Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Розенхаус, О бесконечном множестве законов сохранения для бесконечномерных симметрий, *ТМФ*, 2007, том 151, номер 3, 518–528

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6064>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:30:35

О БЕСКОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СИММЕТРИЙ

Рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных, которые соответствуют вариационной задаче, допускающей бесконечномерные алгебры симметрий Ли, параметризованные произвольными функциями независимых переменных и их производных. Показано, что в отличие от дифференциальных систем с алгебрами симметрий, параметризованными произвольными функциями независимых переменных, эти уравнения обладают бесконечным множеством существенных законов сохранения.

Ключевые слова: бесконечномерные симметрии, законы сохранения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование связи между группами вариационных симметрий и законами сохранения имеет длинную историю, восходящую к классическим результатам Нётер [1] (см. также [2]). Много работ было написано в области r -параметрических групп симметрий Ли, среди которых мы упомянем лишь несколько относительно недавних (см., например, [3]–[14], а также [15]). Однако бесконечномерные алгебры симметрий и соответствующие им законы сохранения были исследованы значительно меньше. Согласно второй теореме Нётер [1] бесконечномерные вариационные симметрии с произвольными функциями от всех независимых переменных задачи приводят не к законам сохранения, а к определенным соотношениям между уравнениями исходной дифференциальной системы (это означает, что система является недоопределенной). Было показано, что бесконечномерные вариационные симметрии с произвольными функциями от не всех независимых переменных задачи приводят к конечному числу существенных локальных законов сохранения [16], соответствующих различным граничным условиям (см. [17]–[20]).

В настоящей работе рассматривается задача, которая до сих пор по ряду причин непосредственно не обсуждалась в литературе. Исследуются существенные законы

*Department of Mathematics and Statistics, California State University, Chico, CA 95929, USA. E-mail: vrosenhaus@csuchico.edu

сохранения, соответствующие бесконечномерным вариационным симметриям с произвольными функциями от независимых переменных и их производных. Мы будем следовать идеологии работ [16] и [20] и покажем, что, в отличие от случая произвольных функций независимых переменных, такие симметрии порождают бесконечное множество существенных локальных законов сохранения. В настоящей работе рассматривается задача нахождения всех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, допускающих бесконечномерные вариационные симметрии с произвольными функциями от зависимой переменной u ($u = u(x, t)$), а также соответствующая задача для случая бесконечномерных симметрий с произвольными функциями от производных u_x и u_t . Даны примеры классов таких систем и соответствующие сохраняющиеся величины.

2. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ СИММЕТРИИ И СУЩЕСТВЕННЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Опишем кратко используемый подход (более подробно см. [16]). Под законом сохранения для дифференциальной системы

$$\omega^a(x, u, u_i, \dots) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m+1, \quad a = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_i^a \equiv \frac{\partial u^a}{\partial x^i}, \quad x^i = (x^1, x^2, \dots, x^m, t),$$

понимается уравнение непрерывности

$$D_i K_i \doteq 0, \quad K_i = K_i(x, u, u_j, \dots), \quad i, j = 1, 2, \dots, m+1,$$

где K_i – гладкие функции, которое выполнено для любых решений исходной системы. Каждый закон сохранения определен с точностью до преобразования эквивалентности $K_i \rightarrow K_i + P_i$, $D_i P_i \doteq 0$ (см. [2]). Два закона сохранения принадлежат одному классу эквивалентности, если они отличаются на тривиальный закон сохранения. Для тривиального закона сохранения компоненты вектора K_i обращаются в нуль на решениях: $K_i \doteq 0$, $i = 1, 2, \dots, m+1$, или уравнение непрерывности выполняется во всем пространстве: $D_i K_i = 0$. Это тривиальные законы соответственно первого и второго типов [2] (тривиальность второго типа может быть элегантно сформулирована в терминах замкнутых дифференциальных форм, см., например, [21]).

Под *существенным* законом сохранения [16] понимается такой нетривиальный закон сохранения $D_i K_i \doteq 0$, который порождает ненулевую сохраняющуюся величину

$$D_t \int_D K_t dx^1 dx^2 \dots dx^m \doteq 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^{m+1}, \quad K_t \not\equiv 0. \quad (1)$$

Рассмотрим функции $u = u(x)$, определенные в области D $(m+1)$ -мерного пространства-времени. Пусть

$$S = \int_D L(x^i, u^a, u_i^a, \dots) d^{m+1}x$$

– функционал действия, где L – плотность функции Лагранжа (лагранжиан). Тогда уравнения движения имеют вид

$$E^a(L) \equiv \omega^a(x, u, u_i, u_{ij}, \dots) = 0, \quad a = 1, 2, \dots, n, \quad i, j = 1, 2, \dots, m+1, \quad (2)$$

где E – оператор Эйлера–Лагранжа

$$E^a = \frac{\partial}{\partial u^a} - \sum_i D_i \frac{\partial}{\partial u_i^a} + \sum_{i \leq j} D_i D_j \frac{\partial}{\partial u_{ij}^a} + \dots \quad (3)$$

Рассмотрим инфинитезимальное преобразование с каноническим оператором

$$X_\alpha = \alpha^a \frac{\partial}{\partial u^a} + \sum_i (D_i \alpha^a) \frac{\partial}{\partial u_i^a} + \sum_{i \leq j} (D_i D_j \alpha^a) \frac{\partial}{\partial u_{ij}^a} + \dots, \quad (4)$$

$$\alpha^a = \alpha^a(x, u, u_i, \dots), \quad i, j = 1, 2, \dots, m+1, \quad a = 1, 2, \dots, n.$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Вариация функционала S при преобразовании под действием оператора X_α есть

$$\delta S = \int_D X_\alpha L d^{m+1}x. \quad (5)$$

Преобразование X_α является вариационной (нётеровой) симметрией, если

$$X_\alpha L = D_i M_i, \quad M_i = M_i(x, u, u_i, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, m+1, \quad (6)$$

где M_i – гладкие функции. В дальнейшем нам понадобится тождество Нётер [22] (см. также в [15] или [11] используемый здесь вариант тождества):

$$X_\alpha = \alpha^a E^a + D_i R_{\alpha i}, \quad i = 1, 2, \dots, m+1, \quad a = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

$$R_{\alpha i} = \alpha^a \frac{\partial}{\partial u_i^a} + \left\{ \sum_{k \geq i} (D_k \alpha^a) - \alpha^a \sum_{k \leq i} D_k \right\} \frac{\partial}{\partial u_{ik}^a} + \dots \quad (8)$$

Применяя тождество Нётер (7) вместе с равенством (8) к лагранжиану L и объединяя полученное выражение с условием (6), имеем

$$D_i(M_i - R_{\alpha i}L) = \alpha^a \omega^a, \quad i = 1, 2, \dots, m+1, \quad a = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Уравнение (9), примененное на многообразии решений ($\omega = 0$, $D_i \omega = 0, \dots$), дает уравнение непрерывности

$$D_i(M_i - R_{\alpha i}L) \doteq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m+1. \quad (10)$$

Таким образом, любое однопараметрическое вариационное преобразование симметрии X_α (4) приводит к закону сохранения (10) (первая теорема Нётер) с характеристикой α . Вторая теорема Нётер [1] относится к случаю бесконечномерных групп вариационной симметрии, когда вектор симметрии α имеет вид

$$\alpha = ap(x) + b_i D_i p(x) + c_{ij} D_i D_j p(x) + \dots, \quad (11)$$

где $p(x)$ – произвольная гладкая функция всех основных переменных пространства. Общий случай, когда $p(x)$ является произвольной функцией, зависящей не от всех базисных переменных, был исследован в работе [16]. Для нётерова преобразования симметрии X_α имеем

$$\delta S = \int_D \delta L d^{m+1}x = \int_D X_\alpha L d^{m+1}x = \int_D D_i M_i d^{m+1}x = 0, \quad x \in D. \quad (12)$$

Поэтому функции M_i должны удовлетворять следующим условиям [16] (нётеровы граничные условия):

$$M_i(x, u, \dots) \Big|_{x^i \rightarrow \partial D} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m+1. \quad (13)$$

Условия (13) обычно выполнены в случае *регулярного* асимптотического поведения $u, u_i \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, или в случае периодических решений.

Рассмотрим теперь другой тип граничных условий, связанных с существованием локальных сохраняющихся величин. Интегрируя уравнение (10) по пространству $(x^1, x^2, \dots, x^m)$, получаем

$$\int_D dx^1 dx^2 \dots dx^m D_t(M_t - R_{\alpha t}L) \doteq \int_D dx^1 \dots dx^m \sum_{i=1}^m D_i(R_{\alpha i}L - M_i). \quad (14)$$

Применяя нётеровы граничные условия (13) и требуя, чтобы левая часть равенства (14) обращалась в нуль на многообразии решений, получаем *строгие* граничные условия [16]:

$$R_{\alpha 1}L \Big|_{x^1 \rightarrow \partial D} = R_{\alpha 2}L \Big|_{x^2 \rightarrow \partial D} = \dots = R_{\alpha m}L \Big|_{x^m \rightarrow \partial D} = 0. \quad (15)$$

В случае $L = L(x, u, u_i)$ эти граничные условия принимают простой вид:

$$\alpha \frac{\partial L}{\partial u_l} \Big|_{x^l \rightarrow \partial D} = 0 \quad \forall l = 1, 2, \dots, m. \quad (16)$$

3. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим случай бесконечномерных симметрий, генераторы которых содержат произвольные гладкие функции f зависимых переменных и их производные:

$$X_\alpha L = D_i M_i, \quad \alpha = f(u, u_k, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, m+1. \quad (17)$$

Закон сохранения (10) имеет вид

$$D_l(M_l - R_{\alpha l}L) + D_t(M_t - R_{\alpha t}L) \doteq 0, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} M_i &= A_i f(u, u_k, \dots) + B_{is} D_s f(u, u_k, \dots) + \dots, \\ R_{\alpha l} L &= P_l f(u, u_k, \dots) + Q_{ls} D_s f(u, u_k, \dots) + \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

а индекс s нумерует аргументы функции $f(u, u_k, \dots)$.

Чтобы система обладала (нётеровыми) локальными сохраняющимися величинами, должны выполняться как нётеровы (13), так и строгие (15) граничные условия. Пусть $f(u, u_k, \dots) = f(\xi(u, u_k, \dots))$. Для случая регулярных граничных условий на бесконечности

$$u \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad u_i \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 \quad (20)$$

нётеровы граничные условия принимают вид

$$M_i(f(\xi(0, \dots, 0)), f'(\xi(0, \dots, 0)), \dots) - \\ - M_i(f(\xi(0, \dots, 0)), f'(\xi(0, \dots, 0)), \dots) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m+1. \quad (21)$$

Условия (21) выполняются для любой гладкой функции f и

$$|\xi(0, 0, \dots, 0)| < \infty. \quad (22)$$

Легко видеть, что если имеют место ограничения (22), то строгие граничные условия (15) также выполнены.

Таким образом, в отличие от случая произвольных функций независимых переменных [16], в случае бесконечномерных симметрий с произвольными функциями зависимых переменных $\alpha = f(u, u_k, \dots)$ нет серьезных ограничений на функции f , необходимых для того, чтобы эти функции приводили к локальным законам сохранения. При этом уравнение непрерывности (18) дает бесконечное число существенных законов сохранения [20]. Соответствующие нётеровы сохраняющиеся величины могут быть найдены в виде

$$D_t \int dx^1 dx^2 \dots dx^m (M_t - R_{\alpha t} L) \doteq 0. \quad (23)$$

4. АЛГЕБРЫ СИММЕТРИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ $f(u)$

Начнем с класса уравнений, допускающих бесконечномерные вариационные симметрии с произвольной функцией $f(u)$:

$$\alpha = pf(u) + qf'(u) + rf''(u), \quad (24)$$

где $p, q, r = g_j(x, t, u, u_x, u_t)$, $j = 1, 2, 3$, и будем искать уравнения, соответствующие лагранжианам первого порядка $L = L(u, u_x, u_t)$. Требуя, чтобы преобразование X_α являлось вариационной симметрией

$$X_\alpha L = D_x M_x + D_t M_t, \\ M_x = Af(u) + Bf'(u) + Cf''(u), \\ M_t = Ef(u) + Ff'(u) + Gf''(u), \quad (25)$$

$A, B, C, E, F, G = h_j(x, t, u, u_x, u_t)$, получаем следующие ограничения ($u_x \equiv z$, $u_t \equiv w$):

$$\begin{aligned} C &= G = r = 0, \\ q(zL_z + wL_w) &= zB + wF; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} q_z L_z &= B_z, \\ q_w L_w &= F_w, \\ q_z L_w + q_w L_z &= B_w + F_z, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} qL_u + (q_x + q_u z)L_z + (q_t + q_u w)L_w + p(zL_z + wL_w) &= \\ = B_x + zB_u + F_t + wF_u + Az + Ew; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_z L_z &= A_z, \\ p_w L_w &= E_w, \\ p_z L_w + p_w L_z &= A_w + E_z, \end{aligned} \quad (28)$$

$$pL_u + (p_x + p_u z)L_z + (p_t + p_u w)L_w = A_x + zA_u + E_t + wE_u.$$

Из условий (26) и (27) получаем

$$w^2 L_{ww} + 2wz L_{zw} + z^2 L_{zz} = 0. \quad (29)$$

Поэтому лагранжиан L принимает вид

$$L = R\left(\frac{u_x}{u_t}, u\right) + u_t S\left(\frac{u_x}{u_t}, u\right), \quad (30)$$

где R и S – произвольные функции, а другие неизвестные функции могут быть определены из условий (26)–(28).

Таким образом, любые уравнения, соответствующие лагранжиану вида (30), обладают бесконечным числом существенных законов сохранения, которые даются выражением (18).

Интересно отметить, что простейший частный случай лагранжиана класса (30) $L = P(u_x/u_t)$ с произвольной функцией P , соответствующий симметрии $\alpha = f(u)$, может быть сведен к уравнению типа Хопфа

$$v_x - v_t \left(v + \frac{2P'(v)}{P''(v)} \right) = 0, \quad P''(v) \neq 0, \quad (31)$$

с помощью преобразования¹⁾ $v = u_x/u_t$.

5. АЛГЕБРЫ СИММЕТРИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПРОИЗВОДНЫХ u_x, u_t

Рассмотрим теперь класс уравнений, допускающих бесконечномерные вариационные симметрии с произвольной функцией $f(u_x, u_t)$:

$$\alpha = pf(\xi) + qf'(\xi) + rf''(\xi), \quad \xi = \xi(u_x, u_t) = \xi(z, w), \quad (32)$$

¹⁾ Автор выражает благодарность рецензенту за его замечание по поводу использования этих преобразований.

где $p, q, r = g_j(x, t, u, u_x, u_t)$. Как и ранее, будем искать уравнения, соответствующие лагранжианам первого порядка $L = L(u, u_x, u_t)$. Требуя, чтобы преобразование X_α являлось вариационной симметрией:

$$\begin{aligned} X_\alpha L &= D_x M_x + D_t M_t, \\ M_x &= A f(\xi) + B f'(\xi) + C f''(\xi), \\ M_t &= E f(\xi) + F f'(\xi) + G f''(\xi), \end{aligned} \quad (33)$$

$A, B, C, E, F, G = h_j(x, t, u, u_x, u_t)$, и используя то обстоятельство, что функция $f(\xi)$ произвольна, получаем следующие ограничения:

$$\begin{aligned} C &= r L_z, & G &= r L_w, & C \xi_w + G \xi_z &= r(\xi_w L_z + \xi_z L_w), \\ \xi_z(q L_z - B) &= r L_{zz}, & \xi_w(q L_w - F) &= r L_{ww}, \\ q(\xi_z L_w + \xi_w L_z) &= B \xi_w + F \xi_z + 2r L_{zw}; \end{aligned} \quad (34)$$

$$r L_u - r z L_{uz} - r w L_{uw} = 0; \quad (35)$$

$$\begin{aligned} q_z L_z + p \xi_z L_z &= B_z + A \xi_z, \\ q_w L_w + p \xi_w L_w &= F_w + E \xi_w, \\ q_z L_w + q_w L_z + p(\xi_w L_z + \xi_z L_w) &= B_w + A \xi_w + F_z + E \xi_z, \\ q L_u + (q_x + q_u z) L_z + (q_t + q_u w) L_w &= B_x + z B_u + F_t + w F_u \end{aligned} \quad (36)$$

и уравнения (28) для функции p . Решая систему (34)–(36) и (28) в общем случае $\xi_z \neq 0$, $\xi_w \neq 0$, получаем

$$L = u_t \phi\left(\frac{u_x}{u_t}, u\right), \quad (37)$$

$$L = \psi(u_x, u_t), \quad (38)$$

где функции ϕ, ψ произвольные, а функция $\xi(z, w)$ удовлетворяет уравнению

$$\xi_w^2 L_{zz} - 2r \xi_w \xi_z L_{zw} + \xi_z^2 L_{ww} = 0. \quad (39)$$

Существование вещественных решений для ξ обеспечивается выполнением условия

$$L_{zw}^2 - L_{zz} L_{ww} \geq 0. \quad (40)$$

Интересно отметить, что для любых уравнений с лагранжианами класса (37) $L_{zw}^2 - L_{zz} L_{ww} = 0$, и функции $\xi = L_w$ или $\xi = L_z$ являются решениями.

Таким образом, любые уравнения, соответствующие лагранжианам (37) в случае произвольной функции ϕ , обладают бесконечным числом существенных законов сохранения. Следовательно, любые уравнения, соответствующие лагранжианам (38) и функции ψ , удовлетворяющей условию (40), также обладают бесконечным числом существенных законов сохранения. Заметим, что само по себе существование бесконечно большого количества законов сохранения для лагранжианов (38) не удивительно, если принять во внимание возможность линеаризации соответствующих

уравнений посредством преобразований годографа (см., например, [23]). Интересным примером уравнения с лагранжианом класса (38) является уравнение Борна–Инфельда

$$(1 - u_t^2)u_{xx} + 2u_t u_x u_{xt} - (1 + u_x^2)u_{tt} = 0, \quad (41)$$

соответствующее лагранжиану

$$L = (1 + u_x^2 - u_t^2)^{1/2}. \quad (42)$$

Здесь условие (40) выполнено автоматически для любых решений с $L > 0$. Бесконечное множество законов сохранения для уравнения Борна–Инфельда (41) и связь этих законов с бесконечномерной группой контактных преобразований уравнения исследовались в работе [24].

В сингулярном случае $\xi_w = 0$ имеем

$$\alpha = pf(u_x) + qf'(u_x) + rf''(u_x). \quad (43)$$

Решая систему (40)–(42), (28), получаем

$$L = u_t g(u_x) + V(u_x), \quad g' \neq 0, \quad (44)$$

с некоторыми ограничениями на функции g, V .

Рассмотрим следующие случаи.

1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} g(u_x) &\neq \frac{k}{u_x + c}, \quad k, c = \text{const}, \quad p - q' + r'' \neq 0, \\ V''(3g''g^{(4)} - 4(g''')^2) + 2V'''(2g''g''' - g'g^{(4)}) + V^{(4)}(2g'g''' - 3(g'')^2) &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Одно из решений системы (45) имеет вид $g = V/b$, $b = \text{const}$, что приводит к лагранжиану

$$L = u_t V(u_x) + bV(u_x), \quad V(u_x) \neq \frac{k}{u_x + c}, \quad (46)$$

с произвольной функцией $V(u_x)$. Примером из этого класса является лагранжиан

$$L = u_t e^{au_x}, \quad a = \text{const}, \quad (47)$$

а соответствующее уравнение имеет вид

$$2u_{xt} + au_t u_{xx} = 0. \quad (48)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \alpha &= a^2 f(u_x) + 2af'(u_x) + f''(u_x), \\ M_x &= a^2 u_t e^{au_x} f'(u_x) + au_t e^{au_x} f''(u_x), \quad M_t = e^{au_x} f''(u_x), \\ R_{\alpha x} L &= \alpha a u_t e^{au_x}, \quad R_{\alpha t} L = \alpha a e^{au_x}, \end{aligned} \quad (49)$$

где $f(u_x)$ – произвольная функция. В случае регулярных граничных условий

$$u, u_x, u_t \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad u, u_x, u_t \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0 \quad (50)$$

для любой функции $f(u_x) \in C^2$ выполняются как нётеровы, так и строгие граничные условия (13), (16). Таким образом, уравнение (48) обладает бесконечным множеством существенных законов сохранения

$$D_x(-au_t(af(u_x) + 2f'(u_x))e^{au_x}) + D_t((af(u_x) + 2f'(u_x))e^{au_x}) \doteq 0 \quad (51)$$

с произвольной функцией $f(u_x) \in C^2$, $f(u_x) \neq e^{-au_x/2}$.

2. В случае

$$g(u_x) = \frac{k}{u_x + c}, \quad k, c = \text{const},$$

все уравнения, соответствующие лагранжианам

$$L = \frac{u_t}{u_x + c} + V(u_x), \quad (52)$$

где $V(u_x)$ – произвольная функция, обладают бесконечным числом законов сохранения.

3. Такое же утверждение справедливо для класса

$$L = ku_x u_t + V(u_x), \quad p - q' + r'' = 0, \quad g'' = 0, \quad (53)$$

с произвольным потенциалом $V(u_x)$.

4. Наконец, для класса

$$p - q' + r'' = 0, \quad g''' = V^{(4)} = 0, \quad (54)$$

получаем лагранжиан

$$L = \frac{su_x^2 u_t}{6} - \frac{\varepsilon u_x u_t}{2} + \frac{nu_x^3}{6} + vu_x^2, \quad (55)$$

где s, ε, n, v – константы, и соответствующее уравнение

$$\frac{s}{3}(u_t u_{xx} + 2u_x u_{xt}) - \varepsilon u_{xt} + nu_x u_{xx} + 2vu_{xx} = 0. \quad (56)$$

Нётеровы и строгие граничные условия (13), (16) здесь имеют вид (50). Таким образом, уравнение (56) обладает бесконечным множеством существенных законов сохранения

$$D_x \left[nf(u_x) - \left(\frac{su_t}{3} + nu_x + 2v \right) f'(u_x) \right] + D_t \left[sf(u_x) + \left(\varepsilon - \frac{2su_x}{3} \right) f'(u_x) \right] \doteq 0 \quad (57)$$

с произвольной функцией $f(u_x) \in C^2$, $f(u_x) \neq (2su_x - 3\varepsilon)^{3/2}$. Для соответствующей сохраняющейся величины имеем

$$D_t \int \left(sf(u_x) + \left(\varepsilon - \frac{2su_x}{3} \right) f'(u_x) \right) dx \doteq 0. \quad (58)$$

В частном случае $s = v = 0$, $\varepsilon = n = -1$ получаем

$$L = \frac{u_x u_t}{2} - \frac{u_x^3}{6}. \quad (59)$$

Уравнение

$$u_{xt} - u_x u_{xx} = 0 \quad (60)$$

инвариантно относительно бесконечномерной алгебры симметрий с $\alpha = f''(u_x)$ и обладает бесконечным множеством существенных законов сохранения с произвольной функцией $f \in C^2$

$$D_t \int f'(u_x) dx \doteq 0. \quad (61)$$

При $v = u_x$ уравнение (60) принимает вид уравнения одномерной газодинамики или уравнения Эйлера

$$v_t = vv_x \quad (62)$$

в случае, когда $p_x = 0$, где p – давление (см., например, [25]). Это уравнение представляет собой также частный случай уравнения Бюргерса $v_t + vv_x = \nu v_{xx}$ при $\nu \rightarrow 0$, где ν – коэффициент диффузии [23].

Отметим, что наличие произвольных функций зависимых переменных в генераторах группы (псевдогруппы) симметрий – не такое уж редко встречающееся явление. Например, нетрудно видеть, что для уравнений Максвелла с функционалом действия

$$S = \iint F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x, \quad (63)$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}, \quad A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4,$$

вариационное преобразование симметрии

$$X_\alpha = \alpha^\mu \frac{\partial}{\partial A^\mu} + \sum_{\mu,\nu} (D_\nu \alpha^\mu) \frac{\partial}{\partial A^\mu_{,\nu}} + \dots$$

принимает вид [26]

$$\alpha^\mu = D_\mu \phi(x, A, A_{,\nu}, \dots), \quad D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + A^\nu_{,\mu} \frac{\partial}{\partial A^\nu} + \dots, \quad (64)$$

где ϕ – произвольная функция всех переменных x^ν , а также 4-потенциалов A^μ и их производных. Выражение (64) является обобщенным видом калибровочного (градиентного) преобразования в данном случае. Аналогично локальное калибровочное преобразование для уравнений Янга–Миллса (неабелев случай) тоже может быть обобщено так, чтобы включать произвольные функции ϕ потенциалов A и их производных (а также независимых переменных): $\phi = \phi(x, A, A_{,\nu}, \dots)$ [26]. Однако в этом случае вследствие присутствия произвольных функций от всех независимых переменных задачи такие бесконечномерные симметрии не порождают законов сохранения согласно второй теореме Нётер.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отличие от бесконечномерных симметрий с произвольными функциями (не всех) независимых переменных, которые порождают конечное число существенных

законов сохранения, бесконечномерные симметрии с произвольными функциями от зависимых переменных и их производных приводят к бесконечному числу существенных законов сохранения. Существование бесконечного множества существенных законов сохранения было показано для ряда классов дифференциальных уравнений с лагранжианами (30), (37), (38), (46), (52), (53), (55).

Благодарности. Автор выражает благодарность М. В. Павлову за полезные обсуждения, касающиеся лагранжианов вида (38).

Список литературы

- [1] Э. Нетер, “Инвариантные вариационные задачи”, *Вариационные принципы механики*, Физматлит, М., 1959, 604–630.
- [2] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [3] J. Hanc, S. Tuleja, M. Hancova, *Amer. J. Phys.*, **72** (2004), 428–435.
- [4] N. H. Ibragimov, T. Kolsrud, *Nonlinear Dynam.*, **36** (2004), 29–40.
- [5] A. H. Kara, F. M. Mahomed, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **9** (2002), 60–72.
- [6] S. C. Anco, G. Bluman, *European J. Appl. Math.*, **13** (2002), 545–566; 567–585.
- [7] T. Wolf, *European J. Appl. Math.*, **13** (2002), 129–152.
- [8] A. H. Kara, F. M. Mahomed, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **39** (2000), 23–40.
- [9] I. M. Anderson, J. Pohjanpelto, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **120** (1996), 369–384.
- [10] А. Г. Мешков, *Изв. вузов. Сер. физ.*, **38** (1995), 9–14.
- [11] V. Rosenhaus, G. H. Katzin, *J. Math. Phys.*, **35** (1994), 1998–2012.
- [12] A. M. Vinogradov (ed.), *Symmetries of partial differential equations. Conservation Laws–Applications–Algorithms*, Part I, II, III., Springer, Dordrecht, 1989.
- [13] A. M. Vinogradov, *Acta Appl. Math.*, **2** (1984), 21–78.
- [14] R. Jackiw, N. S. Manton, *Ann. Phys.*, **127** (1980), 257–273.
- [15] N. H. Ibragimov (ed.), *Lie Group Analysis of Differential Equations*, vols. 1–3, CRC, Boca Raton, FL, 1994; 1995; 1996.
- [16] V. Rosenhaus, *J. Math. Phys.*, **43** (2002), 6129–6150.
- [17] V. Rosenhaus, *J. Dyn. Sys. Geom. Theor.*, **1** (2002), 95–107.
- [18] V. Rosenhaus, “On infinite symmetries and essential conservation laws for Navier–Stokes equations”, *GROUP 24. Physical and Mathematical Aspects of Symmetries*, Proc. XXIV Intern. Colloq. Group Theor. Methods in Physics (Paris, 2002), IOP Conf. Ser., **173**, eds. J.-P. Gazeau et al., IOP Publ., Bristol, 2003, 737–740.
- [19] V. Rosenhaus, *Rep. Math. Phys.*, **51** (2003), 71–86.
- [20] В. Розенхаус, *ТМФ*, **144** (2005), 190–198.
- [21] В. В. Жаринов, “Low-dimensional conservation laws of PDE”, *Избранные вопросы математической физики и анализа*, Тр. МИАН, **203**, 1994, 478–493.
- [22] J. Rosen, *Some Properties of the Euler–Lagrange Operators*, Preprint TAUP-269-72, Tel Aviv Univ., Tel Aviv, 1972.
- [23] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977.
- [24] M. Koiv, V. Rosenhaus, *Algebras Groups Geom.*, **3** (1986), 167–198.
- [25] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Вып. 6. Гидродинамика*, Наука, Физматлит, М., 1986.
- [26] K. Kiirani, V. Rosenhaus, *J. Phys. A*, **21** (1988), L681–L684.