Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Нуччи, Последний множитель Якоби, симметрии
Ли и скрытая линейность: изобилие “золотых рыбок”,
ТМФ, 2007, том 151, номер 3, 495–509

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6062>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 10:03:45

© 2007 г.

М. К. Нуччи*

ПОСЛЕДНИЙ МНОЖИТЕЛЬ ЯКОБИ, СИММЕТРИИ ЛИ И СКРЫТАЯ ЛИНЕЙНОСТЬ: ИЗОБИЛИЕ “ЗОЛОТЫХ РЫБОК”

В дополнение к методу редукции представлен новый алгоритмический метод нахождения симметрий Ли обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на использовании последнего множителя Якоби. Эти методы и симметрии Ли позволяют также обнаружить скрытую линейность некоторых физически значимых нелинейных уравнений. В качестве примеров рассмотрены уравнения Эйнштейна–Янга–Миллса и задача многих тел на плоскости Калоджеро.

Ключевые слова: ли-групповой анализ, первые интегралы, последний множитель Якоби.

1. ВВЕДЕНИЕ

Ли-групповой анализ является наиболее мощным инструментом для нахождения общих решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Однако он бесполезен в случае систем n уравнений первого порядка, поскольку они допускают бесконечное число симметрий, и не существует систематического способа для нахождения даже одномерной алгебры симметрий Ли, отличной от тривиальных групп типа трансляций по времени, допускаемых автономными системами. Можно попытаться построить допустимую n -мерную разрешимую алгебру симметрий Ли, сконструировав анзац для вида ее генераторов, но (редко имеющий место) успех такой попытки есть не более чем результат счастливой догадки. Тем не менее, как было отмечено нами в работе [1], любая система n уравнений первого порядка может быть преобразована в эквивалентную систему, по меньшей мере одно уравнение которой является уравнением второго порядка. В таком случае допустимая алгебра симметрий Ли уже не является бесконечномерной, и появляется возможность найти нетривиальные симметрии исходной системы [1]. Эта идея была успешно примене-

*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia, 06123 Perugia, Italy.
E-mail: nucci@unipg.it

на в ряде случаев [1]–[9]. В работе [10] мы показали также, что первые интегралы могут быть получены с помощью ли-группового анализа, даже если происхождение изучаемой системы не связано с вариационной задачей, т.е. первые интегралы могут быть получены без применения теоремы Нётер [11].

Пусть рассматривается некоторая система уравнений первого порядка и путем исключения одной из зависимых переменных получается эквивалентная система, имеющая в своем составе одно уравнение второго порядка. Тогда ли-групповой анализ, примененный к этой эквивалентной системе, дает один или несколько первых интегралов исходной системы, которые не содержат исключенную зависимую переменную. Для этого требуется, конечно, чтобы такие первые интегралы существовали. Для того чтобы найти все такие первые интегралы, следует повторять данную процедуру до тех пор, пока остаются зависимые переменные.

Первые интегралы соответствуют характеристическим кривым определяющих уравнений параболического типа и строятся методом ли-группового анализа. Такой метод поиска первых интегралов был использован нами в работах [4], [5]. К сожалению, метод редукции не является совершенным методом для нахождения симметрий. Поэтому в работе [12] мы предложили другой метод, основанный на использовании последнего множителя Якоби [13]–[20]. Этот метод позволяет преобразовать произвольную систему n уравнений первого порядка в эквивалентную систему из n уравнений, одно уравнение которой имеет второй порядок и, таким образом, повышает порядок системы на единицу. Помимо прочего, этот метод был успешно применен в работе [12] к следующему уравнению второго порядка (см. монографию [21], глава 6):

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + f'(x)y^{p+1} + pf(x)y'y^p, \quad (1)$$

где $p \neq 0$ – вещественная константа, а $f \neq 0$ – произвольная функция независимой переменной x . Это уравнение не обладает точечными симметриями Ли в случае функции $f(x)$ общего вида и тем не менее заведомо является интегрируемым [22]. Наш метод приводит к эквивалентной системе двух уравнений, одно из которых является уравнением первого порядка, а другое – уравнением второго порядка. Эта система обладает симметриями Ли, достаточными для ее интегрирования в квадратурах.

В настоящей работе представлены примеры применения всех вышеуказанных методов. В разделе 2 с помощью метода редукции получены два хорошо известных первых интеграла статических сферически симметричных уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса [23]. В разделе 3 найдены некоторые свойства (интегрируемость, линеаризуемость, редукция порядка) для рассмотренной Калоджеро [24] задачи многих тел на плоскости.

Для вычисления симметрий Ли везде в данной работе была использована наша собственная интерактивная программа в пакете REDUCE [25].

2. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА–ЯНГА–МИЛЛСА

В работе [23] статические сферически симметричные уравнения Эйнштейна–Янга–Миллса были представлены в виде системы¹⁾

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= w_1 w_3, & \dot{w}_2 &= w_1 w_5, & \dot{w}_3 &= (w_4 - w_3)w_3 - 2w_5^2, \\ \dot{w}_4 &= s(1 - 2aw_1) + 2w_5^2 - w_4^2, & \dot{w}_5 &= sw_2 w_6 + (w_3 - w_4)w_5, \\ \dot{w}_6 &= 2w_2 w_5 - w_3 w_6,\end{aligned}\quad (2)$$

где a – космологическая постоянная, $s \in \{-1; 1\}$, а точка обозначает производную по пространственно-временной переменной t . Известно, что эта система обладает двумя первыми интегралами, а именно

$$I_1 = w_1 w_6 - w_2^2, \quad (3)$$

$$I_2 = w_1^2(-4asw_1 - 3sw_6^2 + 3s + 3w_3^2 - 6w_3 w_4 + 6w_5^2). \quad (4)$$

Покажем, как можно получить эти первые интегралы с помощью метода редукции и ли-группового анализа. Подробности, касающиеся используемого метода, можно найти в работе [10].

2.1. Построение I_1 . Выразив функцию w_5 из второго уравнения²⁾ системы (2), $w_5 = \dot{w}_2/w_1$, получим следующую систему из пяти уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= w_1 w_3, & \ddot{w}_2 &= (2w_3 - w_4)\dot{w}_2 + sw_1 w_2 w_6, \\ \dot{w}_3 &= (w_4 - w_3)w_3 - 2\left(\frac{\dot{w}_2}{w_1}\right)^2, & \dot{w}_4 &= s(1 - 2aw_1) + 2\left(\frac{\dot{w}_2}{w_1}\right)^2 - w_4^2, \\ \dot{w}_6 &= 2w_2 \frac{\dot{w}_2}{w_1} - w_3 w_6,\end{aligned}\quad (5)$$

в которой одно уравнение является уравнением второго порядка, а четыре других – уравнениями первого порядка. Применив ли-групповой анализ к системе (5)³⁾, получим определяющее уравнение параболического типа для функции V двух независимых переменных. Соответствующая характеристическая кривая есть $w_6 - w_2^2/w_1$, что указывает на целесообразность использования следующего преобразования: $w_6 = r_6 + w_2^2/w_1$, в котором $r_6(t)$ – новая неизвестная функция переменной t . Тогда

¹⁾Заметим, что мы изменили оригинальные обозначения следующим образом: $w_1 = r$, $w_2 = W$, $w_3 = N$, $w_4 = k$, $w_5 = U$, $w_6 = T$.

²⁾Выбор уравнения, из которого выражается функция w_5 , не имеет значения. Можно было бы подобным способом получить интеграл I_1 , выразив w_5 из шестого уравнения.

³⁾Оператор Ли имеет вид $\Gamma = V\partial_t + \sum G_k \partial_{w_k}$.

система (5) превращается в систему⁴⁾

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 &= su_1^3 + su_1u_2u_5 + 2\dot{u}_1u_3 - \dot{u}_1u_4, & \dot{u}_2 &= u_2u_3, \\ \dot{u}_3 &= (u_4 - u_3)u_3 - 2\left(\frac{\dot{u}_1}{u_2}\right)^2, \\ \dot{u}_4 &= s(1 - 2au_2) + 2\left(\frac{\dot{u}_1}{u_2}\right)^2 - u_4^2, & \dot{u}_5 &= -u_3u_5,\end{aligned}\quad (6)$$

где

$$u_1 = w_2, \quad u_2 = w_1, \quad u_3 = w_3, \quad u_4 = w_4, \quad u_5 = r_6. \quad (7)$$

Применив ли-групповой анализ к системе (6), получим определяющее уравнение параболического типа для функции V двух независимых переменных. Соответствующая характеристическая кривая есть $u_4 + u_3$, что указывает на целесообразность использования следующего преобразования: $u_4 = r_4 - u_3$, в котором $r_4(t)$ – новая неизвестная функция переменной t . Тогда система (6) превращается в систему

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 &= su_1^3 + su_1u_2u_5 + 3\dot{u}_1u_3 - \dot{u}_1u_4, & \dot{u}_2 &= u_2u_3, \\ \dot{u}_3 &= (u_4 - 2u_3)u_3 - 2\left(\frac{\dot{u}_1}{u_2}\right)^2, \\ \dot{u}_4 &= s(1 - 2au_2) + 3(u_4 - u_3)u_3 - u_4^2, & \dot{u}_5 &= -u_3u_5,\end{aligned}\quad (8)$$

где

$$u_1 = w_2, \quad u_2 = w_1, \quad u_3 = w_3, \quad u_4 = r_4, \quad u_5 = r_6. \quad (9)$$

С помощью ли-группового анализа системы (8) получим определяющее уравнение параболического типа для функции V двух независимых переменных. Соответствующая характеристическая кривая есть $\xi = u_2u_5$. В таком случае $V = \psi(\xi)$, где ψ – произвольная функция переменной ξ , и, следовательно, оператор

$$\Gamma_1 = \psi(\xi) \partial_t \quad (10)$$

является генератором точечной симметрии Ли для системы (8). Выражая ξ через исходные неизвестные функции, получаем $\xi = w_1w_6 - w_2^2$, что есть в точности первый интеграл I_1 из формулы (3). Заметим, что если бы мы выразили функцию w_4 из третьего уравнения системы (2), $w_4 = (\dot{w}_3 + w_3^2 + 2w_5^2)/w_3$, то мы получили бы I_1 аналогичным образом. Тот же результат имел бы место, и если бы мы выразили функцию w_3 из первого уравнения системы (2). Фактически выражение для I_1 не содержит ни одну из зависимых переменных w_3, w_4, w_5 .

2.2. Построение I_2 . Выразив функцию w_2 из шестого уравнения системы (2), $w_2 = (\dot{w}_6 + w_3w_6)/(2w_5)$, получим систему из пяти уравнений, в которой одно уравнение является уравнением второго порядка, а остальные четыре – уравнениями первого порядка. Применив ли-групповой анализ к этой системе, получим определяющее уравнение параболического типа для функции V двух независимых переменных. Соответствующая характеристическая кривая есть $2w_5^2 - sw_6^2$, что указывает

⁴⁾Заметим, что в результате преобразования, продиктованного видом характеристической кривой, производная $\dot{w}_2$ оказывается исключенной из третьего уравнения системы (5).

на целесообразность использования преобразования $w_5 = \sqrt{(sw_6^2 + 2r_5)/2}$, в котором $r_5(t)$ – новая неизвестная функция переменной t . Тогда система (8) превращается в систему

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 &= -[2(\dot{u}_1 u_4 - 2u_2 u_5 - 2(u_3^2 - u_3 u_4 + u_5)u_1)u_5 - (u_1 + u_2)s^2 u_1^4 - su_1 \dot{u}_1^2 - \\ &\quad - ((3u_3^2 - 2u_3 u_4 + 4u_5)u_1^2 + ((2u_3 - u_4)\dot{u}_1 + 4u_2 u_5)u_1)su_1]/(su_1^2 + 2u_5), \\ \dot{u}_2 &= u_2 u_3, \\ \dot{u}_3 &= -(su_1^2 + 2u_5 + (u_3 - u_4)u_3), \\ \dot{u}_4 &= -(u_4^2 - 2u_5 + 2asu_2 - (u_1^2 + 1)s), \\ \dot{u}_5 &= (2u_3 - u_4)su_1^2 + 2(u_3 - u_4)u_5,\end{aligned}\tag{11}$$

где

$$u_1 = w_6, \quad u_2 = w_1, \quad u_3 = w_3, \quad u_4 = w_4, \quad u_5 = r_5.\tag{12}$$

Применив ли-групповой анализ к системе (11), получим определяющее уравнение параболического типа для функции V четырех независимых переменных. Соответствующая характеристическая кривая есть

$$\eta = u_2^2 u_5 - \frac{2}{3}asu_2^3 + \frac{1}{2}u_2^2 s - u_2^2 u_3 u_4 + \frac{1}{2}u_3^2 u_2^2.\tag{13}$$

В таком случае $V = \phi(\eta)$, где ϕ – произвольная функция переменной η , и, следовательно, оператор

$$\Gamma_2 = \phi(\eta)\partial_t\tag{14}$$

является генератором точечной симметрии Ли для системы (11). Выражая η через исходные неизвестные функции, получаем первый интеграл I_2 вида (4).

3. ЗАДАЧА N ТЕЛ НА ПЛОСКОСТИ КАЛОДЖЕРО

В работе [26] Калоджеро получил разрешимую задачу многих тел вида

$$\ddot{z}_n = 2 \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq n}}^N \frac{\dot{z}_n \dot{z}_m}{z_n - z_m}, \quad (n = 1, \dots, N),\tag{15}$$

рассматривая разрешимое нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$\varphi_t + \varphi_x + \varphi^2 = 0, \quad \varphi \equiv \varphi(x, t)$$

и наблюдая за поведением полюсов его решения. В работе [27] была представлена та же система (15), проведено дальнейшее изучение ее свойств и дано решение в терминах корней следующего алгебраического по z уравнения:

$$\sum_{m=1}^N \frac{\dot{z}_m(0)}{z - z_m(0)} = \frac{1}{t}.\tag{16}$$

Калоджеро, следуя Захарову [28], назвал систему (15) “золотой рыбкой”. В работе [6] мы использовали предложенный в [1] метод редукции и ли-групповой анализ,

чтобы показать, что “золотая рыбка” Калоджеро (15) допускает линеаризацию и может быть преобразована в следующую тривиальную систему из $(N - 1)$ уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 \tilde{u}_j}{d\tilde{y}^2} = 0 \quad (j = 1, \dots, N - 1), \quad (17)$$

представляющую собой в действительности “косяк” свободных частиц. Калоджеро ввел также такое обобщение системы (15):

$$\ddot{z}_n = 2 \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq n}}^N a_{nm} \frac{\dot{z}_n \dot{z}_m}{z_n - z_m} \quad (n = 1, \dots, N), \quad (18)$$

где константы связи удовлетворяют условию симметрии $a_{nm} = a_{mn}$, а в остальном являются произвольными. Калоджеро и его сотрудники посвятили изучению системы (18) бесчисленное множество работ (см. [29] и цитируемую там литературу). В работе [30], например, было показано, что при $N = 3$ общее решение системы (18) может быть получено в замкнутом виде при специальном выборе констант связи a_{nm} . В работе [31] к системе (18) для случаев $N = 2, 3, 4$ был применен анализ Пенлеве.

В данной работе мы применим метод редукции и покажем, что для любого $N > 2$ и для любых значений a_{nm} система (18) может быть сведена к одному ОДУ первого порядка и отдельной системе из $(N - 1)$ уравнения второго порядка, которая допускает двумерную алгебру симметрий Ли и поэтому может быть сведена к системе из $(2N - 4)$ ОДУ первого порядка; в частности, будет рассмотрен случай $N = 3$, который мы сведем к системе двух ОДУ первого порядка, и случай $N = 4$, который мы сведем к системе четырех ОДУ первого порядка. В случае $N = 2$ система (18) всегда может быть проинтегрирована в квадратурах; фактически метод редукции сводит систему (18) к одному ОДУ первого порядка и отдельному ОДУ второго порядка, которое всегда допускает двумерную алгебру симметрий Ли L_2 и поэтому интегрируется в квадратурах. Как следствие с помощью алгебры L_2 для этого единственного ОДУ второго порядка может быть получен последний множитель Якоби и соответствующий лагранжиан [20]. Наконец, мы покажем, что специальный выбор константы связи $a_{12} = -1/2$ приводит к трехмерной алгебре симметрий Ли $sl(2, \mathbb{R})$, и повышение порядка с помощью последнего множителя Якоби дает систему двух уравнений, одно из которых является уравнением первого порядка, а другое – уравнением второго порядка. Эта система допускает десятимерную алгебру симметрий Ли и, следовательно, может быть линеаризована. Аналогичная ситуация наблюдалась в работе [8], а также в работе [32].

3.1. Случай $N = 2$. В этом случае система (18) сводится к

$$\ddot{z}_1 = 2a_{12} \frac{\dot{z}_1 \dot{z}_2}{z_1 - z_2}, \quad \ddot{z}_2 = 2a_{12} \frac{\dot{z}_2 \dot{z}_1}{z_2 - z_1}. \quad (19)$$

Если ввести четыре новые зависимые переменные w_1, w_2, w_3, w_4 так, что

$$z_1 = w_1, \quad z_2 = w_2, \quad \dot{z}_1 = w_3, \quad \dot{z}_2 = w_4, \quad (20)$$

то система (19) превращается в автономную систему четырех уравнений первого порядка

$$\dot{w}_1 = w_3, \quad \dot{w}_2 = w_4, \quad \dot{w}_3 = 2a_{12} \frac{w_3 w_4}{w_1 - w_2}, \quad \dot{w}_4 = 2a_{12} \frac{w_4 w_3}{w_2 - w_1}. \quad (21)$$

Если использовать метод редукции и ввести новую независимую переменную, скажем⁵⁾, $y = w_1$, то система (21) сведется к следующей неавтономной системе трех уравнений первого порядка:

$$w'_2 = \frac{w_4}{w_3}, \quad w'_3 = 2a_{12} \frac{w_3 w_4}{w_3(y - w_2)}, \quad w'_4 = 2a_{12} \frac{w_4 w_3}{w_3(w_2 - y)}, \quad (22)$$

где штрих означает производную по переменной y . Выразив функцию w_4 из первого уравнения системы (22), $w_4 = w'_2 w_3$, получим следующую систему из двух уравнений: одно уравнение первого порядка

$$w'_3 = -2a_{12} \frac{w'_2 w_3}{w_2 - y} \quad (23)$$

и одно уравнение второго порядка

$$w''_2 = 2a_{12} \frac{w'_2(w'_2 + 1)}{w_2 - y}. \quad (24)$$

Если применить ли-групповой анализ к этой системе, то параболические уравнения и соответствующие характеристические кривые указывают на целесообразность использования следующих преобразований зависимых переменных: преобразования

$$w_3 = -\frac{r_3}{(w_2 - y)^{2a_{12}}}, \quad (25)$$

где r_3 – новая зависимая переменная от переменной y , которое превращает уравнение (23) в уравнение

$$r'_3 = -2a_{12} \frac{r_3}{w_2 - y}, \quad (26)$$

и преобразования

$$w_2 = u + y, \quad (27)$$

где u – новая зависимая переменная от переменной y , которое превращает уравнение (24) в уравнение

$$u'' = 2a_{12} \frac{(u' + 2)(u' + 1)}{u}. \quad (28)$$

Заметим, что это уравнение не зависит от r_3 , и уравнение (26) может быть легко проинтегрировано, как только получено общее решение уравнения (28). Применяв ли-групповой анализ к уравнению (28), получим неабелеву транзитивную двумерную алгебру симметрий Ли⁶⁾, порожденную следующими операторами:

$$\Gamma_1 = \partial_y, \quad \Gamma_2 = y\partial_y + u\partial_u; \quad (29)$$

⁵⁾В качестве новой независимой переменной мы могли бы взять любую другую зависимую переменную.

⁶⁾В работе [6] мы показали, что при $a_{12} = 1$ данное уравнение допускает восьмимерную алгебру симметрий Ли и поэтому может быть линеаризовано [18].

поэтому общее решение уравнения (28) может быть легко получено в неявном виде двумя квадратурами:

$$-2ua_{12} - u \operatorname{LerchPhi}\left(2u^{2a_{12}}c_1, 1, \frac{1}{2a_{12}}\right) - 4ya_{12} = c_2, \quad (30)$$

где c_1, c_2 – произвольные константы и $\operatorname{LerchPhi}(z, a, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(v+n)^a}$, как определено в пакете *MAPLE 9*.

Ли обнаружил связь между симметриями и последним множителем Якоби [18], [19], состоящую в том, что последний множитель Якоби может быть получен как результат обращения некоторой матрицы, содержащей допустимые симметрии⁷⁾. На самом деле, последний множитель Якоби M уравнения (28) равен величине, обратной следующему детерминанту:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & u' & 2a_{12} \frac{(u'+2)(u'+1)}{u} \\ y & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

т.е.

$$M = \frac{1}{\Delta} = -\frac{1}{2a_{12}(u'+2)(u'+1)}. \quad (32)$$

В таком случае известное соотношение между последним множителем Якоби M и лагранжианом $L(u, u', y)$, справедливое для любого уравнения второго порядка [20],

$$M = \frac{\partial^2 L}{\partial u'^2}, \quad (33)$$

приводит к следующему лагранжиану для уравнения (28):

$$L = -\frac{2 \ln(u)a_{12} + 1 + (u' + 1) \ln(u' + 1) - (u' + 2) \ln(u' + 2)}{2a_{12}}. \quad (34)$$

Наконец, примечательно, что уравнение (28) в случае $a_{12} = -1/2$, т.е.

$$u'' = -\frac{(u'+2)(u'+1)}{u} \Rightarrow (u_1 = u, u_2 = u') \Rightarrow \begin{matrix} u'_1 = u_2, \\ u'_2 = -\frac{(u_2+2)(u_2+1)}{u_1}, \end{matrix} \quad (35)$$

допускает трехмерную алгебру симметрий Ли $sl(2, \mathbb{R})$, порожденную следующими операторами:

$$\Gamma_1 = \partial_y, \quad \Gamma_2 = y\partial_y + u\partial_u, \quad \Gamma_3 = (u^2 - 4y^2)\partial_y - 4u(u+2y)\partial_u. \quad (36)$$

Это означает, что можно получить три последних множителя Якоби (и, соответственно, три лагранжиана): множитель M_1 , заданный формулой (32), т.е.

$$M_1 = \frac{1}{(u_2+2)(u_2+1)}, \quad (37)$$

⁷⁾ Обзор свойств последних множителей Якоби можно найти в работе [12].

множитель M_2 , определяемый детерминантом

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & u_2 & -\frac{(u_2+2)(u_2+1)}{u_1} \\ 1 & 0 & 0 \\ u_1^2 - 4y^2 & u_1(-4u_1 - 8y) & 2u_1(-u_2^2 - 4u_2 - 4) \end{pmatrix}, \quad (38)$$

т.е.

$$M_2 = \frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{2(u_2 + 2)(u_2^2 u_1 + 4u_2 y + 4u_2 u_1 + 4y + 2u_1)}, \quad (39)$$

и множитель M_3 , определяемый детерминантом

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & u_2 & -\frac{(u_2+2)(u_2+1)}{u_1} \\ y & u_1 & 0 \\ u_1^2 - 4y^2 & u_1(-4u_1 - 8y) & 2u_1(-u_2^2 - 4u_2 - 4) \end{pmatrix}, \quad (40)$$

т.е.

$$M_3 = \frac{1}{\Delta_3} = \frac{1}{(u_2 + 2)(2u_2 y + 2y - u_1)(u_2 u_1 + 3u_1 + 2y)}. \quad (41)$$

Важное свойство последних множителей Якоби состоит в том, что отношение любых двух множителей является первым интегралом. Поэтому следующие три отношения представляют собой первые интегралы⁸⁾ уравнения (системы) (35):

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{M_1}{M_2} = 2 \frac{u_2^2 u_1 + 4u_2 y + 4u_2 u_1 + 4y + 2u_1}{u_2 + 1}, \\ I_2 &= \frac{M_1}{M_3} = \frac{(2u_2 y + 2y - u_1)(u_2 u_1 + 3u_1 + 2y)}{u_2 + 1}, \\ I_3 &= \frac{M_3}{M_2} = 2 \frac{u_2^2 u_1 + 4u_2 y + 4u_2 u_1 + 4y + 2u_1}{(2u_2 y + 2y - u_1)(u_2 u_1 + 3u_1 + 2y)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Другие примеры применения этого свойства можно найти в работах [12], [33]–[35].

Покажем теперь, используя предложенный в работе [12] метод, что система (35) обладает скрытой линейностью. Последний множитель Якоби J системы (35) удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{d \ln J}{dy} + \frac{\partial u_2}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{-(u_2 + 2)(u_2 + 1)}{u_1} \right) = \frac{d \ln J}{dy} - \frac{2u_2 + 3}{u_1} = 0. \quad (43)$$

Это наводит на мысль повысить порядок системы (35), введя новую зависимую переменную r от переменной y такую, что

$$u_2 = \frac{r'}{2r} u_1 - \frac{3}{2}. \quad (44)$$

Тогда система (35) превращается в следующую систему двух уравнений, одно из которых является уравнением первого порядка, а другое – уравнением второго порядка:

$$u_1' = \frac{r' u_1 - 3r}{2r}, \quad r'' = \frac{3r' u_1 + r}{2u_1^2}. \quad (45)$$

⁸⁾Только два из них, очевидно, являются линейно независимыми.

Если применить ли-групповой анализ к этой системе, то на основании параболического уравнения и соответствующей характеристической кривой целесообразно использовать следующее преобразование зависимой переменной: $u_1 = \sqrt{r}s$, где s – новая зависимая переменная от переменной y . Это преобразование превращает систему (45) в

$$s' = -\frac{3\sqrt{r}}{2r}, \quad r'' = \frac{3\sqrt{r}r's + r}{2rs^2}. \quad (46)$$

Эта система допускает десятимерную алгебру симметрий Ли, порожденную следующими операторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{s^{2/3}}(s^2r\partial_y - 3(s^2r^{1/2} + sy)\partial_s + 2ry\partial_r), \\ X_2 &= \frac{1}{s^{1/3}}(sr\partial_y - 3sr^{1/2}\partial_s + 2r^{3/2}\partial_r), \\ X_3 &= (s^2r - 4y^2)\partial_y - (3s^2r^{1/2} + 6sy)\partial_s - (2r^{3/2}s + 4ry)\partial_r, \\ X_4 &= -\frac{1}{3s^{1/3}}(-4sy\partial_y - 3s^2\partial_s + (8r^{1/2}y + 2sr)\partial_r), \\ X_5 &= -\frac{1}{3s^{2/3}}(-3s\partial_s + 2r\partial_r), \\ X_6 &= s\partial_s - 2r\partial_r, \quad X_7 = y\partial_y + 2r\partial_r, \quad X_8 = s^{4/3}\partial_y - 4r^{1/2}s^{1/3}\partial_r, \\ X_9 &= \frac{1}{s^{1/3}}(s\partial_y - 2r^{1/2}\partial_r), \quad X_{10} = \partial_y \end{aligned} \quad (47)$$

и поэтому является линеаризуемой. Чтобы найти преобразование, линеаризующее данную систему, найдем трехмерную подалгебру $A_1 \oplus A_2$ и преобразуем ее к каноническому виду, т.е. к виду

$$\partial_{\tilde{y}}, \quad \partial_{\tilde{u}_1}, \quad \tilde{u}_1\partial_{\tilde{u}_1} + \tilde{u}_2\partial_{\tilde{u}_2}. \quad (48)$$

Мы обнаружили, что одной такой алгеброй является алгебра, порождаемая операторами X_{10} , X_5 , $3X_6/2$. В таком случае нетрудно видеть, что канонические переменные суть

$$\tilde{y} = y, \quad \tilde{u}_1 = \frac{3}{2}s^{2/3}, \quad \tilde{u}_2 = \frac{1}{s^{1/3}\sqrt{r}}, \quad (49)$$

а система (46) принимает вид

$$\frac{d\tilde{u}_1}{d\tilde{y}} = -\frac{3}{2}\tilde{u}_2, \quad \frac{d^2\tilde{u}_2}{d\tilde{y}^2} = \frac{3}{\tilde{u}_2} \left(\frac{d\tilde{u}_2}{d\tilde{y}} \right)^2. \quad (50)$$

Выразив $\tilde{u}_2$ из первого уравнения, $\tilde{u}_2 = (2/3)d\tilde{u}_1/d\tilde{y}$, получим следующее ОДУ третьего порядка:

$$\frac{d^3\tilde{u}_1}{d\tilde{y}^3} \frac{d\tilde{u}_1}{d\tilde{y}} = 3 \left(\frac{d^2\tilde{u}_1}{d\tilde{y}^2} \right)^2, \quad (51)$$

которое допускает шестимерную алгебру симметрий Ли (в действительности, десять контактных симметрий), и поэтому может быть линеаризовано. Уравнение (51)

представляет собой знаменитое дифференциальное уравнение Шварца, которое может быть преобразовано в уравнение Риккати

$$\frac{dv}{d\tilde{y}} = 2v^2, \quad v = \frac{d^2\tilde{u}_1}{d\tilde{y}^2} \bigg/ \frac{d\tilde{u}_1}{d\tilde{y}}.$$

Заметим, что второе уравнение системы (50) обладает алгеброй симметрий Ли, а потому может быть линеаризовано [18], т.е.

$$\frac{d^2u}{d\chi^2} = 0, \quad \text{где} \quad u = -\frac{1}{2\tilde{y}\tilde{u}_2}, \quad \chi = \frac{1}{\tilde{y}}.$$

3.2. Случай $N = 3$. Если ввести шесть новых зависимых переменных $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$ так, что

$$z_1 = w_1, \quad z_2 = w_2, \quad z_3 = w_3, \quad \dot{z}_1 = w_4, \quad \dot{z}_2 = w_5, \quad \dot{z}_3 = w_6, \quad (52)$$

то система (18) превратится в автономную систему из шести уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_4, & \dot{w}_2 &= w_5, & \dot{w}_3 &= w_6, & \dot{w}_4 &= 2 \left(a_{12} \frac{w_4 w_5}{w_1 - w_2} + a_{13} \frac{w_4 w_6}{w_1 - w_3} \right), \\ \dot{w}_5 &= 2 \left(a_{12} \frac{w_5 w_4}{w_2 - w_1} + a_{23} \frac{w_5 w_6}{w_2 - w_3} \right), & \dot{w}_6 &= 2 \left(a_{13} \frac{w_6 w_4}{w_3 - w_1} + a_{23} \frac{w_6 w_5}{w_3 - w_2} \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Если действовать в соответствии с методом редукции и ввести новую независимую переменную, например⁹⁾, $y = w_1$, то система (53) сведется к следующей неавтономной системе из пяти уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} w'_2 &= \frac{w_5}{w_4}, & w'_3 &= \frac{w_6}{w_4}, \\ w'_4 &= 2 \left(a_{12} \frac{w_5}{y - w_2} + a_{13} \frac{w_6}{y - w_3} \right), \\ w'_5 &= 2 \left(a_{12} \frac{w_5}{w_2 - y} + a_{23} \frac{w_5 w_6}{w_4(w_2 - w_3)} \right), \\ w'_6 &= 2 \left(a_{13} \frac{w_6}{w_3 - y} + a_{23} \frac{w_6 w_5}{w_4(w_3 - w_2)} \right), \end{aligned} \quad (54)$$

где штрих означает производную по переменной y . Выразив функцию w_5 из первого уравнения, а функцию w_6 – из второго уравнения системы (54), $w_5 = w'_2 w_4$, $w_6 = w'_3 w_4$, получим одно уравнение первого порядка для функции w_4 и отдельную систему из двух уравнений второго порядка для функций w_2, w_3 . Если применить ли-групповой анализ к этой системе, то параболические уравнения и соответствующие характеристические кривые указывают на целесообразность использования следующих преобразований зависимых переменных: преобразования

$$w_4 = \frac{r_4}{(w_3 - y)^{2a_{13}}(w_2 - y)^{2a_{12}}}, \quad (55)$$

⁹⁾В качестве новой независимой переменной можно взять любую другую зависимую переменную.

где r_4 – новая зависимая переменная от переменной y , которое превращает одиночное уравнение первого порядка для w_4 в уравнение

$$r'_4 = -2r_4 \frac{a_{12}(w_3 - y) + a_{13}(w_2 - y)}{(w_2 - y)(w_3 - y)}, \quad (56)$$

и преобразования

$$w_2 = u_1 + y, \quad w_3 = u_2 + y, \quad (57)$$

где u_1, u_2 – новые зависимые переменные от переменной y , которое превращает систему уравнений второго порядка для w_2, w_3 в систему

$$\begin{aligned} u''_1 &= \frac{2[(u'_1 + 2)a_{12}u_2 + (u'_2 + 1)a_{13}u_1](u_1 - u_2) + (u'_2 + 1)a_{23}u_1u_2}{(u_1 - u_2)u_1u_2}(u'_1 + 1), \\ u''_2 &= \frac{2[(u'_1 + 1)a_{12}u_2 + (u'_2 + 2)a_{13}u_1](u_1 - u_2) - (u'_1 + 1)a_{23}u_1u_2}{(u_1 - u_2)u_1u_2}(u'_2 + 1). \end{aligned} \quad (58)$$

Применяя ли-групповой анализ только к системе (58), получаем двумерную алгебру симметрий Ли¹⁰⁾, порожденную следующими операторами:

$$\Gamma_1 = \partial_y, \quad \Gamma_2 = y\partial_y + \sum_{n=1}^2 u_n \partial_{u_n}. \quad (59)$$

Ее дифференциальные инварианты порядка не больше 1, равные

$$\tilde{y} = \frac{u_2}{u_1}, \quad \tilde{u}_1 = u'_1, \quad \tilde{u}_2 = u'_2, \quad (60)$$

сводят систему (58) к следующей системе двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}_1}{d\tilde{y}} &= -\frac{2[(\tilde{y} - 1)a_{13} - a_{23}\tilde{y}](\tilde{u}_2 + 1) + (\tilde{u}_1 + 2)(\tilde{y} - 1)a_{12}\tilde{y}}{(\tilde{u}_1\tilde{y} - \tilde{u}_2)(\tilde{y} - 1)\tilde{y}}(\tilde{u}_1 + 1), \\ \frac{d\tilde{u}_2}{d\tilde{y}} &= -\frac{2[(\tilde{y} - 1)a_{12} + a_{23}](\tilde{u}_1 + 1)\tilde{y} + (\tilde{u}_2 + 2)(\tilde{y} - 1)a_{13}}{(\tilde{u}_1\tilde{y} - \tilde{u}_2)(\tilde{y} - 1)\tilde{y}}(\tilde{u}_2 + 1). \end{aligned} \quad (61)$$

3.3. Случай $N = 4$. Если ввести восемь новых зависимых переменных $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8$ так, что

$$\begin{aligned} z_1 &= w_1, & z_2 &= w_2, & z_3 &= w_3, & z_4 &= w_4, \\ \dot{z}_1 &= w_5, & \dot{z}_2 &= w_6, & \dot{z}_3 &= w_7, & \dot{z}_4 &= w_8, \end{aligned} \quad (62)$$

то система (18) превратится в автономную систему из восьми уравнений первого порядка. Действуя в соответствии с методом редукции и вводя новую независимую переменную, например, $y = w_1$, получим неавтономную систему из семи уравнений первого порядка. Выразим функцию w_6 из первого уравнения этой системы, функцию w_7 – из второго уравнения и функцию w_8 – из третьего уравнения,

$$w_6 = w'_2 w_5, \quad w_7 = w'_3 w_5, \quad w_8 = w'_4 w_5, \quad (63)$$

¹⁰⁾В работе [6] мы показали, что при $a_{nm} = 1$ эта система допускает 15-мерную алгебру симметрий Ли и поэтому является линеаризуемой.

получим одно уравнение первого порядка

$$w'_5 = \frac{-2w_5 [((w_3 - y)w'_4 a_{14} + (w_4 - y)w'_3 a_{13})(w_2 - y) + (w_3 - y)(w_4 - y)w'_2 a_{12}]}{(w_2 - y)(w_3 - y)(w_4 - y)} \quad (64)$$

и систему из трех уравнений второго порядка. Если применить ли-групповой анализ к этой системе, то параболические уравнения и соответствующие характеристические кривые указывают на целесообразность использования следующих преобразований зависимых переменных: преобразования

$$w_5 = \frac{r_5}{(w_4 - y)^{2a_{14}}(w_3 - y)^{2a_{13}}(w_2 - y)^{2a_{12}}}, \quad (65)$$

где r_5 – новая зависимая переменная от переменной y , которое превращает уравнение (64) в уравнение

$$r'_5 = -2r_5 \frac{(a_{13}(w_4 - y) + a_{14}(w_3 - y))(w_2 - y) + a_{12}(w_4 - y)(w_3 - y)}{(w_2 - y)(w_3 - y)(w_4 - y)}, \quad (66)$$

и преобразования

$$w_2 = u_2 + y, \quad w_3 = u_3 + y, \quad w_4 = u_1 + y, \quad (67)$$

где u_1, u_2, u_3 – новые зависимые переменные от переменной y , которое превращает систему трех уравнений второго порядка на функции w_4, w_2, w_3 в систему трех уравнений второго порядка на функции u_1, u_2, u_3 . Последняя допускает двумерную алгебру симметрий Ли¹¹⁾, порожденную следующими операторами:

$$\Gamma_1 = \partial_y, \quad \Gamma_2 = y\partial_y + \sum_{n=1}^3 u_n \partial_{u_n}. \quad (68)$$

Ее дифференциальные инварианты порядка не больше 1, равные

$$\tilde{y} = \frac{u_2}{u_1}, \quad \tilde{u}_1 = u'_1, \quad \tilde{u}_2 = u'_2, \quad \tilde{u}_3 = u'_3, \quad \tilde{u}_4 = \frac{u_4}{u_1}, \quad (69)$$

¹¹⁾В работе [6] мы показали, что при $a_{nm} = 1$ эта система допускает 24-мерную алгебру симметрий Ли и поэтому является линеаризуемой.

сводят систему (58) к следующей системе четырех уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{u}_1}{d\tilde{y}} &= [-2(((\tilde{u}_4 - 1)a_{13} - a_{34}\tilde{u}_4)(\tilde{u}_3 + 1)(\tilde{y} - 1)\tilde{y} + \\
 &\quad + ((\tilde{y} - 1)a_{12} - a_{24}\tilde{y})(\tilde{u}_2 + 1)(\tilde{u}_4 - 1)\tilde{u}_4 + \\
 &\quad + (\tilde{u}_1 + 2)(\tilde{u}_4 - 1)(\tilde{y} - 1)a_{14}\tilde{u}_4\tilde{y})(\tilde{u}_1 + 1)] \times \\
 &\quad \times [(\tilde{u}_1\tilde{y} - \tilde{u}_2)(\tilde{u}_4 - 1)(\tilde{y} - 1)\tilde{u}_4\tilde{y}]^{-1}, \\
 \frac{d\tilde{u}_2}{d\tilde{y}} &= [-2(((\tilde{u}_4 - \tilde{y})a_{13} - a_{23}\tilde{u}_4)(\tilde{u}_3 + 1)\tilde{y} + \\
 &\quad + (\tilde{u}_2 + 2)(\tilde{u}_4 - \tilde{y})a_{12}\tilde{u}_4)(\tilde{y} - 1) + \\
 &\quad + ((\tilde{y} - 1)a_{14} + a_{24})(\tilde{u}_1 + 1)(\tilde{u}_4 - \tilde{y})\tilde{u}_4\tilde{y})(\tilde{u}_2 + 1)] \times \\
 &\quad \times [(\tilde{u}_1\tilde{y} - \tilde{u}_2)(\tilde{u}_4 - \tilde{y})(\tilde{y} - 1)\tilde{u}_4\tilde{y}]^{-1}, \\
 \frac{d\tilde{u}_3}{d\tilde{y}} &= [-2(((\tilde{u}_4 - \tilde{y})a_{12} + a_{23}\tilde{y})(\tilde{u}_2 + 1)\tilde{u}_4 + \\
 &\quad + (\tilde{u}_3 + 2)(\tilde{u}_4 - \tilde{y})a_{13}\tilde{y})(\tilde{u}_4 - 1) + \\
 &\quad + ((\tilde{u}_4 - 1)a_{14} + a_{34})(\tilde{u}_1 + 1)(\tilde{u}_4 - \tilde{y})\tilde{u}_4\tilde{y})(\tilde{u}_3 + 1)] \times \\
 &\quad \times [(\tilde{u}_1\tilde{y} - \tilde{u}_2)(\tilde{u}_4 - \tilde{y})(\tilde{u}_4 - 1)\tilde{u}_4\tilde{y}]^{-1}, \\
 \frac{d\tilde{u}_4}{d\tilde{y}} &= \frac{\tilde{u}_1\tilde{u}_4 - \tilde{u}_3}{\tilde{u}_1\tilde{y} - \tilde{u}_2}.
 \end{aligned} \tag{70}$$

Список литературы

- [1] M. C. Nucci, *J. Math. Phys.*, **37** (1996), 1772–1775.
- [2] V. Torrisi, M. C. Nucci, “Application of Lie group analysis to a mathematical model which describes HIV transmission”, *The Geometrical Study of Differential Equations* (Washington, DC, USA, 2000), *Contemp. Math.*, **285**, eds. J. A. Leslie, T. P. Hobart, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 11–20.
- [3] M. C. Nucci, P. G. L. Leach, *J. Math. Phys.*, **42** (2001), 746–764.
- [4] M. C. Nucci, *J. Math. Phys.*, **44** (2003), 4107–4118.
- [5] P. G. L. Leach, M. C. Nucci, *J. Math. Phys.*, **45** (2004), 3590–3604.
- [6] M. C. Nucci, *J. Phys. A*, **37** (2004), 11391–11400.
- [7] M. Edwards, M. C. Nucci, *J. Nonlin. Math. Phys.*, **13** (2006), 211–230.
- [8] A. Gradassi, M. C. Nucci, *J. Math. Anal. Appl.*, **333** (2007), 274–294.
- [9] A. Gradassi, M. C. Nucci, *Integrability in a variant of the three-species Lotka–Volterra model* (to appear).
- [10] M. Marcelli, M. C. Nucci, *J. Math. Phys.*, **44** (2003), 2111–2132.
- [11] E. Noether, “Invariante Variationsprobleme”, *Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, **2** (1918), 235–257.
- [12] M. C. Nucci, *J. Nonlin. Math. Phys.*, **12** (2005), 284–304.
- [13] C. G. J. Jacobi, *Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti*, **99** (1844), 129–146.
- [14] C. G. J. Jacobi, *J. Reine Angew. Math.*, **27** (1844), 199–268.
- [15] C. G. J. Jacobi, *J. Reine Angew. Math.*, **29** (1845), 213–279; 333–376.
- [16] К. Якоби, *Лекции по динамике*, Гостехиздат, Л., 1936.
- [17] S. Lie, “Verallgemeinerung und neue Verwandelung der Jacobischen Multiplicator-Theorie”, *Forh. Christiania*, 1874, 255–274.

- [18] S. Lie, *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, Teubner, Leipzig, 1912.
- [19] L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Spoerri, Pisa, 1918.
- [20] Э. Уиттекер, *Аналитическая динамика*, Изд-во УдГУ, Ижевск, 1999.
- [21] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1976.
- [22] A. González-López, *J. Math. Phys.*, **29** (1988), 1097–1105.
- [23] J. Llibre, C. Valls, *J. Phys. A*, **38** (2005), 8155–8168.
- [24] F. Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments*, Lect. Notes Phys. New Ser. m: Monogr., **66**, Springer, Berlin, 2001.
- [25] M. C. Nucci, “Interactive REDUCE programs for calculating Lie point, non-classical, Lie–Bäcklund, and approximate symmetries of differential equations: manual and floppy disk”, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, v. 3. New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods*, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, 1996, 415–481.
- [26] F. Calogero, *Nuovo Cimento B*, **43** (1978), 177–241.
- [27] F. Calogero, *Physica D*, **152–153** (2001), 78–84.
- [28] V. E. Zakharov, “On the dressing method”, *Inverse Methods in Action* (Montpellier, 1989), *Inverse Probl. Theor. Imaging*, ed. P. C. Sabatier, Springer, Berlin, 1990, 602–623.
- [29] M. Bruschi, F. Calogero, *J. Math. Phys.*, **47**:10 (2006), 102701.
- [30] Ф. Калоджеро, *ТМФ*, **133** (2002), 149–159; Erratum, **134** (2003), 160.
- [31] A. Guillot, *Comm. Math. Phys.*, **256** (2005), 181–194.
- [32] M. C. Nucci, “An ODE system connected to isospectral beams (Solution to problem 2005-4)”, *Electron. J. Diff. Eqns. Problem Section: 2005-4*, 2006; <http://math.uc.edu/ode/odesols/p20054.pdf>.
- [33] M. C. Nucci, P. G. L. Leach, *J. Phys. A*, **37** (2004), 7743–7753.
- [34] М. К. Нуччи, *ТМФ*, **144** (2005), 394–404.
- [35] M. C. Nucci, P. G. L. Leach, *J. Math. Phys.*, **48** (2007), 013514.