Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Протогенов, В. А. Вербус, Декомпозиция переменных и дуальность в неабелевых моделях, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 3, 510–517

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6063>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:16:26

© 2007 г.

А. П. Протогенов*, В. А. Вербус†

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И ДУАЛЬНОСТЬ В НЕАБЕЛЕВЫХ МОДЕЛЯХ

Рассмотрены неоднородные токовые состояния в низкоразмерных системах, характеризующихся пространственным разделением фазовых состояний с упорядоченными спиновыми и зарядовыми степенями свободы. Показано, что вблизи точки самодуальности в спинорной модели Гинзбурга–Ландау неабелевы состояния имеют большую степень неоднородности, чем состояния с абелевым распределением степеней свободы.

Ключевые слова: сильно коррелированные системы, низкоразмерные электронные системы, неоднородные токовые состояния, модель Гинзбурга–Ландау, инвариант Хопфа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение неоднородных токовых состояний является в настоящее время одной из актуальных проблем теории низкоразмерных сильно коррелированных электронных систем. Для нескольких классов соединений такие системы характеризуются пространственным разделением фаз с различным упорядочением спиновых и зарядовых степеней свободы. Фазовая стратификация происходит в плоскостях, формирующих планарное строение кристаллической решетки.

Фазовое расслоение состояний с различным упорядочением электронных степеней свободы можно описать, вводя факторизацию $f = gh$ спиновых $g \in G$ и зарядовых $h \in H$ переменных параметра порядка $f \in F = G/H$. Мы будем рассматривать модели, определенные на пространстве F и имеющие группу симметрии G , и сфокусируем свое внимание на сравнении фазовых состояний вблизи точки самодуальности для спинорной модели Гинзбурга–Ландау в случае косет-пространства $F_1 = SU(2)/U(1)$. Основное внимание будет обращено на зависимость степени неоднородности токовых состояний, реализующих минимум свободной энергии, от группы симметрии основного состояния.

*Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия.
E-mail: alprot@appl.sci-nnov.ru

†Институт физики микроструктур РАН, Нижний Новгород, Россия.
E-mail: verbus@ipm.sci-nnov.ru

Для описания сильных электронных корреляций обычно используется гамильтониан

$$H = P \left[-t \sum_{\langle ij \rangle, \sigma} (c_{i\sigma}^+ c_{j\sigma} + \text{э.с.}) \right] P + J \sum_{\langle ij \rangle} \left(\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j - \frac{1}{4} n_i n_j \right) \quad (1.1)$$

$(t-J)$ -модели, являющейся стандартной при изучении различных фазовых состояний в слабо допированных моттовских антиферромагнитных диэлектриках. В выражении (1.1) $\mathbf{S}_i = c_{i\alpha}^+ \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} c_{i\beta} / 2$, $\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}$ – матричные элементы матриц Паули $\boldsymbol{\sigma}$, $P = \prod_i (1 - n_{i\uparrow} n_{i\downarrow})$ и $n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^+ c_{i\sigma}$, $n_i = \sum_{\sigma} n_{i\sigma}$. Устранение дважды оккупированных состояний с противоположно ориентированными спинами из гильбертова пространства состояний с помощью проектора Гутцвиллера P превращает кинетическое слагаемое в выражении (1.1) в слагаемое, которое содержит более высокие степени фермионных операторов $c_{i\sigma}$. В этом отношении оно существенно отличается от обычного квадратичного по фермионным операторам кинетического слагаемого в ферми-системах.

В приближении теории среднего поля перепишем выражение (1.1) с помощью парных корреляционных функций $\chi_{ij} = \sum_{\sigma} \langle f_{i\sigma}^+ f_{j\sigma} \rangle$ и $\Delta_{ij} = \langle f_{i\uparrow} f_{j\downarrow} - f_{i\downarrow} f_{j\uparrow} \rangle$, описывающих соответственно перескок между узлами i и j и спаривание в синглетном состоянии между фермионами, находящимися в этих узлах. Операторы, входящие в приведенные корреляционные функции, участвуют в факторизации $c_{i\sigma} = h_i^+ \Psi_{i\sigma}$ в i -м узле зарядовых и спиновых степеней свободы электронного оператора $c_{i\sigma}$ с помощью $SU(2)$ -дублетов [1]

$$\Psi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} f_{\uparrow} \\ f_{\uparrow}^+ \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} f_{\downarrow} \\ -f_{\downarrow}^+ \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Корреляционные функции χ_{ij} и Δ_{ij} можно найти из двух условий самосогласования. Эти функции определяют вклад двух слагаемых, находящихся под корнем выражения $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}$ для спектра возбуждений. Здесь $\xi_{\mathbf{k}}$ – энергия “нормальных” квазичастиц, $\Delta_{\mathbf{k}}$ – энергетическая щель как функция волнового вектора $\mathbf{k}$.

Матричная переменная

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} -\chi_{ij}^* & \Delta_{ij} \\ \Delta_{ij}^* & \chi_{ij} \end{pmatrix} = u_{ij}^{\pi(\text{sf})} e^{i\mathbf{a}_{ij}\boldsymbol{\sigma}}, \quad (1.3)$$

входящая в гамильтониан $SU(2)$ -калибровочной теории среднего поля $(t-J)$ -модели [1]

$$H_{\text{mean}} = \sum_{\langle ij \rangle} \frac{3}{8} J \left[\frac{1}{2} \text{Tr}(U_{ij}^+ U_{ij}) + (\Psi_i^+ U_{ij} \Psi_j + \text{э.с.}) \right] + \sum_i a_0^l \Psi_i^+ \tau^l \Psi_i, \quad (1.4)$$

зависит от распределения амплитуд $u^{\pi(\text{sf})}$ перескока и спаривания в фазе $u^{\pi(\text{sf})}$ с шахматным распределением потоков калибровочного поля a_{μ} и в фазе $u^{(\pi)}$ с потоком, равным π . В выражении (1.3) $\mathbf{a}_{ij}$ – векторный потенциал, определенный на звеньях

между соседними точками i и j решетки, а в выражении (1.4) τ^l – матрицы Паули, l – “изотопический” (цветовой) индекс.

Среди основных состояний, которые существуют [1] в рамках теории среднего поля, мы выделим фазовое состояние с альтерацией потоков $U(1)$ -калибровочного поля a_{ij} в шахматном порядке, когда

$$\begin{aligned} u_{i,i+x}^{\text{sf}} &= -\tau^3 \chi - i(-1)^{i_x+i_y} \Delta, \\ u_{i,i+y}^{\text{sf}} &= -\tau^3 \chi + i(-1)^{i_x+i_y} \Delta, \end{aligned} \quad (1.5)$$

и фазовое состояние с потоком, равным π , $SU(2)$ -калибровочного поля, когда

$$u_{i,i+x}^{\pi} = -i(-1)^{i_y} \chi, \quad u_{i,i+y}^{\pi} = -i\chi. \quad (1.6)$$

В этих выражениях χ и Δ – неизвестные константы, которые определяют значение двухкомпонентного параметра порядка, i_x и i_y – единичные орты в направлении x , y , соответственно.

Для состояния (1.6) эффективный лагранжиан, описывающий флуктуации калибровочных степеней свободы, который в случае массивных фермионов возникает после интегрирования в (1.4) по фермионам Ψ , совпадает с лагранжианом теории Янга–Миллса

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4g^2} \text{Tr} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

где $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu + [a_\mu, a_\nu]$ – напряженность калибровочного поля a_μ .

Чтобы описать фазовое состояние, описываемое амплитудами $u_{i,i+x}$, $u_{i,i+y}$ (1.5), удобно использовать в длиноволновом пределе двухкомпонентный параметр порядка $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$, компоненты которого имеют смысл амплитуд перескока и спаривания, и стандартный функционал Гинзбурга–Ландау

$$F = \int d^3x \left[\sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{2m_\alpha} \left| \left(\hbar \partial_k + i \frac{2e}{c} A_k \right) \phi_\alpha \right|^2 + \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi} + V(\phi_1, \phi_2) \right] \quad (1.8)$$

с потенциальной энергией

$$V(\phi_1, \phi_2) = \sum_{\alpha=1}^2 \left[-b_\alpha |\phi_\alpha|^2 + \frac{d_\alpha}{2} |\phi_\alpha|^4 \right] + c |\phi_1|^2 |\phi_2|^2 + f(\phi_1 \phi_2^* + \text{к.с.}) + h(\phi_1^2 \phi_2^{*2} + \text{к.с.}). \quad (1.9)$$

Соотношение между амплитудами перескока и спаривания можно представить с помощью единичного вектора $\mathbf{n} = \bar{\chi} \boldsymbol{\tau} \chi$, где $\boldsymbol{\tau}$ – матрицы Паули, а функции χ_α определены соотношениями

$$\phi_\alpha = \sqrt{2m_\alpha} \rho \chi_\alpha, \quad \chi_\alpha = |\chi_\alpha| e^{i\varphi_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad |\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = 1. \quad (1.10)$$

Свободная энергия Гинзбурга–Ландау (1.8) может быть представлена в терминах калибровочно-инвариантных переменных, поля единичного вектора $\mathbf{n}$, поля импульса $\mathbf{s} = \mathbf{J}/\rho^2 = \mathbf{a} - \mathbf{A}$, где $\mathbf{a} = i[\chi_1 \nabla \chi_1^* - \text{к.с.} + (1 \rightarrow 2)]$, и скалярной функции –

спиновой плотности ρ (поля спиновой жесткости) [2]

$$F = F_{\mathbf{n}} + F_{\rho} + F_{\mathbf{c}} + F_{\text{int}} = \int d^3x \left[\frac{1}{4} \rho^2 (\partial_k \mathbf{n})^2 + (\partial_k \rho)^2 + \frac{1}{16} \rho^2 \mathbf{c}^2 + (F_{ik} - H_{ik})^2 + V(\rho, n_1, n_3) \right]. \quad (1.11)$$

В этом выражении использованы безразмерные переменные и следующие обозначения: $F_{ik} = \partial_i c_k - \partial_k c_i$, $H_{ik} = \mathbf{n} \cdot [\partial_i \mathbf{n} \times \partial_k \mathbf{n}] = \partial_i a_k - \partial_k a_i$.

Поле единичного вектора $\mathbf{n}(x, y, z) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$ с компонентами n_1, n_2, n_3 , записанными в сферических координатах, связано с переменными ϕ_α в (1.8), (1.10) следующим образом: $|\chi_1| = \cos \vartheta/2$, $|\chi_2| = \sin \vartheta/2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. При $\vartheta = \pi/2$, когда $\mathbf{n} = (n_x, n_y, 0)$ и $|\chi_1| = |\chi_2| = 1/\sqrt{2}$, рассматриваемое фазовое состояние является сверхпроводящим [1]. Если $\vartheta \neq \pi/2$, то мы имеем дело с несверхпроводящим состоянием с потоками $U(1)$ -калибровочного поля, упорядоченными в шахматном порядке.

2. СТЕПЕНЬ НЕОДНОРОДНОСТИ ТОКОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим состояние, в котором $\rho = \text{const}$, $\vartheta \neq \pi/2$ и $\mathbf{c} = 0$. В этом случае свободная энергия (1.11) ограничена снизу [3], [4]:

$$F \geq 32\pi^2 |Q|^{3/4}. \quad (2.1)$$

Оценка снизу определяется значением инварианта Хопфа

$$Q = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ikl} a_i \partial_k a_l. \quad (2.2)$$

Пространство $\mathbb{R}^3$ с граничным условием $\mathbf{n}(\infty) = (0, 0, 1)$ эквивалентно сфере $\mathbb{S}^3$. Ее отображение в целевое пространство $\mathbb{S}^2$ с помощью поля единичного вектора $\mathbf{n}(x, y, z)$ нетривиально, так как гомотопическая группа $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ и $Q \in \mathbb{Z}$. Это означает, что все конфигурации поля $\mathbf{n}$ разбиваются на классы, соответствующие различным значениям инварианта Хопфа Q . Это целое число характеризует степень зацепления или заузленности квазиодномерных распределений поля $\mathbf{n}(x, y, z)$ в базовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Если $\mathbf{c} \neq 0$, то, как показано в работе [5],

$$F \geq 32\pi^2 |Q|^{3/4} \left(1 - \frac{|L|}{|Q|} \right)^2, \quad (2.3)$$

где

$$L = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ikl} c_i \partial_k a_l \quad (2.4)$$

является индексом взаимного зацепления распределений полей $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}$. Так как длина вектора $\mathbf{c}$ не фиксируется, то поле импульса принадлежит некомпактному многообразию. Поэтому в общем случае число L не является целым.

Из выражений (2.1)–(2.4) следует, что при достаточно малых значениях импульса $c < a$, $a \sim 1/\xi$, свободная энергия в токовом состоянии меньше, чем при $c = 0$. Здесь ξ – корреляционный масштаб. Он определяет, в частности, ширину нити в заузленных квазиодномерных конфигурациях. Корреляционная длина ξ равна нескольким постоянным решетки, т.е. составляет $10 \text{ \AA}$ по порядку величины.

Ограничение на амплитуду импульса c снизу можно получить, если сравнить выигрыш в свободной энергии (т.е. ее уменьшение) с проигрышем (т.е. с увеличением свободной энергии). Возрастание свободной энергии в состоянии с $c \neq 0$ связано как с собственной энергией тока $\rho^2 c^2$ и поверхностной энергией F_{ik}^2 , так и со слагаемым $\nabla \rho^2$ в общем случае, когда $\rho \neq \text{const}$. Оценки [6] дают ограничение $c > \alpha/\xi$ на величину импульса в состоянии, энергия которого меньше, чем при $c = 0$. Малый параметр $\alpha = \xi^2/R^2$, который возникает в этой существенно непертурбативной области, имеет геометрический смысл степени упаковки нитей в узле с характерным размером R . Он связан с параметром Гинзбурга–Ландау $\varkappa = \lambda/\xi$ соотношением $\alpha \sim \varkappa^{-2}$. Здесь λ – лондоновская длина. В этой оценке мы считали, что как характерный масштаб клубка R , так и длина нити в нем имеют порядок λ .

При $\alpha \ll 1$ в широком интервале $\alpha/\xi < c < 1/\xi$ значений импульса свободная энергия меньше, чем при $c = 0$. Однако параметр α не может быть слишком малым. Дело в том, что при $R/\xi > \sqrt{2}$ [4] узлы оказываются неустойчивыми относительно флуктуаций, приводящих к изменению масштаба клубка из нитей. Значение $\alpha = 1$ с геометрической точки зрения отвечает узлу с плотной упаковкой в нем нитей, в то время как значение $\alpha < 1$ соответствует рыхлой упаковке нитей в узле с образованием пустот. Верхняя граница $c = 1/\xi$ рассматриваемого интервала значений импульса означает физически, что при $\alpha = 1$ мы имеем дело с состоянием с более высокой степенью неоднородности. Ему отвечает больший импульс фермионных пар, участвующих в формировании сверхтока J , чем при $\alpha < 1$. Так как $R \sim 1/\rho$, где ρ – характерное значение амплитуды плотности, то значению $\alpha = 1$ параметра упаковки отвечает большее значение плотности ρ^2 . Поскольку спиновая плотность ρ^2 связана с плотностью ρ_h^2 вакантных мест (так называемых дырок) соотношением $\rho^2 + \rho_h^2 = 1$ [7], [1], то значениям $\alpha \rightarrow 1$ соответствует меньшие значения уровня допирования ρ_h^2 .

Сравним степень неоднородности в токовом состоянии с шахматным упорядочением распределения потоков $U(1)$ -калибровочного поля с $\alpha < 1$ и степень неоднородности в состоянии с потоком, равным π , $SU(2)$ -калибровочного поля, когда $\alpha \rightarrow 1$. Мы покажем, что последнее состояние является более неоднородным. Для этого запишем гамильтониан модели (1.7) в пределе длинных волн так, как это сделано в [8]. В терминах полей единичных векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ выражение для плотности гамильтониана имеет вид

$$H = \frac{1}{4} \{ F_{ik} - H_{ik} - n_3 K_{ik} - 2(b_k \partial_i n_3 - b_i \partial_k n_3) \}^2 + \\ + \frac{1}{2} (\partial_i \rho)^2 + \rho^2 (\nabla_k^{ij} n_j)^2 + \rho^2 c^2 + \frac{1}{8} \rho^4 n_3^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \mathbf{m})^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \rho^2 (n_+ Q_i^2 + n_- \bar{Q}_i^2 - n_3 \varepsilon_{ijk} m_j [F_{ik} - H_{ik} - n_3 K_{ik} - 2(b_k \partial_i n_3 - b_i \partial_k n_3)]). \quad (2.5)$$

В этом выражении использованы следующие обозначения:

$$K_{ij} = \mathbf{m}[\partial_i \mathbf{m} \times \partial_j \mathbf{m}] = \partial_i b_j - \partial_j b_i, \\ \nabla_k^{ij} = \delta^{ij} \partial_k + 2\varepsilon_{ijk} b_k, \quad n_{\pm} = n_1 \pm i n_2, \quad Q_k = i \mathbf{m} \partial_k \mathbf{e},$$

где $\mathbf{e}$ – единичный вектор.

Выигрыш в свободной энергии в выражении (2.3) и характерное значение импульса $\mathbf{c}$, при котором он достигается, полностью определяются вкладом слагаемого $-2F_{ik}H_{ik}$ в выражении (1.11). Из сравнения слагаемого в фигурных скобках в выражении (2.5) с его аналогом в выражении (1.11) следует, что характерные значения импульса $\mathbf{c}$ в рассматриваемом состоянии увеличиваются. Это означает, что состояние с потоком, равным π , $SU(2)$ -калибровочного поля является более неоднородным по сравнению с состоянием с упорядоченными в шахматном порядке потоками $U(1)$ -калибровочного поля. Этот вывод является одним из основных результатов настоящей работы.

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Замечание, сделанное в конце предыдущего раздела, справедливо в случае $n_3 \neq 0$. Мы предполагали также, что параметры рассматриваемого состояния таковы, что минимум потенциальной части в (1.11) при $n_1 = \text{const}$ отсутствует. Если $n_3 = 0$, то выражение в фигурных скобках в (2.5) совпадает с четвертым слагаемым подынтегрального выражения в (1.11). В этом случае сравнение степени неоднородности рассматриваемых состояний провести трудно. Напомним, что в модели (1.11) состояние с $n_3 = 0$ является сверхпроводящим [1].

Если $n_3 = 0$, то в точке самодуальности $F_{ik} = H_{ik}$, когда $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, выражение в фигурных скобках в выражении (2.5) обращается в нуль. Конечные значения компоненты n_3 единичного вектора $\mathbf{n}$ выводят систему из точки самодуальности. В модели (1.11) соотношение $F_{ik} = H_{ik}$ обращает слагаемое $(F_{ik} - H_{ik})^2$ в нуль в общем случае $n_3 \neq 0$. При $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ калибровочный потенциал $\mathbf{A}$ равен нулю, что имеет место в электрически нейтральных системах. Из неравенства $F \geq (F_n^{1/2} - F_c^{1/2})^2$ [5] (см. формулу (1.10)) следует, что в точке самодуальности $F_n = F_c$, $Q = L$, а минимальное значение энергии обращается в нуль.

Неабелево калибровочное поле в контексте рассматриваемых проблем играет вспомогательную роль: оно позволяет учесть ограничения на состояния в низкоэнергетическом секторе теории. Нулевая компонента a_0 $SU(2)$ -калибровочного поля a_μ в выражении (1.4) является множителем Лагранжа, а пространственные компоненты потенциала a_μ параметризуют фазу параметра порядка (1.3).

С точки зрения приложений вне теории конденсированного состояния, например, хромодинамических приложений, актуальной является группа $SU(3)$. Поиск геометрической интерпретации инварианта Хопфа Q и его обобщений на случай группы

с более высоким рангом представляет собой актуальную проблему. При увеличении ранга группы $SU(2)$ на единицу роль целевого пространства $F_1 = SU(2)/U(1) = CP^1 = \mathbb{S}^2$, на которое производит отображение единичный вектор $\mathbf{n}(x, y, z)$, играет пространство флагов [9] $F_2 = SU(3)/(U(1) \times U(1))$ или, как частный случай, комплексное проективное пространство $CP^2 = SU(3)/U(2) = SU(3)/(SU(2) \times U(1))$. Будучи однородным несимметричным компактным кэлеровым многообразием, пространство флагов реализуется как множество верхних треугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1 & w_2 \\ 0 & 1 & w_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Элементы этой матрицы параметризованы тремя комплексными функциями w_1, w_2, w_3 . В случае симметричного пространства CP^2 имеем $w_3 = 0$. Для сравнения напомним, что пространство CP^1 реализуется как множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

с $w = \operatorname{tg}(\vartheta/2)e^{-i\varphi}$, где ϑ и φ – параметризующие направление единичного вектора $\mathbf{n}$ углы сферической системы координат. Размерности пространств F_2, CP^2 равны соответственно $\dim_{F_2} = 8 - 2 = 6$ и $\dim_{CP^2} = 8 - 4 = 4$. Используемая в (2.1), (2.2) для пространства F_1 2-форма $H = da = (\mathbf{n}[d\mathbf{n} \times d\mathbf{n}])$ в случае пространства флагов заменяется 2-формой Кириллова в орбитной интерпретации этих пространств.

Одной из проблем является поиск аналога зацепляющихся линий. Таким аналогом могут служить прообразы циклов коразмерности 2 [10]. Прямому обобщению инварианта Хопфа мешает то, что 2-форма для пространства F_2 удовлетворяет условию $d\Omega = 0$, т.е. является замкнутой, но не является точной [11]. Это означает, что на пространстве флагов F_2 как на кэлеровом многообразии 1-форму, т.е. аналог калибровочного потенциала, можно ввести только локально [12]. Препятствием глобальному определению калибровочного потенциала является существование на пространстве F_2 особенностей – критических точек [13], связанных с обращением функций w_i в нуль [14]. Обнадеживающим фактом для пространства F_2 является то, что гомотопическая группа $\pi_3(F_2) = \mathbb{Z}$, как и $\pi_3(CP^1) = \mathbb{Z}$, нетривиальна, в то время как $\pi_3(CP^2) = 0$. Возможно, что использование результатов теории узлов в многомерных пространствах [15] поможет решить рассматриваемую проблему.

Благодарности. Мы выражаем глубокую благодарность П. Фулде, Г. Е. Воловику, Д. М. Дзедзисашвили, Ю. В. Копаеву, Л. Мартине, А. К. Погребкову и М. Спайт за обсуждения и полезные замечания. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 06-02-16561, 06-02-92052-КЭ_а) и программы РНП 2.1.1 (грант № 2369). Работа А. П. Протогенова частично поддержана программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”.

Список литературы

- [1] P. A. Lee, N. Nagaosa, X.-G. Wen, *Rev. Mod. Phys.*, **78** (2006), 17.
- [2] E. Babaev, L. D. Faddeev, A. J. Niemi, *Phys. Rev. B*, **65** (2002), 100512.
- [3] А. Ф. Вакуленко, Л. В. Капитанский, *ДАН*, **246** (1979), 840; A. Kundu, Yu. P. Rybakov, *J. Phys. A*, **15** (1982), 269.
- [4] R. S. Ward, *Nonlinearity*, **12** (1999), 241.
- [5] А. П. Протогенов, В. А. Вербус, *Письма в ЖЭТФ*, **76** (2002), 60.
- [6] А. П. Протогенов, В. А. Вербус, *ТМФ*, **144** (2005), 182.
- [7] L. B. Ioffe, P. B. Wiegmann, *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990), 653.
- [8] L. D. Faddeev, A. J. Niemi, *Phys. Lett. B*, **525** (2002), 195; Т. А. Болохов, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **139** (2004), 276.
- [9] R. F. Picken, *J. Math. Phys.*, **31** (1990), 616.
- [10] L. D. Faddeev, *Philos. T. Roy. Soc. London A*, **359** (2001), 1399.
- [11] D. Karabali, V. P. Nair, S. Randjbar-Daemi, “Fuzzy spaces, the M(atrix) model and the quantum Hall effect”, *From Fields to Strings*, Circumnavigating Theoretical Physics, v. 1, eds. M. Shifman, A. Vainshtein, J. Wheeler, World Scientific, Singapore, 2005, 831; [hep-th/0407007](#).
- [12] K.-I. Kondo, Y. Taira, *Progr. Theor. Phys.*, **104** (2000), 1189.
- [13] R. F. Picken, *J. Math. Phys.*, **31** (1990), 616.
- [14] M. Atiyah, E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **6** (2002), 1; [hep-th/0107177](#).
- [15] A. Ranicki, *High-dimensional Knot Theory. Algebraic Surgery in Codimension 2*, Springer Monogr. Math., Springer, New York, 1998.