторов-прародителей (3.1) и (3.10) и соответствующих операторно-деформированных алгебр (3.2) и (3.11), мы единообразным способом генерируем как известные, так и новые квантовые интегрируемые модели вместе с лежащими в их основе алгебрами ЯБ.

4.1. q -Деформированная алгебра и соответствующие интегрируемые модели. Сначала сосредоточимся на моделях, принадлежащих тригонометрическому классу с матрицей R^{trig} .

1. В q -деформированном, но операторно-недеформированном пределе имеем $c_1^+ = c_2^+ = c_1^- = c_2^- = 1$, что дает $M^+ = 1$ и $M^- = 0$. Наша общая алгебра (3.2) редуцируется к известной квантовой алгебре $sl_q(2)$, а лаксовый оператор-прародитель (3.1) – к известному $L(\lambda)$ -оператору из работы [2]. Тем самым, представление со спином $1/2$ порождает спиновую XXZ -цепочку [3], а реализация (3.9) воспроизводит $g(u) = [1 + \cos \alpha(2u + 1)]^{1/2}/2 \sin \alpha$, что связано с известной решеточной моделью СГ [5].

2. В случае $M^+ = -1$ и $M^- = 0$ алгебра (3.2) редуцируется к соответствующей некомпактной квантовой алгебре $sl_q(1, 1)$ и воспроизводит связанные с ней интегрируемые модели, например, q -деформированную модель Бака–Сукумара (БС).

3. Взяв деформирующие операторы в виде $\hat{c}_1^\mp = (\hat{c}_2^\mp)^{-1} = p^{\hat{c}}$, получаем параметрически (p, q) -деформированную алгебру Хопфа $gl_{p,q}(2)$, которая представлена той же алгеброй $sl_q(2)$, но $p^{\hat{c}}$ -деформирована как коалгебра. Эта алгебра ЯБ связана с квантовой интегрируемой моделью Абловица–Ладика¹⁾.

4. Выбрав значения операторов как $M^+ = \sin \alpha$, $M^- = i \cos \alpha$, что согласуется с видом деформирующих операторов $c_1^+ = c_2^+ = 1$, $c_1^- = -iq$, $c_2^- = i/q$, получаем

¹⁾Стоит заметить, что имеется убеждение, что эту алгебру можно получить только путем преобразования *твиста* с внешним параметром $p = e^{i\theta}$ [6]. При таком преобразовании R -матрица деформируется в твистованную $R^{\text{trig}}(\lambda, \theta)$ -матрицу. Однако вопреки этому убеждению мы получаем ту же самую биалгебру без изменения $R^{\text{trig}}(\lambda)$ -матрицы, потому что в нашем случае, как отмечалось выше, роль твистующего параметра играют деформирующие операторы.

q -бозонную алгебру

$$[\psi_q, N] = \psi_q, \quad [\psi_q^\dagger, N] = -\psi_q^\dagger, \quad [\psi_q, \psi_q^\dagger] = \cos(\alpha(2N+1)), \quad (4.1)$$

предположив, что $s_q^+ = \psi_q$, $s_q^- = \psi_q^\dagger$ и $s^3 = N$. Это открывает интересную возможность построения квантовых интегрируемых моделей с q -бозонами [7]. В этом случае (3.9) упрощается до $g^2(u) = [-2u]_q$.

Отметим, что q -бозон можно отобразить на стандартный решеточный бозон ψ с коммутационными соотношениями $[\psi, \psi^\dagger] = \hbar/\Delta$ посредством

$$\psi_q = \psi \left(\frac{[2N]_q}{2N \cos \alpha} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad N = \psi^\dagger \psi.$$

Это позволяет построить из приведенной выше q -бозонной модели точный решеточный вариант *квантовой интегрируемой модели ДНУШ* (с оператором Лакса, полученным непосредственно из (3.1)), которая в континуальном пределе $\Delta \rightarrow 0$ приводит к квантовой модели ДНУШ [8], представленной уравнением $i\psi_t = \psi_{xx} - i(\psi^\dagger \psi)\psi_x$. В N -частичном секторе эта модель квантовой теории поля эквивалентна взаимодействующему бозе-газу с потенциалом в виде *производной* δ -функции [9].

5. При выборе $M^+ = M^- = 1$ получаем новую *экспоненциально* деформированную алгебру

$$[s_q^+, s_q^-] = \frac{e^{2i\alpha s^3}}{2i \sin \alpha}, \quad (4.2)$$

которая оказывается алгеброй ЯБ, лежащей в основе квантовой интегрируемой точной решеточной *модели Лиувилля*. Оператор Лакса этой модели получается из (3.1), когда (3.9) сводится к $g^2(u) = (1 + e^{i\alpha(2u+1)})/(2 \sin \alpha)$. В континуальном пределе получается квантово-полевая модель Лиувилля, задаваемая уравнением $u_{tt} - u_{xx} = e^{i\alpha u}$.

Важно отметить, что выбранные значения $M^\pm$ остаются теми же даже при $c_1^- \neq 0$, что дает те же алгебру и реализацию, но другой оператор Лакса. В этом состоит действительно захватывающая возможность систематического построения различных полезных операторов Лакса для одной и той же модели. Например, *второй* лиувиллевский оператор Лакса, который нам так легко построить, воспроизводит соответствующий оператор, полученный Фаддеевым с использованием ряда новаторских приемов [10].

6. Подобным образом частный случай $M^\pm = 0$ достигается при различных выборах:

- а) $c_a^- = 0$, $c_a^+ = 1$, $a = 1, 2$,
- б) $c_2^\pm = 0$, $c_1^- = -c_1^+ = 1$,
- в) $c_1^+ = 1$, остальные $c = 0$;

все они приводят к одной и той же алгебре

$$[s_q^+, s_q^-] = 0, \quad [s^3, s_q^\pm] = \pm s_q^\pm, \quad (4.3)$$

однако могут порождать из оператора (3.1) различные операторы Лакса и даже операторы, соответствующие различным моделям, хотя и основанным на одной и той

же алгебре. В частности, случай “а” приводит к модели $СГ$ на световом конусе, а случаи “б” и “в” дают два различных оператора Лакса, найденные в работах [11], [12] для релятивистской цепочки Тоды. Поскольку у нас получается, что $g(u) = \text{const}$, замена $u \rightarrow -ip$, $p \rightarrow -iu$ в (3.9) дает просто $s^3 = -ip$, $s_q^\pm = \alpha e^{\mp u}$, и это порождает квантовую интегрируемую цепочку Тоды с дискретным временем или релятивистскую квантовую цепочку Тоды [11].

Замечательно, что все приведенные выше алгебры получаются из нашей алгебры-прародителя как подалгебры, но не могут быть получены из $sl_q(2)$ без привлечения сингулярных пределов. Заметим также, что все модели-потомки, выписанные выше, имеют одну и ту же тригонометрическую R^{trig} -матрицу, наследуемую из модели-прародителя, и, как мы увидим ниже, это же верно для рационального класса. Это снимает покров тайны с вопроса о том, почему оказывается, что широкий диапазон моделей имеет одну и ту же R -матрицу, тогда как их L -операторы получаются из одного и того же лаксова оператора-прародителя (3.1), а соответствующие алгебры ЯБ – из одной и той же алгебры-прародителя (3.2) при различных редукциях.

4.2. q -Недеформированная алгебра и соответствующие интегрируемые модели. Теперь сосредоточимся на пределе при $q \rightarrow 1$ алгебры (3.2), которая по-прежнему операторно-деформирована посредством $\hat{m}^\pm$. Оказывается, что бозонное представление (3.9) в этом пределе редуцируется к обобщенному преобразованию Холстейна–Примакова:

$$\begin{aligned} s^3 &= s - N, & s^+ &= g_0(N)\psi, & s^- &= \psi^\dagger g_0(N), \\ g_0^2(N) &= \hat{m}^- + \hat{m}^+(2s - N), & N &= \psi^\dagger \psi, \end{aligned} \quad (4.4)$$

с центральными деформирующими операторами, действующими мультипликативно. Это является точной реализацией алгебры (3.11), связанной с оператором Лакса (3.10). Данная рациональная модель-прародитель, представляющая квантовую интегрируемую обобщенную решеточную модель НУШ, может систематическим образом порождать все другие интегрируемые модели рационального класса при различных выборах значений деформирующих операторов. При этом одновременно строятся операторы Лакса этих моделей как редукции оператора (3.10) и соответствующие алгебры ЯБ как подалгебры алгебры (3.11).

1. Если деформирующие операторы обращаются в нуль при $m^+ = 1$, $m^- = 0$, уравнение (3.11), очевидно, дает стандартную алгебру $su(2)$, причем для представления со спином $1/2$ воспроизводится XXX -спиновая цепочка [3].

2. Бозонная реализация той же алгебры упрощает (4.4) до стандартного преобразования Холстейна–Примакова с оператором (3.10), воспроизводя хорошо известную решеточную модель НУШ [5].

3. С другой стороны, при $m^+ = -1$, $m^- = 0$ уравнение (3.11) редуцируется к алгебре $su(1,1)$ и дает соответствующие интегрируемые модели, одна из которых является интегрируемой моделью БС-типа, построенной в разделе 7.

4. При комплементарном выборе $m^+ = 0$, $m^- = 1$ (3.11) редуцируется к неполупростой алгебре

$$[s^\pm, s^3] = \mp s^\pm, \quad [s^+, s^-] = 1, \quad (4.5)$$

а (4.4) при $g_0(N) = 1$ дает бозонную реализацию $s^+ = \psi$, $s^- = \psi^\dagger$, $s^3 = s - N$. Используя редукцию (3.10), мы получаем квантовую интегрируемую *простую решеточную модель НУШ* [13].

5. Тривиальный выбор $m^\pm = 0$ редуцирует (3.11) к той же алгебре (4.3),

$$[s^+, s^-] = 0, \quad [s^3, s^\pm] = \pm s^\pm \quad (4.6)$$

и поэтому можно взять ту же реализацию $s^3 = -ip$, $s^\pm = \alpha e^{\mp u}$, что была найдена для релятивистского случая, но только с лаксовым оператором-прародителем (3.10) и R^{rat} -матрицей. Это дает квантовую интегрируемую *нерелятивистскую цепочку Тоды* [1].

Таким образом, мы показали, как модель-прародитель (3.10) с представлением (4.4) может единообразным способом порождать квантовые интегрируемые модели, которые все имеют одну и ту же рациональную R -матрицу, причем соответствующие алгебры ЯБ $sl(2)$, (4.5), (4.6) получаются как подалгебры из операторно-деформированной алгебры-прародителя (3.11).

Важно заметить, что такие операторы Лакса, как (3.1) и (3.10), появлялись в бозонной реализации в более ранних работах [14], причем было показано, что они имеют наиболее общий возможный вид в соответствующем классе.

Помимо полученных выше дискретных моделей, интегрируемые модели квантовой теории поля можно построить из их точных решеточных версий в континуальном пределе. Для такой конструкции следует подвергнуть операторы масштабному преобразованию вида Δp_j , $\Delta c_a^\pm$ и $\Delta^{1/2}\psi_j$, где Δ – шаг решетки, что в континуальном пределе $\Delta \rightarrow 0$ дает $p_j \rightarrow p(x)$, $\psi_j \rightarrow \psi(x)$ и т.д. При этом оператор Лакса $\mathcal{L}(x, \lambda)$ для континуальной модели получается из своего дискретного аналога в соответствии с $L_j(\lambda) \rightarrow I + \Delta \mathcal{L}(x)$. Но соответствующая R -матрица остается той же, поскольку она не содержит Δ . Таким образом, такие *интегрируемые квантовые полевые модели*, как модели СГ, Лиувилля, НУШ или ДНУШ можно получать из их дискретных вариантов, построенных выше.

5. КВАНТОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ МОДЕЛИ

Несмотря на интенсивное изучение интегрируемых неоднородных классических моделей, нам представляется, что их квантовые версии остались неизученными, кроме, быть может, исследований в работе [15]. Новый класс квантовых интегрируемых моделей можно построить как неоднородные версии исходных перечисленных выше интегрируемых моделей. Идея построения состоит в том, чтобы взять значения деформирующих операторов зависящими от узла решетки и заменить $\widehat{M}^\pm$ в $g(u)$ (см. (3.9)) на зависящие от узла операторы $\widehat{M}_j^\pm$. При этом все $\hat{c}$ в операторе Лакса (3.1) становятся зависящими от узла решетки операторами $\hat{c}_j$.

Однако алгебра ЯБ в неоднородных решеточных моделях остается такой же, как и в исходных моделях с той же квантовой R -матрицей. Физически неоднородности могут интерпретироваться как примеси, переменные внешние поля, несоизмеримость и т.д. Приведем несколько примеров таких моделей.

1. *Неоднородная модель СГ.* Взяв различные значения деформирующих операторов в различных узлах решетки, $c_1^\pm = \Delta m_j e^{i\alpha\theta_j}$, $c_2^\pm = \Delta m_j e^{-i\alpha\theta_j}$, что дает $M_j^+ = (\Delta m_j)^2$, $M_j^- = 0$, мы можем построить новую *дискретную модель СГ с переменной массой*, не нарушив условия интегрируемости. В полевом пределе $\Delta \rightarrow 0$ это приводит к квантовой интегрируемой *неоднородной* модели СГ с переменной массой $m(x)$ во внешнем калибровочном поле $\theta(x)$.

2. *Неоднородная решеточная модель НУШ.* Рассмотрим зависящие от узла решетки (а в общем случае также и от времени) деформирующие операторы (3.10) и (4.4) в виде

$$c_1^0 = c_2^0 \equiv g_j(t), \quad c_1^1 = -c_2^1 = f_j(t), \quad \text{что дает } m^+ = g_j^2, \quad m^- = 0, \quad (5.1)$$

где f_j , g_j – зависящие от времени произвольные дискретные функции. Это приводит к $g_0^2(N) = g_j^2(2s_j - N_j\Delta)$ из (4.4), в силу чего (3.10) редуцируется к L -оператору квантовой интегрируемой неоднородной точной решеточной модели НУШ. В континуальном пределе и в пределе большого спина $s_j \rightarrow g_j^{-1}/\Delta$ получаем квантовую интегрируемую неоднородную полевую модель НУШ с двумя произвольными функциями $f(x, t)$, $g(x, t)$ [15]. Заметим, что в отличие от стандартных неоднородных классических моделей наша конструкция является изоспектральной, поскольку неоднородность входит в нее только через деформирующие операторы в операторе Лакса, не затрагивая спектральный параметр, а тем самым и R -матрицу.

3. *Квантовая интегрируемая неоднородная цепочка Тоды.* Выбирая неоднородность в виде c_{1j}^1 , c_{1j}^0 при $c_2^1 = c_2^0 = 0$, получаем $m^\pm = 0$. Тогда из (3.10) имеем квантовую интегрируемую неоднородную цепочку Тоды с гамильтонианом

$$H = \sum_j \left(p_j + \frac{c_j^1}{c_j^0} \right)^2 + \frac{1}{c_j^0 c_{j+1}^0} e^{u_j - u_{j+1}}. \quad (5.2)$$

Подобным образом можно построить неоднородные версии модели Лиувилля, релятивистской цепочки Тоды, модели Абловица–Лади́ка, и т.д.

6. КВАНТОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГИБРИДНЫЕ МОДЕЛИ

Новый класс интегрируемых моделей можно построить, комбинируя различные взаимодействующие между собой интегрируемые модели, при этом интегрируемость гибридной модели сохраняется. Идея построения состоит в том, чтобы взять операторы Лакса $L_j^{(a)}$ различных моделей-потомков, $a = 1, 2, 3, \dots$, с одной и той же R -матрицей (согласно приведенному выше списку) и поместить их в *различные узлы* j с помощью конструкции $T(\lambda) = L_1^{(a)} L_2^{(b)} \dots L_N^{(c)}$, которая удовлетворяет КУЯБ и потому представляет некоторую квантовую интегрируемую модель. Приведем несколько интересных примеров.

1. *Массивная модель Тирринга.* Ярким примером является новая бозонная версия квантовой интегрируемой массивной модели Тирринга [8], [4]. Ее можно построить как гибрид двух интегрируемых моделей ДНУШ, сливая вместе два ДНУШ-оператора Лакса, $L_{D1}(\xi, \psi_1) \otimes L_{D2}^{-1}(1/\xi, \psi_2)$, что дает оператор Лакса массивной модели Тирринга с двумя бозонными полями (ψ_1, ψ_2) .

2. *Интегрируемые модели взаимодействия излучения с веществом.* Следуя предложенным выше идеям, можно построить ряд важных моделей взаимодействия излучения с веществом и их q -деформации как квантовые интегрируемые гибридные модели [16]. Более подробно это рассмотрено в следующем разделе.

3. *Экзотические гибридные модели.* В принципе, можно построить гибридные интегрируемые решеточные модели, комбинируя операторы Лакса любых решеточных моделей, принадлежащих к одному и тому же классу. Например, таким способом можно получить гибриды цепочки Тоды и дискретной модели НУШ, релятивистской цепочки Тоды и модели Абловица–Ладика, решеточной модели СГ и модели Лиувилля.

4. *Интегрируемые квантовые полевые модели с дефектом.* Большой интерес представляет распространение концепции гибридных моделей на квантовые полевые модели. Одно из направлений в рамках этой программы состоит в построении интегрируемых квантовых полевых моделей с дефектом, например, моделей НУШ, СГ или квантово-полевой модели Лиувилля с дефектом.

В работе [17] похожая идея применялась для построения уравнения СГ при $x < 0$, $x > 0$ с дефектом в $x = 0$. Подход этой работы главным образом состоит в решении задачи рассеяния по аналогии с классическим случаем. Но особенно интересно построить и решить истинно квантовую интегрируемую полевую модель СГ с дефектом. Совсем недавно нам удалось осуществить такой прорыв путем построения квантовой интегрируемой точной решеточной версии модели СГ с дефектом, удовлетворяющей КУЯБ и допускающей точное решение с помощью алгебраического анзаца Бете [18]. Некоторые подробности приводятся в разделе 8.

7. КВАНТОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МНОГОАТОМНЫЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ И ИХ q -ДЕФОРМАЦИИ

Наш метод основан на построении матрицы монодромии системы путем взятия комбинации различных операторов Лакса: $T(\lambda) = L^s(\lambda) \prod_j^{N_a} L_j^S(\lambda)$, где $L^s(\lambda)$ связаны либо с рациональной (3.10), либо с тригонометрической (3.1) моделью-прародителем, а N_a -числа для $L_j^S(\lambda)$ – со спиновой или q -спиновой моделью. По построению, $T(\lambda)$ должна удовлетворять в первом и втором случаях соответственно уравнению ЯБ с $R^{\text{rat}}(\lambda)$ -матрицей и $R^{\text{trig}}(\lambda)$ -матрицей, представляющими квантовую интегрируемую систему в обоих случаях, причем $\tau(\lambda) = \text{tr} T(\lambda)$ порождает коммутирующий набор сохраняющихся операторов. В наших моделях взаимодействия излучения с веществом подсистема, описываемая с помощью $L^s(\lambda)$ в бозонной или q -бозонной реализации, соответствует одномодовому полю излучения, а $L_j^S(\lambda)$ (в спиновой или q -спиновой реализации) – атомам, т.е. относящейся к веществу части модели.

Таким образом, с помощью различных редукций общей модели взаимодействия излучения с веществом можно единообразным способом породить следующие интегрируемые многоатомные модели взаимодействия излучения с веществом [16].

1. *Интегрируемая многоатомная модель БС.* Эта модель имеет вид $H = H_d + H_{Ss} + H_{SS}$,

$$H_{BS} = \omega_f s^3 + \sum_j^{N_a} (\omega_{aj} S_j^z + \alpha(s^+ S_j^- + s^- S_j^+)) + \alpha \sum_{i < j}^{N_a} (S_i^- S_j^+ - S_i^+ S_j^-), \quad (7.1)$$

что в бозонной реализации алгебры $su(1, 1)$ вида $s^+ = \sqrt{N} b^\dagger$, $s^- = b \sqrt{N} s^3 = N + 1/2$ с оператором $\vec{S} = \frac{1}{2} \sum_k^{2s} \vec{\sigma}_k$ спина s представляет интегрируемую многоатомную модель БС с межатомными взаимодействиями и невырожденными атомными частотами. При $N_a = 1$ (7.1) воспроизводит известную модель БС [19].

2. *Интегрируемая многоатомная модель Джемса–Каммингса (ДжК).* В бозонной реализации $s^- = b$, $s^+ = b^\dagger$, $s^3 = b^\dagger b$ мы получаем аналогичную многоатомную модель типа модели ДжК. Известная модель ДжК [20] воспроизводится при $N_a = 1$, когда межатомные взаимодействия обращаются в нуль и все атомные частоты совпадают.

3. *Интегрируемая модель ионной ловушки (trapped-ion model).* В реализации $s^\pm = e^{\mp i x}$, $s^3 = p + x$ получаем новую квантовую интегрируемую модель ионной ловушки с экспоненциальной нелинейностью вида (при $N_a = 1$)

$$H_{TI} = (\omega_a - \omega_f) S^z + S^{z2} + \alpha(e^{-ix} S^+ + e^{ix} S^-) + H_{xp}, \quad H_{xp} = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + xp, \quad (7.2)$$

где $\vec{S} = \sum_k \vec{\sigma}_k / 2$.

7.1. Интегрируемые q -деформированные модели взаимодействия излучения с веществом. Стратегия остается прежней, только следует исходить из тригонометрического лаксова оператора-прародителя (3.1) и соответствующей R^{trig} -матрицы. Гамильтониан наших q -деформированных моделей взаимодействия излучения с веществом принимает вид (для $N_a = 1$)

$$H_{qMR} = H_d + (s_q^+ S_q^- + s_q^- S_q^+) \sin \alpha, \quad H_d = -i c_0 \cos(\alpha X) + c \sin(\alpha X), \quad (7.3)$$

где $X = (s_q^3 - S_q^z + \omega)$. Это дает новый класс интегрируемых моделей взаимодействия излучения с веществом, для которого $\mathbf{S}_q \in su_q(2)$, а $\mathbf{s}_q$ порождают (3.2). Ниже выписана новая серия q -деформированных интегрируемых моделей взаимодействия излучения с веществом, которые получаются из одного и того же гамильтониана (7.3) при различных реализациях $\mathbf{s}_q$.

1. *Интегрируемая q -деформированная модель БС.* Эту модель можно построить из (7.3) при $c_0 = 0$ путем q -бозонной реализации $\mathbf{s}_q$ в виде $s_q^+ = \sqrt{[N]_q} b_q^\dagger$, $s_q^- = b_q \sqrt{[N]_q}$, $s_q^3 = N + 1/2$ и реализации квантового оператора спина $\mathbf{S}_q$ с помощью копроизведения:

$$S_q^\pm = \sum_j^s q^{-\sum_{k < j} \sigma_k^z} \sigma_j^\pm q^{\sum_{l > j} \sigma_l^z}, \quad S^z = \sum_j^s \sigma_j^z.$$

Заметим, что при $s = 1$ получается интегрируемый вариант известной модели, приведенной в работе [22].

2. *Интегрируемая q -деформированная модель ДжК.* Эту модель можно построить аналогичным образом из той же общей модели (7.3), выбирая $c_0 = i$, $c = 1$ и q -бозонную реализацию $s_q^+ = b_q^\dagger$, $s_q^- = b_q$, $s^3 = N$.

3. *Интегрируемая q -деформированная модель ионной ловушки.* При редукции $c_0 = i$, $c = 0$ и при канонических операторах, реализованных как $s_q^\pm = e^{\mp ix}$, $s^3 = p$, из (7.3) можно снова построить q -деформированную модель ионной ловушки. С другой стороны, модель ионной ловушки, представленная в [21], может быть решена только с помощью ряда приближений и ограничивающих условий.

Взяв более высокие значения N_a , мы можем построить многоатомные интегрируемые варианты приведенных выше q -деформированных моделей взаимодействия излучения с веществом.

8. КВАНТОВАЯ ИНТЕГРИРУЕМАЯ ПОЛЕВАЯ МОДЕЛЬ СГ С ДЕФЕКТОМ

Как обсуждалось выше, на дискретном уровне легко построить гибридные модели, подставляя в различные узлы решетки операторы Лакса различных интегрируемых систем. Но при попытке взятия континуального предела с целью построения соответствующей полевой модели приведенная выше конструкция разрушается из-за отсутствия пересекающихся гладких областей. Поэтому требуется определенный механизм, подобный классической формулировке той же задачи [17].

Мы приведем здесь результаты определенного прорыва в решении этой задачи, а подробности будут даны отдельно [18]. Сначала построим нашу квантовую интегрируемую модель СГ с дефектом как точную решеточную версию с матрицей монодромии

$$T_{-N}^N(\xi) = (L_N^+(\xi, u_N^+) \dots L_1^+(\xi, u_1^+)) \times \\ \times F_0^d(\xi, u_0^+, u_0^-) (L_{-1}^-(\xi, u_{-1}^-) \dots L_{-N}^-(\xi, u_{-N}^-)), \quad (8.1)$$

где $L_j^\pm(\xi, u^\pm)$, $j = \pm 1, \dots, \pm N$, – квантовый оператор Лакса точной решеточной модели СГ [5] для полей $u^\pm$. В точке дефекта $j = 0$ определим пересекающийся квантовый оператор Лакса

$$F_0^d(\xi, u_0^+, u_0^-) = \begin{pmatrix} \xi e_-^{-1} (P^+)^{-1} & a e_+^{-1} P^- \\ -a e_+ (P^+)^{-1} & \xi e_- P^+ \end{pmatrix}, \quad (8.2)$$

где $e_\pm = e^{\pm i\alpha(u_0^- \pm u_0^+)/4}$, $P^\pm = e^{i(p_0^- \pm p_0^+)/2}$, причем $[u_k, p_j] = i\delta_{kj}$. Замечательным образом оператор (8.2) связан с лаксовым оператором-прародителем (3.1) редукцией $c_-^a = 0$, $a = 1, 2$, а потому должен удовлетворять КУЯБ (1.1) с R^{trig} -матрицей, как и в случае операторов Лакса $L_j^\pm$ модели СГ, входящих в (8.1). Это доказывает квантовую интегрируемость системы, причем $\tau(\xi) = \text{tr}(T_{-N}^N(\xi))$ порождает набор попарно коммутирующих сохраняющихся операторов.

Существенно, что эта дискретная интегрируемая система имеет гладкий континуальный предел $\Delta \rightarrow 0$, причем для полей имеем $u_j^\pm \rightarrow u^\pm(x)$, $p_j^\pm \rightarrow \Delta p^\pm(x)$, где $[u^\pm(x), p^\pm(y)] = i\delta(x - y)$, и $\sigma^1 L_j^+ \rightarrow (1 + \Delta U^+(x))$ и $\sigma^1 L^- \rightarrow (1 + \Delta U^-(x))$

при $x \in (0^+, +\infty)$ и $x \in (-\infty, 0^-)$, соответственно, а $U^\pm(x)$ дает оператор Лакса для полевой модели СГ с полями $u^\pm(t, x)$. В точке дефекта получаем переход $F_0^d \rightarrow (1 + \Delta \mathcal{L}(x))F_0$ при $x \in [0^-, 0^+]$, где $\mathcal{L}(x) = (F_{0,x} + F^p)(x)F_0^{-1}(x)$, при этом F^p получается из F^d заменой $P^\pm \rightarrow i(p^-(x) \pm p^+(x))/2$, а F_0 дает известный оператор Беклунда для модели СГ [23].

Исходя из операторов Лакса в различных областях, можно найти все сохраняющиеся величины, в том числе гамильтониан, импульс, и т.д., определенные на всей оси (включая точку дефекта), если применить стандартную технику уравнения Риккати. Также можно точно найти соответствующие собственные значения, применяя метод алгебраического анзаца Бете [24] к решеточно-регуляризованной модели (8.1), с которой мы начали.

9. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы представили метод унифицированного построения квантовых интегрируемых моделей из единой модели-прародителя на основе общей янг-бакстеровой алгебры Хопфа, представляющей новую операторно-деформированную квантовую алгебру. Хотя некоторые из результатов были опубликованы ранее, мы представили нашу схему полностью в систематическом изложении, уделив особое внимание новой концепции операторной деформации алгебры. Мы также привели некоторые новые результаты, касающиеся квантовой интегрируемой модели СГ с дефектом и других гибридных моделей, таких как интегрируемая q -деформация нескольких моделей взаимодействия излучения с веществом.

Подчеркнем, что все перечисленные здесь интегрируемые модели допускают точное решение в рамках анзаца Бете. Более того, по аналогии с их унифицированной конструкцией можно также получить их решение единым и почти не зависящим от модели способом. Для этого следует начать с общего решения модели-прародителя, вытекающего из алгебраического анзаца Бете, а затем получить результаты для всех моделей-потомков с одной и той же R -матрицей как различные редукции общего результата.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Предельный переход от тригонометрических к рациональным объектам

Редукция оператора Лакса (3.1) к (3.10). Запишем равенства

$$\xi = e^{i\alpha\lambda}, \quad \hat{c}_1^\pm = \pm \hat{c}_1^0 e^{\pm i\alpha\lambda c_1}, \quad \hat{c}_2^\pm = \pm \hat{c}_2^0 e^{\mp i\alpha\lambda c_2}. \quad (\text{П.1})$$

Подставляя эти выражения в (3.1) и разлагая при $q \rightarrow 1$ или $\alpha \rightarrow 0$, сводим элементы оператора Лакса к

$$\begin{aligned} L_{11} &= 2i\alpha(\hat{c}_1^0(\alpha + s^3) + \hat{c}_1^1), & L_{22} &= 2i\alpha(\hat{c}_2^0(\alpha - s^3) - \hat{c}_1^2), \\ L_{12} &= 2i\alpha(s^-), & L_{21} &= 2i\alpha(s^+), \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

где мы ввели $\hat{c}_a^1 = \hat{c}_a^0 c_2$, $a = 1, 2$, и переобозначили $-is^\pm \rightarrow s^\pm$. Поэтому, деля на константу $2i\alpha$, из (П.2) получаем рациональный оператор Лакса (3.10).

Редукция алгебры (3.2) к (3.11). Подставив (II.1) в $\widehat{M}^\pm$ и взяв предел $\alpha \rightarrow 0$, получаем редукцию

$$M^+ \rightarrow -(\widehat{m}^+ + i\alpha\widehat{m}^-), \quad M^- \rightarrow -(i\alpha\widehat{m}^-). \quad (\text{П.3})$$

Подставляя эти выражения в правую часть (3.2) и учитывая асимптотики $\sin 2\alpha s^3 \sim 2\alpha s^3$, $\cos 2\alpha s^3 \sim 1$, получаем (3.11), где знак “минус” в правой части поглощен за счет переобозначения $s^\pm$ (см. выше).

Благодарности. Автор выражает искреннюю признательность организаторам конференции “Нелинейная физика: теория и эксперимент. IV” и Фонду Александра фон Гумбольдта (Германия) за организационную и финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Quantum spectral transform method. Recent developments”, *Integrable Quantum Field Theories*, Proc. Symp. (Tvärminne, Finland, 1981), Lecture Notes in Phys., **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, Springer, Berlin–New York, 1982, 61.
- [2] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Алгебра и анализ*, **1** (1989), 178.
- [3] L. D. Faddeev, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10** (1995), 1845.
- [4] A. Kundu, B. Basu Mallick, *Modern Phys. Lett. A*, **7** (1992), 61; A. Kundu, *Phys. Rev. Lett.*, **82** (1999), 3936; “Unifying approaches in integrable systems: quantum and statistical, ultralocal and non-ultralocal”, *Classical and Quantum Integrable Systems: Theory and Applications*, ed. A. Kundu, IOP, Bristol, 2003, 147.
- [5] A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Nucl. Phys. B*, **205** (1982), 401.
- [6] V. K. Dobrev, *J. Math. Phys.*, **33** (1992), 3419.
- [7] A. Kundu, *SIGMA*, **3** (2007), 040.
- [8] A. Kundu, B. Basu Mallick, *J. Math. Phys.*, **34** (1993), 1052.
- [9] A. G. Shnirman, B. A. Malomed, E. Ben-Jacob, *Phys. Rev. A*, **50** (1994), 3453.
- [10] L. D. Faddeev, O. Tirkkonen, *Nucl. Phys. B*, **453** (1995), 647.
- [11] A. Kundu, *Phys. Lett. A*, **190** (1994), 79.
- [12] R. Inoue, K. Hikami, *J. Phys. Soc. Japan*, **67** (1998), 87.
- [13] A. Kundu, O. Ragnisco, *J. Phys. A*, **27** (1994), 6335.
- [14] В. О. Тапасов, *ТМФ*, **63** (1985), 175; A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Lett. Math. Phys.*, **8** (1984), 259.
- [15] A. Kundu, *Phys. Lett. B*, **633** (2006), 657.
- [16] A. Kundu, *J. Phys. A*, **37** (2004), L281.
- [17] J. Phys. A, **37** (2004), L471; [hep-th/0407199](#); P. Bowcock, E. Corrigan, C. Zambon, *JHEP*, **08** (2005), 023; [hep-th/0506169](#).
- [18] I. Khabibullin, A. Kundu, “Quantum and classical integrable sine-Gordon model with defect” (to appear).
- [19] B. Buck, C. V. Sukumar, *Phys. Lett. A*, **81** (1981), 132.
- [20] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51** (1963), 89.
- [21] C. A. Blockley, D. F. Walls, H. Risken, *Europhys. Lett.*, **17** (1992), 509.
- [22] M. Chaichian, D. Ellinas, P. Kulish, *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990), 980.
- [23] И. Т. Хабибуллин, *ТМФ*, **114** (1998), 115.
- [24] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **40** (1979), 194.