Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Манно, Ф. Оливери, Р. Витоло, Дифференциальные уравнения, однозначно определенные алгебрами точечных симметрий, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 3, 486–494

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6061>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:51:58

© 2007 г.

Дж. Манно*, Ф. Оливери†, Р. Витоло*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ АЛГЕБРАМИ ТОЧЕЧНЫХ СИММЕТРИЙ

Продолжено изучение сильно и слабо Ли-замечательных уравнений, определенных авторами в одной из последних работ. Рассматриваются некоторые подходящие алгебры векторных полей на $\mathbb{R}^k$ (такие как изометрическая, аффинная, проективная или конформная алгебры) и характеризуются сильно Ли-замечательные уравнения, допускаемые рассмотренными алгебрами Ли.

Ключевые слова: симметрии Ли дифференциальных уравнений, пространства струй.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных достижений в геометрической теории дифференциальных уравнений (ДУ), как обыкновенных (ОДУ), так и уравнений в частных производных (ДУЧП), является теория симметрий [1]–[5]. Симметрии ДУ являются (конечными или инфинитезимальными) преобразованиями независимых и зависимых переменных, а также производных независимых переменных по зависимым, с тем дополнительным свойством, что решения отображаются в решения. Знание симметрий ДУ может привести к вычислению некоторых его решений или к преобразованию его к более удобному виду; в случае ОДУ это может позволить редуцировать порядок, определить интегрирующий множитель и т.д. Имеется некоторый выделенный класс симметрий, происходящих из преобразований независимых и зависимых переменных – точечные симметрии. В настоящей работе мы сконцентрируем внимание на этом виде симметрий.

Задача нахождения симметрий ДУ связана с естественной “обратной” задачей, а именно с задачей нахождения ДУ наиболее общего вида, допускающего заданную алгебру Ли как подалгебру инфинитезимальных точечных симметрий.

Путь, приводящий к решению такой задачи, состоит в классификации всех возможных реализаций заданной алгебры Ли как алгебры векторных полей на базовом

*Department of Mathematics “E. De Giorgi”, University Lecce, via per Arnesano, 73100 Lecce, Italy. E-mail: gianni.manno@unile.it; raffaele.vitolo@unile.it

†Department of Mathematics, University of Messina, Contrada Papardo, Salita Sperone 31, 98166 Messina, Italy. E-mail: oliveri@mat520.unime.it

многообразии. Второй шаг состоит в нахождении дифференциальных инвариантов I_i рассматриваемой реализации (см., например, работы [6]). Тогда, как хорошо известно [5], при подходящих гипотезах о регулярности наиболее общее ДУ, допускающее заданную алгебру Ли как подалгебру точечных симметрий, локально задается уравнением $F^\mu(I_1, I_2, \dots, I_k) = 0$, где F^μ – произвольные гладкие функции.

В настоящей работе мы следующим образом специализируем поставленную выше задачу: мы желаем найти *единственное* ДУ, допускающее данную алгебру Ли как подалгебру своих точечных симметрий. Некий аспект такой задачи рассматривался в работе [7], где авторы, начав с заданного ДУ, нашли необходимые и достаточные условия того, что оно однозначно определяется своими точечными симметриями. Следуя терминологии, уже использованной в работах [7]–[9], назовем такое ДУ *Ли-замечательным уравнением*. Аналогичная задача была также рассмотрена Розенхаусом в работах [10]; действительно, помимо других разнообразных результатов автор доказал, что уравнение обращения в нуль гауссовой кривизны поверхностей в $\mathbb{R}^3$ является единственным уравнением второго порядка, допускающим проективную алгебру пространства $\mathbb{R}^3$ в качестве точечных симметрий.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы вводим ДУ порядка r как подмногообразие подходящего пространства струй (порядка r), являющегося многообразием, координатные функции на картах которого можно интерпретировать как “независимые” и “зависимые” переменные и как производные последних по первым до порядка r . После этого мы вводим два различных типа Ли-замечательных уравнений: *сильно* и *слабо* Ли-замечательные уравнения. Сильно Ли-замечательные уравнения однозначно определены своими точечными симметриями во всем пространстве струй, тогда как слабо Ли-замечательные уравнения представляют собой уравнения, которые не пересекаются с другими уравнениями, допускающими те же симметрии. Далее мы напомним основные результаты, полученные в работе [8]. Точнее, мы приведем как необходимые, так и достаточные условия того, что уравнение является сильно или слабо Ли-замечательным.

В разделе 3 мы находим сильно Ли-замечательные уравнения, связанные с изометрической, аффинной, проективной и конформной алгебрами в пространстве $\mathbb{R}^k$, снабженном метриками различных сигнатур. Поскольку мы начинаем с конкретных, а не с абстрактных алгебр, мы не сталкиваемся с проблемой их реализации как векторных полей. В частности, в отношении аффинной алгебры в $\mathbb{R}^k$ мы воспроизводим однородные уравнения второго порядка Монжа–Ампера [11], а в $\mathbb{R}^3$ также и ДУЧП третьего порядка, которое, насколько известно авторам, до сих пор не было описано в литературе. Для конформной алгебры в $\mathbb{R}^3$ также воспроизводится интересное ДУЧП второго порядка – уравнение поверхности $u(x, y)$, квадрат (скалярной) средней кривизны которой равен гауссовой кривизне.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РАМКИ

Напомним некоторые основные факты, касающиеся пространства струй (детали см. в работах [3], [4], [12]), и основы теории ДУ, определяемых своими точечными симметриями Ли [7].

Предполагается, что все многообразия и отображения являются C^∞ . Если E – многообразие, то $\chi(E)$ обозначает алгебру Ли векторных полей на E . Для простоты положим также, что все подмногообразия многообразия E являются *вложенными* подмногообразиями.

Пусть E – $(n + m)$ -мерное гладкое многообразие и L – n -мерное вложенное подмногообразие в E . Пусть (V, y^A) – локальная карта на E . Координаты (y^A) можно разделить на два множества, $(y^A) = (x^\lambda, u^i)$, $\lambda = 1, \dots, n$ и $i = 1, \dots, m$, таких, что подмногообразие L локально описывается как график векторной функции $u^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$. Ниже греческие индексы пробегает значения от 1 до n , а латинские – от 1 до m , если не указано другое.

Говорят, что множество классов эквивалентности $[L]_p^r$ подмногообразий L , имеющих при $p \in E$ контакт порядка r , является r -струей n -мерных подмногообразий многообразия E (они также известны как продолженные расслоения [4]) и обозначается как $J^r(E, n)$. Если E наделено слоением $\pi: E \rightarrow M$, где $\dim M = n$, то струя r -го порядка $J^r \pi$ локальных сечений слоения π является открытым плотным подмножеством в $J^r(E, n)$. Имеются естественные отображения $j_r L: L \rightarrow J^r(E, n)$, $p \mapsto [L]_p^r$ и $\pi_{k,h}: J^k(E, n) \rightarrow J^h(E, n)$, $[L]_p^k \mapsto [L]_p^h$, $k \geq h$.

Множество $J^r(E, n)$ есть гладкое многообразие размерности

$$\dim J^r(E, n) = n + m \sum_{h=0}^r \binom{n+h-1}{n-1} = n + m \binom{n+r}{r}, \quad (1)$$

карты которого суть (x^λ, u_σ^i) , где $u_\sigma^i \circ j_r L = \partial^{|\sigma|} f^i / \partial x^\sigma$, $0 \leq |\sigma| \leq r$. На $J^r(E, n)$ имеется распределение (контактное распределение), порожденное векторами

$$D_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + u_{\sigma\lambda}^j \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}, \quad \frac{\partial}{\partial u_\tau^j},$$

где $0 \leq |\sigma| \leq r-1$, $|\tau| = r$ и $\sigma\lambda$ – мультииндекс $(\sigma_1, \dots, \sigma_{r-1}, \lambda)$. Векторные поля D_λ являются (усеченными) полными производными. Любое векторное поле $\Xi \in \chi(E)$ можно поднять до векторного поля $\Xi^{(r)} \in \chi(J^r(E, n))$, сохраняющего контактное распределение. Если $\Xi = \Xi^\lambda \partial / \partial x^\lambda + \Xi^i \partial / \partial u^i$ есть координатная запись векторного поля на E , то его k -подъем $\Xi^{(k)}$ имеет координатное выражение

$$\Xi^{(k)} = \Xi^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \Xi_\sigma^i \frac{\partial}{\partial u_\sigma^i}, \quad (2)$$

где $\Xi_{\tau,\lambda}^j = D_\lambda(\Xi_\tau^j) - u_{\tau,\beta}^j D_\lambda(\Xi^\beta)$ при $|\tau| < k$.

Дифференциальное уравнение $\mathcal{E}$ порядка r на n -мерных подмногообразиях многообразия E есть подмногообразие многообразия $J^r(E, n)$. Многообразие $J^r(E, n)$ называется *тривиальным уравнением*. Инфинитезимальная точечная симметрия ДУ $\mathcal{E}$ есть векторное поле типа $\Xi^{(r)}$, касательное к $\mathcal{E}$.

Пусть уравнение $\mathcal{E}$ локально описывается с помощью $\{F^i = 0\}$, $i = 1, \dots, k$, где $k < \dim J^r(E, n)$. Тогда нахождение точечных симметрий сводится к решению системы

$$\Xi^{(r)}(F^i) = 0$$

при $F^i = 0$ для некоторого $\Xi \in \chi(E)$.

Обозначим через $\text{sym}(\mathcal{E})$ алгебру Ли инфинитезимальных точечных симметрий уравнения $\mathcal{E}$.

Под *дифференциальным инвариантом r -го порядка* подалгебры Ли $\mathfrak{s}$ алгебры $\chi(E)$ мы понимаем гладкую функцию $I: J^r(E, n) \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что для всех $\Xi \in \mathfrak{s}$ выполнено $\Xi^{(r)}(I) = 0$.

Говорят, что задача определения алгебры Ли $\text{sym}(\mathcal{E})$ является *прямой задачей Ли*. Наоборот, при заданной подалгебре Ли $\mathfrak{s} \subset \chi(E)$ мы рассматриваем *обратную задачу Ли* – задачу о характеристизации таких уравнений $\mathcal{E} \subset J^r(E, n)$, для которых $\mathfrak{s} \subset \text{sym}(\mathcal{E})$ [2], [13].

Ниже мы обратимся к анализу обратной задачи Ли. Начнем с содержащихся в работе [7] определения и основных свойств ДУ, однозначно определяемых своими точечными симметриями, которые мы называем *Ли-замечательными ДУ*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть E – многообразие, $\dim E = n + m$, и пусть $r \in \mathbb{N}$, $r > 0$. Говорят, что l -мерное уравнение $\mathcal{E} \subset J^r(E, n)$ является:

слабо Ли-замечательным уравнением, если $\mathcal{E}$ – единственное максимальное (относительно включения) l -мерное уравнение в $J^r(E, n)$, при любых $\theta \in \mathcal{E}$ допускающее $\text{sym}(\mathcal{E})$ как подалгебру алгебры своих инфинитезимальных точечных симметрий;

сильно Ли-замечательным уравнением, если $\mathcal{E}$ – единственное максимальное (относительно включения) l -мерное уравнение в $J^r(E, n)$, допускающее $\text{sym}(\mathcal{E})$ как подалгебру алгебры своих инфинитезимальных точечных симметрий.

Конечно, сильно Ли-замечательное уравнение является также слабо Ли-замечательным. Имеются некоторые прямые следствия этого определения. Для каждого $\theta \in J^r(E, n)$ обозначим через $S_\theta(\mathcal{E}) \subset T_\theta J^r(E, n)$ подпространство, порожденное значениями инфинитезимальных точечных симметрий уравнения $\mathcal{E}$ при θ . Положим $S(\mathcal{E}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\theta \in J^r(E, n)} S_\theta(\mathcal{E})$. Вообще говоря, $\dim S_\theta(\mathcal{E})$ может меняться при $\theta \in J^r(E, n)$. Имеет место следующее неравенство:

$$\dim \text{sym}(\mathcal{E}) \geq S_\theta(\mathcal{E}) \quad (3)$$

для всех $\theta \in J^r(E, n)$, где $\dim \text{sym}(\mathcal{E})$ – размерность (как вещественного векторного пространства) алгебры Ли инфинитезимальных точечных симметрий $\text{sym}(\mathcal{E})$ уравнения $\mathcal{E}$. Если $S(\mathcal{E})$ имеет один и тот же ранг для каждого $\theta \in J^r(E, n)$, то $S(\mathcal{E})$ является инволютивным (гладким) распределением.

Подмногообразие N многообразия $J^r(E, n)$ является *интегральным подмногообразием* в $S(\mathcal{E})$, если $T_\theta N = S_\theta(\mathcal{E})$ для каждого $\theta \in N$. Конечно, интегральное подмногообразие в $S(\mathcal{E})$ является уравнением в $J^r(E, n)$, допускающим все элементы в $\text{sym}(\mathcal{E})$ в качестве инфинитезимальных точечных симметрий. Точки многообразия $J^r(E, n)$ максимального ранга в $S(\mathcal{E})$ образуют открытое множество многообразия $J^r(E, n)$ [7]. Отсюда следует, что $\mathcal{E}$ не может совпадать с множеством точек максимального ранга в $S(\mathcal{E})$. Можно доказать следующие теоремы [7].

ТЕОРЕМА 1. 1. *Необходимое условие того, что ДУ $\mathcal{E}$ является сильно Ли-замечательным уравнением, имеет вид*

$$\dim \text{sym}(\mathcal{E}) > \dim \mathcal{E}.$$

2. Необходимое условие того, что ДУ $\mathcal{E}$ является слабо Ли-замечательным уравнением, имеет вид

$$\dim \operatorname{sym}(\mathcal{E}) \geq \dim \mathcal{E}.$$

В работе [7] были также установлены достаточные условия, которые оказываются полезными для вычислительных примеров и приложений.

ТЕОРЕМА 2. 1. Если $S(\mathcal{E})|_{\mathcal{E}}$ является l -мерным распределением на $\mathcal{E} \subset J^r(E, n)$, то $\mathcal{E}$ – слабо Ли-замечательное уравнение.

2. Пусть $S(\mathcal{E})$ таково, что для любого $\theta \notin \mathcal{E}$ имеем $\dim S_{\theta}(\mathcal{E}) > l$. Тогда $\mathcal{E}$ является сильно Ли-замечательным уравнением.

Следующая теорема [7] дает соотношение между Ли-замечательностью уравнений и дифференциальными инвариантами.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{s}$ – подалгебра Ли алгебры $\chi(J^r(E, n))$. Предположим, что r -продолженная подалгебра для $\mathfrak{s}$ действует регулярно на $J^r(E, n)$ и что множество функционально независимых дифференциальных инвариантов r -го порядка подалгебры $\mathfrak{s}$ редуцируется к единственному элементу $I \in C^{\infty}(J^r(E, n))$. Тогда подмногообразие в $J^r(E, n)$, описываемое с помощью $\Delta(I) = 0$ (в частности, $I = k$ для любого $k \in \mathbb{R}$), где Δ – произвольная гладкая функция, является слабо Ли-замечательным уравнением.

Несколько примеров сильно и слабо Ли-замечательных уравнений предложены в работе [7]. Напомним некоторые из них.

1. Уравнение минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^4$ или $\mathbb{R}^5$ не является ни сильно, ни слабо Ли-замечательным уравнением; несмотря на это, оно будет слабо Ли-замечательным уравнением в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^6$, если мы уберем сингулярные уравнения.

2. Уравнение непараметризованной геодезической на полном односвязном римановом 2-мерном многообразии E является сильно Ли-замечательным уравнением, если и только если E имеет постоянную гауссову кривизну.

3. Уравнение $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \kappa$ является слабо Ли-замечательным уравнением, если $\kappa \neq 0$; несмотря на это, оно является сильно Ли-замечательным уравнением, если $\kappa = 0$.

4. Некоторые уравнения Монжа–Ампера высшего порядка [14] являются слабо Ли-замечательными уравнениями, если мы уберем сингулярные подмножества.

3. СИЛЬНО ЛИ-ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ АЛГЕБРАМИ ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ $\mathbb{R}^k$

Ниже мы рассмотрим только скалярные ДУЧП, т.е., согласно нашим обозначениям, ограничим наше рассмотрение случаем $m = 1$. Обозначим через $\mathcal{I}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+1})$ соответственно изометрическую, аффинную, проективную и конформную алгебры в $\mathbb{R}^{n+1}$ относительно метрики $g = \sum_{i=1}^n k_i dx^i \otimes dx^i + du \otimes du$, где k_i , $i = 1, \dots, n$, – ненулевые вещественные константы (ниже в случае $n = 2$, для упрощения обозначений, мы будем использовать переменные x и y вместо x^1 и x^2 , соответственно). Даже если алгебры $\mathcal{I}(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+1})$ будут зависеть от k_i , мы будем продолжать обозначать их теми же символами. Например,

при соответствующих значениях k_i алгебра $\mathcal{I}(\mathbb{R}^4)$ может быть как евклидовой, так и алгеброй Пуанкаре. Для каждой из предыдущих алгебр мы определим связанные с ними ДУЧП различных порядков, являющиеся сильно Ли-замечательными уравнениями.

Сначала рассмотрим случай алгебры $\mathcal{I}(\mathbb{R}^{n+1})$. Для того чтобы объяснить, как работают методы, представленные в разделе 2, проведем вычисления для случая $\mathbb{R}^3$, снабженного метрикой $k_1 dx \otimes dx + k_2 dy \otimes dy + du \otimes du$. Для остальных алгебр мы представим только конечные результаты, сопроводив их некоторыми полезными комментариями.

3.1. Случай $\mathcal{I}(\mathbb{R}^{n+1})$. Размерность алгебры $\mathcal{I}(\mathbb{R}^{n+1})$ равна $(n+1)(n+2)/2$. Тогда согласно теореме 1 сильно Ли-замечательные уравнения могут быть порядка 1. Согласно пункту 2 теоремы 2 для получения этих уравнений мы должны построить матрицу $M = (\Xi_i^{(1)j})$ 1-продолжений изометрий, характеризующихся векторными полями

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & \Xi_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & \Xi_3 &= \frac{\partial}{\partial u}, \\ \Xi_4 &= k_2 y \frac{\partial}{\partial x} - k_1 x \frac{\partial}{\partial y}, & \Xi_5 &= u \frac{\partial}{\partial x} - k_1 x \frac{\partial}{\partial u}, & \Xi_6 &= u \frac{\partial}{\partial y} - k_2 y \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь мы должны проверить, равен ли ранг этой матрицы 5 на $J^1(\mathbb{R}^3, 2)$ (за исключением 4-мерного подмногообразия, где ранг убывает). Такое подмногообразие будет искомым сильно Ли-замечательным уравнением. Более точно, матрица M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ y & -\frac{k_1}{k_2}x & 0 & \frac{k_1}{k_2}u_y & -u_x \\ u & 0 & -k_1x & -k_1 - u_x^2 & -u_x u_y \\ 0 & u & -k_2y & -u_x u_y & -k_2 - u_y^2 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 5, за исключением подмногообразия

$$1 + \frac{u_x^2}{k_1} + \frac{u_y^2}{k_2} = 0, \quad (5)$$

описывающего обращение в нуль инфинитезимального элемента площади, где ранг понижается. Обобщение для произвольного n следует немедленно. В этом случае сильно Ли-замечательное уравнение имеет вид

$$1 + \sum_{i=1}^n \frac{u_{x^i}^2}{k_i} = 0. \quad (6)$$

Конечно, чтобы уравнения (5) и (6) были непустыми, требуется, чтобы не все k_i были положительными.

3.2. Случай $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1})$. Размерность алгебры $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1})$ равна $n^2 + 3n + 2$. Используя теорему 1, мы видим, что сильно Ли-замечательное уравнение может быть порядка 2 или 3 в случае $n = 2$ и порядка 2, если $n \geq 3$.

Инфинитезимальные генераторы этой алгебры имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial a}, \quad a \frac{\partial}{\partial a}, \quad a \frac{\partial}{\partial b} \quad (7)$$

для всех $a, b \in \{x^1, x^2, \dots, x^n, u\}$.

Мы видим, что сильно Ли-замечательное уравнение второго порядка в $J^2(\mathbb{R}^3, 2)$ является однородным уравнением Монжа–Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0, \quad (8)$$

которое описывает поверхности в $\mathbb{R}^3$ с нулевой гауссовой кривизной.

Более того, существует также сильно Ли-замечательное уравнение третьего порядка в $J^3(\mathbb{R}^3, 2)$, которое имеет следующее локальное выражение:

$$\begin{aligned} u_{xx}^3 u_{yy}^2 + u_{xxx}^2 u_{yy}^3 + 6u_{xx}u_{xxx}u_{xy}u_{yy}u_{yyy} - 6u_{xxx}u_{xxy}u_{xy}u_{yy}^2 - \\ - 6u_{xx}u_{xxx}u_{xyu}u_{yy}^2 - 6u_{xx}^2u_{xy}u_{xyu}u_{yyy} - 6u_{xx}^2u_{xxy}u_{yy}u_{yyy} - \\ - 8u_{xxx}u_{xy}^3u_{yyy} + 9u_{xx}u_{xxy}^2u_{yy}^2 + 9u_{xx}^2u_{xyu}^2u_{yy} + \\ + 12u_{xxx}u_{xy}^2u_{xyu}u_{yy} + 12u_{xx}u_{xxy}u_{xy}^2u_{yyy} - 18u_{xx}u_{xxy}u_{xy}u_{xyu}u_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Насколько известно авторам, уравнение (9) пока еще не было описано в литературе; тем не менее в настоящий момент мы не можем дать ему ни геометрической, ни физической интерпретации. Ведутся дальнейшие исследования.

Теперь остается найти уравнения, которые существуют в $J^2(\mathbb{R}^{n+1}, n)$ при $n \geq 3$. В этом случае для каждого n мы все еще имеем сильно Ли-замечательное уравнение, а именно

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}\right) = 0, \quad (10)$$

являющееся однородным уравнением Монжа–Ампера второго порядка для n переменных [11].

3.3. Случай $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$. Размерность алгебры $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ равна $n^2 + 4n + 3$. Ее инфинитезимальные генераторы имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial a}, \quad a \frac{\partial}{\partial a}, \quad a \frac{\partial}{\partial b}, \quad a \left(\sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + u \frac{\partial}{\partial u} \right) \quad (11)$$

для всех $a, b \in \{x^1, x^2, \dots, x^n, u\}$.

Теперь становится ясным, что нам следует искать сильно Ли-замечательные уравнения в тех же пространствах струй, которые мы рассматривали в предыдущем разделе. Более того, следует обсудить также случай уравнения, которое существует в $J^3(\mathbb{R}^4, 3)$. Мы видим, что в этом случае уравнения (8)–(10) также являются сильно Ли-замечательными уравнениями и что нет сильно Ли-замечательных уравнений в $J^3(\mathbb{R}^4, 3)$. Действительно, продолжения векторных полей (11) линейно порождают в каждой точке $J^3(\mathbb{R}^4, 3)$ подпространство размерности по крайней мере 20. Поскольку размерность уравнения, которое мы ищем, равна 22, согласно теореме 1 у нас нет шансов найти сильно Ли-замечательное уравнение.

3.4. Случай $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+1})$. Размерность алгебры $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+1})$ равна $(n+2)(n+3)/2$. Нам нужно искать сильно Ли-замечательные уравнения второго порядка.

Начнем со случая $n = 2$. Инфинитезимальные генераторы этой алгебры являются генераторами (4) вместе с

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{k_1 x^2 - k_2 y^2 - u^2}{k_1} \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y} + xu \frac{\partial}{\partial u}, \\ & xy \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{k_2 y^2 - k_1 x^2 - u^2}{k_1} \frac{\partial}{\partial y} + yu \frac{\partial}{\partial u}, \\ & xu \frac{\partial}{\partial x} + yu \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} (u^2 - k_1 x^2 - k_2 y^2) \frac{\partial}{\partial u}, \\ & x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (12)$$

Прежде чем вычислять сильно Ли-замечательные уравнения, напомним некоторые основные понятия теории поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим метрику $k_1 dx \otimes dx + k_2 dy \otimes dy + du \otimes du$ на $\mathbb{R}^3$, где k_i – ненулевая вещественная константа. Тогда (скалярная) средняя кривизна H поверхности $u = u(x, y)$ общего положения записывается как

$$H = \frac{1}{2} \frac{(k_2 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (k_1 + u_x^2)u_{yy}}{(k_1 k_2 + k_2 u_x^2 + k_1 u_y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (13)$$

а гауссова кривизна G равна

$$G = \frac{u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2}{(k_1 k_2 + k_2 u_x^2 + k_1 u_y^2)^2}. \quad (14)$$

Далее, анализируя ранг матрицы 2-продолжений векторных полей (4) и (12), получаем, что единственное уравнение второго порядка, которое является сильно Ли-замечательным уравнением по отношению к конформной алгебре, это уравнение

$$G = H^2. \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Путем прямых вычислений мы получаем, что единственный скалярный дифференциальный инвариант второго порядка I алгебры, которую образует $\mathcal{I}(\mathbb{R}^3)$ при добавлении гомотетий пространства $\mathbb{R}^3$, это $I = H^2/G$. Тогда согласно теореме 3 $I = k$, где k – константа, является слабо Ли-замечательным уравнением. Поэтому нам следует искать сильно Ли-замечательные уравнения среди уравнений $I = k$. Действительно, из приведенного выше анализа следует, что $I = 1$ является искомым сильно Ли-замечательным уравнением.

Теперь проанализируем случай $n = 3$. Мы будем искать сильно Ли-замечательные уравнения в пространстве струй $J^2(\mathbb{R}^4, 3)$. В этом случае оказывается, что Ли-замечательных уравнений нет. Действительно, продолжения векторных полей, образующих алгебру $\mathcal{C}(\mathbb{R}^4)$, в каждой точке $J^2(\mathbb{R}^4, 3)$ линейно порождают подпространство размерности по крайней мере 12. Поскольку размерность уравнения, которое мы ищем, равна 12, согласно теореме 1 у нас нет шансов найти сильно Ли-замечательное уравнение. Такой же отрицательный результат мы получаем, рассматривая алгебру $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+1})$ при $n > 3$.

Благодарности. Авторы благодарны Е. Ферапонтову, В. Розенхаусу и Г. Сак-команди за стимулирующие обсуждения. Работа была поддержана PRIN 2005/2007 “Propagazione non lineare e stabilità nei processi termodinamici del continuo” и “Leggi di conservazione e termodinamica in meccanica dei continui e in teorie di campo”, GNFM, GNSAGA, Universities of Lecce and Messina.

Список литературы

- [1] G. Baumann, *Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica*, Springer, New York, 2000; G. W. Bluman, S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Appl. Math. Sci., **81**, Springer, New York, 1989; N. H. Ibragimov, *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Math. Appl., **3**, Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster, 1985; *Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, vols. I–III, ed. N. H. Ibragimov, CRC, Boca Raton, 1994, 1995, 1996; Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, М., Наука, 1978.
- [2] G. W. Bluman, J. D. Cole, *Similarity Methods of Differential Equations*, Appl. Math. Sci., **13**, Springer, New York, 1974.
- [3] *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, ред. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, Факториал, М., 1997.
- [4] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [5] P. J. Olver, *Equivalence, Invariants, and Symmetry*, Cambridge Univ. Press, New York, 1995.
- [6] W. I. Fushchych, I. Yehorchenko, *Acta Appl. Math.*, **28** (1992), 69–92; G. Rideau, P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **31** (1990), 1095–1105.
- [7] G. Manno, F. Oliveri, R. Vitolo, “On differential equations characterized by their Lie point symmetries”, to appear in *J. Math. Anal. Appl.* (2007).
- [8] G. Manno, F. Oliveri, R. Vitolo, “On an inverse problem in group analysis of PDEs: Lie-remarkable equations”, *Waves and Stability in Continuous Media*, Proc. XIII Conf. (Catania, Italy, 2005), eds. R. Monaco, G. Mulone, S. Rionero, T. Ruggeri, World Sci. Publ., Hackensack, New York, 2006, 420–432.
- [9] F. Oliveri, *Note Mat.*, **23:2** (2004/2005), 195–216; “Sur une propriété remarquable des équations de Monge-Ampère”, *Non Linear Hyperbolic Fields and Waves. A tribute to Guy Boillat*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., № 78, 2006, 243–257.
- [10] V. Rosenhaus, *On one-to-one correspondence between the equation and its group. The Monge-Ampère equation*, Preprint F. 18, Acad. Sci. Estonian SSR, Tartu, 1982; *Algebras Groups Geom.*, **3** (1986), 148–166; **5** (1988), 137–150.
- [11] G. Boillat, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **313** (1991), 805–808.
- [12] D. J. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, London Math. Soc. Lect. Note Ser., **142**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [13] W. I. Fushchych, *Scientific Works*, v. 2 (1979–1985), ed. V. Boyko, Kyiv, 2000; <http://www.imath.kiev.ua/~fushchych/papers/Volume2.pdf>.
- [14] G. Boillat, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **315** (1992), 1211–1214.