Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Кэррол, Флуктуации метрики, энтропия и уравнение
Уилера–Де Витта, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 1, 32–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6068>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:43:41

© 2007 г.

Р. Кэрролл*

ФЛУКТУАЦИИ МЕТРИКИ, ЭНТРОПИЯ И УРАВНЕНИЕ УИЛЕРА–ДЕ ВИТТА

Квантование с помощью квантовых потенциалов описывается через флуктуации импульса, и это связано с информацией Фишера и энтропией.

Ключевые слова: информация, энтропия, гравитация, квантовая механика.

1. ВВЕДЕНИЕ

Точный принцип неопределенности был провозглашен в работах [1]–[4] (см. также [5]–[9]) в виде $\Delta x \Delta p \geq \delta x \Delta p \geq \delta x \Delta p_{\text{nc}} = \hbar/2$ (где $p \sim \nabla S + p_{\text{nc}}$, а Δ – вариация). Таким образом, мы имеем формулу для $p_{\text{nc}} \sim \delta p \sim c \nabla \rho / \rho$, где $\rho = |\psi|^2$. В свою очередь это приводит к квантовому потенциалу (КП) $Q = -(\hbar^2/2)(\nabla^2 \sqrt{\rho}/\sqrt{\rho})$ стандартного вида. Мы проводим рассуждения в обратном направлении и замечаем, что любое квантование с помощью КП, как указано выше, отождествляется с квантованием, достигаемым посредством $\delta p \sim c \nabla \ln \rho$ (теорема 2.1). Далее мы развиваем аналогичную, но более сложную процедуру для знаменитого уравнения Уилера–Де Витта (УДВ), которое в течение многих лет являлось краеугольным камнем в геометрических исследованиях и которое, как представляется, играет важную роль в различных походах к квантовой гравитации (см., например, [6], [10]–[16]). Приложения точного принципа неопределенности к уравнению УДВ были приведены в работе [2]; в настоящей работе мы снова показываем (по необходимости используя другую аргументацию), каким образом эту процедуру можно обратить и получить всякое квантование вида (2.15) с использованием Q , возникающего из флуктуаций импульса, как в (2.13) (теорема 2.2). На эвристическом уровне мы далее получаем связь с энтропией, как в теореме 3.1. Имеются и другие виды связей с энтропией [7], которые мы обсуждаем в работе [17]. Предлагаемые формулы с использованием переменных Апштекарка носят, главным образом, эвристический характер.

*Department of Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1409 W. Green Street, Urbana, Illinois 61801-2975, USA. E-mail: rcarroll@math.uiuc.edu

2. ИНФОРМАЦИЯ И УРАВНЕНИЕ УДВ

В работах [18], следуя [1]–[4], [6], мы кратко описали некоторые эвристические результаты, касающиеся уравнения УДВ и точного принципа неопределенности. Следуя, главным образом, работам [1]–[3], зададим информацию Фишера с помощью уравнения

$$F_x = \int dx P(x) [\partial_x \ln(P(x))]^2,$$

где $P(x)$ – плотность вероятности для одномерной наблюдаемой x , а длину Фишера определим как $\delta x = F_x^{-1/2}$. Согласно неравенству Крамера–Рао, $\text{Var}(x) \geq F_x^{-1}$ или просто $\Delta x \geq \delta x$. В квантовом случае при $P(x) = |\psi(x)|^2$ и ψ , удовлетворяющей уравнению Шредингера (УШ), немедленно находим

$$F_x = \int dx |\psi|^2 \left[\frac{\psi'}{\psi} + \frac{\bar{\psi}'}{\bar{\psi}} \right]^2 dx = \frac{4}{\hbar^2} [\langle p^2 \rangle_\psi - \langle p_{\text{cl}} \rangle_\psi^2], \quad (2.1)$$

где $p_{\text{cl}} = (\hbar/2i)[(\psi'/\psi) - (\bar{\psi}'/\bar{\psi})]$ – наблюдаемая классического импульса, сопряженного x (p_{cl} пропорциональна S_x при $\psi = Re^{iS/\hbar}$). Теперь, полагая $p = p_{\text{cl}} + p_{\text{nc}}$, после некоторых вычислений получаем равенство $F_x = (4/\hbar^2)(\Delta p_{\text{nc}})^2 = 1/(\delta x)^2$, или, эквивалентно, $\delta x \Delta p_{\text{nc}} = \hbar/2$ в качестве соотношения между неклассичностью и информацией Фишера. Заметим, что из УШ следует, что $\langle p \rangle_\psi = \langle p_{\text{cl}} \rangle_\psi$, $\partial_t |\psi|^2 + \partial_x [|\psi|^2 m^{-1} p_{\text{cl}}] = 0$, при этом $(\Delta x)(\Delta p) \geq (\delta x)(\Delta p) \geq (\delta x)(\Delta p_{\text{nc}})$.

Напомним также, что согласно уравнению (2.1) F_x пропорциональна разности квантовой и классической кинетических энергий. Таким образом,

$$\frac{\hbar^2}{4} F_x \left(\frac{1}{2m} \right) = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle_\psi - \frac{1}{2m} \langle p_{\text{cl}} \rangle_\psi^2,$$

так что $E_F = (\hbar^2/8m)F_x$ прибавляется к E_{cl} и получается E_q . В соответствии с теорией Де Бройля–Боме КП задается формулой

$$Q = \frac{\hbar^2}{8m} \left[\left(\frac{P'}{P} \right)^2 - 2 \frac{P''}{P} \right], \quad P = |\psi|^2, \quad (2.2)$$

и, очевидно, $\langle Q \rangle_\psi = \int dx PQ = (\hbar^2/8m)F_x$ (если пренебречь граничным интегральным членом при $\pm\infty$, т.е. если $P' \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$).

Теперь применим точный принцип неопределенности [1], [3], [4] к флуктуациям импульса $p = \nabla S + f$, где $\langle f \rangle = \bar{f} = 0$, в результате энергия классического ансамбля $\langle E \rangle_{\text{cl}}$ заменится на $(P \sim |\psi|^2)$

$$\langle E \rangle = \int dx P \left[(2m)^{-1} |\nabla S + f|^2 + V \right] = \langle E \rangle_{\text{cl}} + \int dx P \frac{\bar{f} \cdot f}{2m}. \quad (2.3)$$

Здесь принцип фонового действия основан на

$$A = \int dt \left[-H + \int dx P S_t t \right], \quad \delta A = 0,$$

следовательно, $P_t = \delta H / \delta S$, где $S_t = -\delta H / \delta P$. Полагая, что $\overline{f \cdot f} = \alpha(x, P, S, \nabla P, \nabla S, \dots)$, рассмотрим модифицированный гамильтониан $\tilde{H}_q[P, S] = \tilde{H}_{cl} + \int dx \times P(\alpha/2m)$. Предположим, что имеет место

- 1) причинность, т.е. факт зависимости α от S, P и их первых производных;
- 2) независимость флуктуаций невзаимодействующих некоррелированных ансамблей;
- 3) правило преобразования $f \rightarrow L^T f$ при обратимых линейных преобразованиях координат $x \rightarrow L^{-1}x$;
- 4) точная неопределенность (другими словами, то, что $\alpha = \overline{f \cdot f}$ определено только лишь неопределенностью координаты).

В результате мы приходим к соотношению

$$\tilde{H}_q = \tilde{H}_{cl} + c \int dx \frac{\nabla P \cdot \nabla P}{2mP} \quad (2.4)$$

и, полагая $\hbar = 2\sqrt{c}$, $\psi = \sqrt{P}e^{iS/\hbar}$, получаем УШ. Заметим, что похожее заключение, основанное на аргументации, скорее связанной с чистой теорией информации, сделано в работе [8].

Как было отмечено в работе [18], в случае УШ при Q , определяемом уравнением (2.2), в трехмерном случае имеем

$$\int d^3x PQ \sim -\frac{\hbar^2}{8m} \int d^3x \left[2\Delta P - \frac{1}{P}(\nabla P)^2 \right] = \frac{\hbar^2}{8m} \int \frac{1}{P}(\nabla P)^2 d^3x, \quad (2.5)$$

поскольку $\int_{\Omega} d^3x \Delta P = \int_{\partial\Omega} d\Sigma \nabla P \cdot \mathbf{n} = 0$, если $\nabla P = 0$ на $\partial\Omega$.

Теперь вспомним [6], [19], [20], что соотношение между УШ и КП не является взаимно однозначным. В случае УШ квантовый потенциал $Q = -(\hbar^2/2)(\Delta R/R)$ зависит от волновой функции $\psi = Re^{iS/\hbar}$, и поэтому решение квантового уравнения Гамильтона–Якоби (ГЯ), содержащего S и R (через Q), требует сопутствующего решения уравнения “непрерывности” для определения S и R (и, тем самым, ψ). Здесь не хватает единственности, поскольку Q определяет R только с точностью до единственности решений уравнения $\Delta R + (2m/\hbar^2)QR = 0$ и даже тогда уравнение ГЯ $S_t + \dots = 0$ может привести к появлению еще одной произвольной функции (ср. [6], [20]). Более глубокого понимания этой ситуации можно достичь на основе результатов работы [9], если использовать вейлевскую геометрию и УШ (см. также [6], [21]–[24]).

ТЕОРЕМА 2.1. *Если всякий КП для УШ имеет вид (2.2) (где $\nabla P = 0$ на $\partial\Omega$), то квантование посредством Q отождествляется с флуктуациями импульса типа тех, которые рассматривались в работе [3], и, следовательно, имеет информационное содержание, описываемое информацией Фишера. Таким образом, любое УШ, которое описывается посредством распределения вероятности $P (= |\psi|^2)$, порождает КП Q , и можно отождествить это УШ с квантовой моделью, возникающей из классического квадратичного гамильтониана $\tilde{H}_{cl}$, возмущенного членом с информацией Фишера, определяемым выражением (2.4). Тогда для любой волновой функции ψ УШ имеет информационное содержание с энтропийной значимостью*

(ср. рассуждения, приведенные ниже, и работы [7], [18] по поводу связи с энтропией).

Уравнение УДВ. Аналогичные аргументы можно применить, следуя работам [1], [2], [4], [18], и к уравнению УДВ (об уравнении УДВ см. также работы [11], [13], [15], [23]–[28]). Рассмотрим случай Арновитта–Дезера–Мизнера (АДМ)

$$ds^2 = -(N^2 - h^{ij} N_i N_j) + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.6)$$

Предположим, что динамика порождается действием $A = \int dt [\tilde{H} + \int \mathfrak{D}h P \partial_t S]$. Тогда мы имеем уравнения движения $\partial_t P = \delta \tilde{H} / \delta S$ и $\partial_t S = -\delta \tilde{H} / \delta P$ (см. [2], [6]). Подходящий “классический” гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{cl}}[P, S] &= \int \mathfrak{D}h P H_0 \left[h_{ij}, \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \right], \\ H_0 &= \int dx \left[N \left(\frac{1}{2} G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} + V(h_{ij}) \right) - 2N_i \nabla_j \pi^{ij} \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $G_{ijkl} = (1/\sqrt{h})(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl})$ – (супер)метрика Де Витта, а $V \sim \hat{c}\sqrt{h}(2\Lambda - {}^3R)$. Тогда, имея в виду, что $\pi^{ij} = \delta S / \delta h_{ij} + f^{ij}$ и, например,

$$\tilde{H}_q = \tilde{H}_{\text{cl}} + \frac{1}{2} \int \mathfrak{D}h P \int dx N G_{ijkl} \overline{f^{ij} f^{kl}},$$

мы получаем с помощью точного принципа неопределенности вклад информации Фишера (см. [1], [2], [18], [29] и приведенное ниже выражение (2.17) с учетом выражения (2.20)):

$$\begin{aligned} \tilde{H}_q[P, S] &= \tilde{H}_{\text{cl}} + \frac{c}{2} \int \mathfrak{D}h \int dx N G_{ijkl} \frac{1}{P} \frac{\delta P}{\delta h_{ij}} \frac{\delta P}{\delta h_{kl}} \sim \\ &\sim \tilde{H}_{\text{cl}} + \frac{c}{2} \int \int \mathfrak{D}h dx N P Q, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\hbar = 2\sqrt{c}$, а $\psi = \sqrt{P}e^{iS/\hbar}$ определяется уравнением (при $N = 1$ и $N_i = 0$)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} + V \right] \psi = 0, \quad (2.9)$$

с “охватывающим” упорядочением (типа сэндвича с G_{ijkl} в середине). В общем случае имеются также связи

$$\frac{\delta \psi}{\delta N} = \frac{\delta \psi}{\delta N_i} = \partial_t \psi = 0, \quad \nabla_j \left(\frac{\delta \psi}{\delta h_{ij}} \right) = 0. \quad (2.10)$$

Теперь возьмем любое уравнение УДВ вида (2.9) и вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \left(G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} \sqrt{P} e^{iS/\hbar} \right) &= \left[\frac{\delta G_{ijkl}}{\delta h_{ij}} \left(\frac{1}{2} P^{-1/2} \frac{\delta P}{\delta h_{kl}} + \frac{i P^{1/2}}{\hbar} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \right) + \right. \\ &+ G_{ijkl} \left\{ -\frac{1}{4} P^{-3/2} \frac{\delta P}{\delta h_{kl}} \frac{\delta P}{\delta h_{ij}} + \frac{1}{2} P^{-1/2} \frac{\delta^2 P}{\delta h_{kl} \delta h_{ij}} - \frac{P^{1/2}}{\hbar^2} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{i}{2\hbar} P^{-1/2} \left(\frac{\delta P}{\delta h_{kl}} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} + \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \frac{\delta P}{\delta h_{ij}} \right) + \frac{i P^{1/2}}{\hbar} \frac{\delta^2 S}{\delta h_{kl} \delta h_{ij}} \right\} \right] e^{iS/\hbar}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Выписав уравнение УДВ, получим (ср. с работой [18])

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{4P} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \left[G_{ijkl} \frac{\delta P}{\delta h_{kl}} \right] + \frac{\hbar^2}{8P^2} G_{ijkl} \frac{\delta P}{\delta h_{kl}} \frac{\delta P}{\delta h_{ij}} + \\ & + G_{ijkl} \left[\frac{\hbar^2}{8P} \frac{\delta^2 P}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} + \frac{1}{2} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \right] + V = 0, \\ & 2P \frac{\delta G}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} + G \left(\frac{\delta P}{\delta h_{kl}} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} + \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \frac{\delta P}{\delta h_{ij}} \right) + 2PG \frac{\delta^2 S}{\delta h_{kl} \delta h_{ij}} = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь полезно провести сравнение с уравнением $-(\hbar^2/2m)\psi'' + V\psi = 0$, которое при $\psi = Re^{iS/\hbar}$ дает

$$\frac{1}{2m} S_x^2 + V + Q = 0, \quad Q = -\frac{\hbar^2}{4m} \frac{R''}{R} = \frac{\hbar^2}{8m} \left[\frac{2P''}{P} - \left(\frac{P'}{P} \right)^2 \right] \quad (2.13)$$

наряду с $\partial(R^2 S') = \partial(P S') = 0$ (что ведет к (2.5)). По аналогии отсюда, в частности, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} S_x^2 & \sim \frac{1}{2} G_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}}, \\ Q & = \frac{\hbar^2}{8m} \left[\frac{2P''}{P} - \left(\frac{P'}{P} \right)^2 \right] \sim -\frac{\hbar^2}{4P} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \left[G_{ijkl} \frac{\delta P}{\delta h_{kl}} \right] + \\ & + G_{ijkl} \left\{ \frac{\hbar^2}{8P^2} \frac{\delta P}{\delta h_{kl}} \frac{\delta P}{\delta h_{ij}} + \frac{\hbar^2}{4P} \frac{\delta^2 P}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Заметим, что Q -член непосредственно возникает из уравнений

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2} P^{-1/2} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \left(G_{ijkl} \frac{\delta P^{1/2}}{\delta h_{kl}} \right), \quad (2.15)$$

$$\int \mathfrak{D}h PQ = -\frac{\hbar^2}{2} \int \mathfrak{D}h P^{1/2} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \left(G_{ijkl} \frac{\delta P^{1/2}}{\delta h_{kl}} \right). \quad (2.16)$$

Однако из выражения

$$\int \mathfrak{D}h \delta[\dots] = 0 \quad (2.17)$$

(ср. [2] и см. рассуждения, приведенные ниже) мы получаем

$$\int \mathfrak{D}h P^{1/2} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \left(G_{ijkl} \frac{\delta P^{1/2}}{\delta h_{kl}} \right) = - \int \mathfrak{D}h \frac{\delta P^{1/2}}{\delta h_{ij}} G_{ijkl} \frac{\delta P^{1/2}}{\delta h_{kl}}. \quad (2.18)$$

Предположим, что существует подходящая трансляционно-инвариантная мера $\mathfrak{D}f$ в (супер)пространстве полей h (эту меру мы укажем ниже). Тогда имеет место формула интегрирования по частям (2.17) (ср. с формулой (2.21), приведенной далее), которая дает формулу (2.18). Отсюда следует

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть дано уравнение УДВ вида (2.9) и связанный с ним КП, задаваемый уравнением (2.15), и $\psi = \sqrt{P}e^{iS/\hbar}$. Тогда КП можно моделировать

как потенциал, возникающий из флуктуаций импульса, в соответствии с уравнением (2.8) (для $N = 1$), поскольку он порождает соответствующее возмущение типа информации Фишера классического гамильтониана $\hat{H}_{\text{cl}}$, задаваемого уравнением (2.8) (см. [2], [6], [18], [29]).

В данной теореме P представляет собой плотность вероятности полей h_{ij} , определяющих G_{ijkl} , и следует оговорить, что возмущения h_{ij} , порожденные $f^{ij} \sim (1/P) \times (\delta P / \delta h_{ij})$, являются симметричными (заметим, что $\tilde{f}^{ij} \sim \int \mathfrak{D}h P(1/P)(\delta P / \delta h_{ij}) = 0$). Таким образом, само существование квантового уравнения УДВ в “охватывающем” виде требует, по-видимому, входных данных энтропийного типа, связанных с флуктуациями полей, выраженными через информацию Фишера (относительно энтропии см. ниже).

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь мы обратимся к работам [2], [6], [30] и кратко обрисует вывод уравнения (2.17), следуя работам [1], [2] (см. также [6]). Подходящее функциональное исчисление строится следующим образом. Мы определяем функционал F полей f и полагаем

$$\delta F = F[f + \delta f] - F[f] = \int dx \frac{\delta F}{\delta f_x} \delta f_x. \quad (2.19)$$

Здесь $dx \sim d^4x$ и мы предполагаем наличие такой меры $\mathfrak{D}f$ в пространстве полей, что $\int \mathfrak{D}f \equiv \int \mathfrak{D}f'$ при $f' = f + h$ (см. [2] и, например, [30] относительно мер в виде произведения). Тогда, очевидно, $\int \mathfrak{D}f (\delta F / \delta f) = 0$, если $\int \mathfrak{D}f F[f] < \infty$. Действительно,

$$0 = \int \mathfrak{D}f (F[f + \delta f] - F[f]) = \int dx \delta f_x \left(\int \mathfrak{D}f \frac{\delta F}{\delta f_x} \right), \quad (2.20)$$

откуда следует формула интегрирования по частям

$$\int \mathfrak{D}f P \left(\frac{\delta F}{\delta f} \right) = - \int \mathfrak{D}f \left(\frac{\delta P}{\delta f} \right) F \quad (2.21)$$

для функционала плотности вероятности $P[f]$ (за дополнительными подробностями, касающимися функционального анализа, мы отсылаем читателя к работам [2], [6]).

3. ЭНТРОПИЯ И ВРЕМЯ

3.1. Время. В работе [30] проблема времени в квантовой гравитации рассматривается таким образом, что гамильтонова связь $\hat{H} = 0$ ослабляется до $\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = 0$, что согласовано с классической гамильтоновой связью. Это можно записать как (здесь мы делаем сдвиг $g \rightarrow h$, имея в виду применение ниже к метрике Де Витта и то, что ${}^3h \sim h$)

$$\int \mathfrak{D}h \psi^* \hat{H} \psi = 0, \quad (3.1)$$

а при $\psi = R e^{iS/\hbar}$, $\hat{H} \psi = i\hbar \partial_t \psi$ и при условии $(d/dt) \int \mathfrak{D}h \psi^* \psi = 0$ находим, что соотношение (3.1) выполнено, если $\partial_t S = 0$. Таким образом, слабая гамильтонова связь (3.1) согласована с $\psi = R(h, t) e^{iS(h)/\hbar}$. Наша идея заключается в том,

чтобы разрешить выполнение $i\hbar \partial_t \psi = \hat{H} \psi$, но при этом настоять на том, чтобы это не противоречило условию $\hat{H} = 0$ в классическом пределе. Рассмотрим $H = \tilde{G}_{AB}(h)\pi^A\pi^B + V(h)$ ($h = \{h_A\}$ и $\tilde{G}_{AB} = \tilde{G}_{BA}$) или, в явном виде,

$$\tilde{G}_{AB}\pi^A\pi^B \equiv \kappa \int d^3x \tilde{G}_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl}, \quad V = -\kappa^{-1} \int d^3x \sqrt{|h|}^3 R, \quad (3.2)$$

где $\kappa = 8\pi G$ и

$$\tilde{G}_{ijkl} = \frac{\sqrt{|h|}}{2} (h_{ik}h_{jl} + h_{jk}h_{il} - h_{ij}h_{kl}) \quad (3.3)$$

($\tilde{G}_{ijkl}$ отличается от G_{ijkl} множителем $\sqrt{h}$, который можно при необходимости поместить в меру $\mathfrak{D}h$, что даст меру $\tilde{\mathfrak{D}}h$). В квантовом случае π^A принимает вид $\hat{\pi}^A = -i\hbar(\delta/\delta h_A) \equiv -i\hbar\partial^A$ и в выражении для $\hat{H}$ становятся важны различные упорядочения величин $\hat{\pi}^A$. Некоторые рассуждения показывают, что из выражения $\hat{H} = \hat{\pi}^A \tilde{G}_{AB} \hat{\pi}^B + V$ следует, что $\langle \psi | \psi \rangle$, как и все $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$, не зависят от времени, поскольку

$$\frac{d}{dt} \int \tilde{\mathfrak{D}}h \psi_1^* \psi_2 = \hbar \int \tilde{\mathfrak{D}}h \partial^A [\tilde{G}_{AB}(\psi_1^* i \overleftrightarrow{\partial}^B \psi_2)] = 0, \quad (3.4)$$

потому что интеграл от полной производной равен нулю (таким образом, из унитарной временной эволюции следует охватывающее упорядочение). Более того, при $\hbar \rightarrow 0$ мы получаем уравнения для плотностей

$$\tilde{G}_{AB} \partial^A S \partial^B S + V = 0, \quad \partial_t R^2 + \partial^A [2R^2 \tilde{G}_{AB} \partial^B S] = 0, \quad (3.5)$$

которые представляют собой классическое уравнение ГЯ (при $\pi^A = \partial^A S$),

$$\dot{h}_A = \partial_t h_A = \frac{\partial H}{\partial \pi^A} = 2\tilde{G}_{AB} \pi^B; \quad \partial_t \rho + \partial^A (\rho \dot{h}_A) = 0 \quad (3.6)$$

($\sim (d\rho/dt) = 0$), где $\rho = R^2$. Поэтому в действительности обычный сильный вариант гамильтоновой связи (дающий $\partial_t \rho = 0$) не имеет корректного классического предела, а слабый имеет такой предел.

3.2. Энтропия. Теперь напомним [6], [18], [32], что для УШ (при некоторых обстоятельствах) мы имеем дифференциальную энтропию $\mathfrak{S} = -\int dx \rho \ln \rho$ (для простоты мы рассматриваем одномерный случай), где $\partial_t \rho = -\partial(v\rho)$ и $v = -u = -D\partial \ln \rho$ (диффузионный ток), что дает

$$\begin{aligned} \partial_t \mathfrak{S} &= -\int dx \rho_t (\ln \rho + 1) = \int dx (\ln \rho + 1) \partial(v\rho) = \\ &= -\int dx \partial \rho D \partial \ln \rho = D \int dx \frac{(\partial \rho)^2}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, информация Фишера представляет собой производную по времени от дифференциальной энтропии, при этом должен существовать некоторый аналог этого для уравнения УДВ. Для уравнения УДВ априори не существует естественной

временной эволюции, но мы наметили способ обойти это затруднение в разделе 3.1. В любом случае, можно искать формулу вида

$$\delta \int \mathfrak{D}h F(S, P, h_{ij}) = \int \mathfrak{D}h \left[\frac{\delta F}{\delta S} \delta S + \dots \right] = \int \mathfrak{D}h \frac{\delta P^{1/2}}{\delta h_{ij}} G_{ijkl} \frac{\delta P^{1/2}}{\delta h_{kl}}, \quad (3.8)$$

где F – некий энтропийный член. Таким образом, учитывая сказанное в разделе 3.1, мы имеем в виду, что $R^2 = \rho$ ($= P$), и рассматриваем уравнения (3.5). Второе из уравнений (3.5) в действительности фиксировано охватывающим упорядочением как

$$\partial_t \rho + \partial^A [2\rho \tilde{G}_{AB} \partial^B S] = 0, \quad (3.9)$$

где $\partial^B S = -i\hbar(\delta/\delta h_B)S$. Теперь вспомним, что, согласно работам [6], [32] в случае броуновского движения естественно использовать скорость дрейфа $u = D\nabla \ln(\rho) = -v = -(1/m)\nabla S$ (здесь $D = \hbar/2m$). В другом контексте, включающем УШ со статистической геометрией, а также пространство Вейля, получается вектор Вейля $\phi_i = -\partial_i \ln(\rho)$, связанный с осмотическим полем скоростей [6], [9], [21], [22]. Таким образом, соотношение $\mathbf{u} = -c\phi = c\nabla \ln(\rho)$ можно представить себе с $\rho = P \sim R^2$ так, что вместо того чтобы рассматривать $\delta S/\delta h_{ij} = \pi^{ij} - (1/P)(\delta P/\delta h_{ij})$, мы имеем повод рассмотреть

$$\frac{\delta S}{\delta h_B} \sim -\frac{\hat{c}}{P} \frac{\delta P}{\delta h_B}, \quad (3.10)$$

коль скоро нам интересны только флуктуации метрики (здесь нет масс частиц, чтобы этому воспрепятствовать). В этом случае мы можем работать с выражением (3.6) $-(i\hbar)^2 = -\hbar^2$, записав его в виде

$$\partial_t P - \frac{\delta}{\delta h_A} \left[2P \tilde{G}_{AB} \frac{\hbar^2 \hat{c}}{P} \frac{\delta P}{\delta h_B} \right] = 0. \quad (3.11)$$

Тогда для дифференциальной энтропии, определяемой как

$$S = -\frac{1}{\hat{c}} \int \tilde{\mathfrak{D}}h P \ln P, \quad (3.12)$$

получим

$$\begin{aligned} S_t &= -\frac{\hbar^2}{\hat{c}} \int dx \int \tilde{\mathfrak{D}}h P_t [1 + \ln P] = \\ &= -\hbar^2 \int dx \int \tilde{\mathfrak{D}}h [1 + \ln P] \left[\frac{\delta}{\delta h_A} \left(2\tilde{G}_{AB} \frac{\delta P}{\delta h_B} \right) \right] = \\ &= \hbar^2 \int dx \int \tilde{\mathfrak{D}}h \frac{2}{P} \tilde{G}_{AB} \frac{\delta P}{\delta h_B} \frac{\delta P}{\delta h_A} \sim 16 \int \tilde{\mathfrak{D}}h PQ \end{aligned} \quad (3.13)$$

(ср. (2.16), (2.17)). Мы получаем весьма эвристическую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. *Допуская только флуктуации метрики, удовлетворяющие уравнению (3.10), мы можем определить дифференциальную энтропию (3.12) и записать информацию Фишера (которая выражается через КП Q) как производную по времени $\partial_t S$.*

4. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Согласно работам [10], [14], [16], [33], [34], если Σ – 3-многообразие с фиксированной топологией, то “суперпространство” $S(\Sigma) = \text{Riem}(\Sigma)/\text{Diff}(\Sigma)$ с метрикой Де Витта $G_{ijkl} = G_{klij}$ имеет сложную структуру.

2. Некоторые рассуждения о прямой связи термодинамики и энтропии с уравнениями Эйнштейна содержатся в работах [35]–[37] (см. также [18]).

3. Многонаправленное (multifingered) время Швингера, Томонаги, Уилера и др. используется в теоретико-полевоом контексте для создания временной переменной (ср. [6], [12], [38]–[42]).

4. Ковариантная квантовая теория поля, основанная на идеях Де Дондера и Вейля, является очень мощной и может использоваться в гравитационных ситуациях (см., например, [6], [18], [31], [40], [43]–[45]). Возникают уравнения, аналогичные уравнению (3.9), и мы получаем теорему, аналогичную теореме 3.1.

5. Во всех этих подходах уравнения движения Бома возникают вместе с КП и способствуют его использованию в качестве связующего звена между классической и квантовой физикой (см., например, [6], [18], [23], [24], [26]–[28], [31], [40], [44], [45]).

6. Следуя работам [2], [6], [18], можно использовать классический геометриодинамический подход Де Витта [11] для описания квантовых флуктуаций метрики (по импульсу) в терминах идей информации Фишера. Здесь мы начинаем с риманова пространства V_4 , а симметричные флуктуации метрики должны быть обусловлены наложением связи Леви-Чивита. В случае более общих геометрий разрешена несколько бóльшая гибкость [46].

7. Эвристически можно также сформулировать версию теоремы 2.2, основанную на переменных Аштекара [6], [13], [15], [47]–[49]. Начнем с превращенной в плотность триады $E_i^a(x) = \sqrt{h}e_i^a(x)$ и внешней кривизны $K_a^i(x) = K_{ab}(x)e^{ib}(x)$ (где в АДМ-контексте $K_{ab} = (1/2N)(\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a)$). Произвольный вектор имеет вид $v^a = v^i e_i^a$, а ковариантная производная определяется как $D_a v^i = \omega_{aj}^i v^j$ где $\omega_{aj}^i = \Gamma_{kj}^i e_a^k$ (спиновая связность) и $\Gamma_{kj}^i = e_k^d e_j^f e_{cl}^i \Gamma_{df}^c - e_k^d e_j^f \partial_d e_f^i$. Параллельный перенос определяется как $dv^i = -\omega_{aj}^i v^j dx^a$, и мы получаем $\Gamma_a^i = -(1/2)\omega_{ajk}\epsilon^{ijk}$, где ϵ^{ijk} – символ Леви-Чивита. Тогда связь определяется как $GA_a^i(x) = \Gamma_a^i(x) + \beta K_a^i(x)$, где β – параметр Барbero–Иммирици, а G – гравитационная постоянная. В квантовом контексте получаем

$$\hat{E}_j^b \Psi(A) = 8\pi\beta \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta A_b^j} \Psi(A). \quad (4.1)$$

Тогда гамильтонова связь имеет вид $\epsilon^{ijk} F_{abk} E_i^a E_j^b \approx 0$, где $\beta = i$ для лоренцева случая, а F_{abk} – кривизна для A_b^i . В таком духе можно представить себе уравнение типа уравнения УДВ с охватывающим упорядочением (см. приведенную выше формулу (2.9), где $V \sim \hat{c}\sqrt{\hbar}(2\Lambda - {}^3R)$):

$$\hbar^2 \frac{\delta}{\delta A_a^i} \left(\epsilon_k^{ij} F_{ab}^k \frac{\delta \Psi}{\delta A_b^j} \right) - V(\Psi) = 0. \quad (4.2)$$

Тогда при $\psi = Re^{iS/\hbar}$ получаем для $\mathfrak{G}_{ab}^{ij} = \epsilon_k^{ij} F_{ab}^k$

$$Q + \mathfrak{G}_{ab}^{ij} \frac{\delta S}{\delta A_a^i} \frac{\delta S}{\delta A_b^j} + V = 0, \quad Q = -\frac{\hbar^2}{R} \frac{\delta}{\delta A_a^i} \left(\mathfrak{G}_{ab}^{ij} \frac{\delta R}{\delta A_b^j} \right). \quad (4.3)$$

Далее можно рассмотреть “импульсные” флуктуации $\delta \ln(R^2)/\delta A_a^i$ при $R = P^{1/2}$ и в основном повторить предыдущие аргументы, которые при подстановке интеграла по полям $\int \mathfrak{D}A$ (с подходящими свойствами) приводят к выражению для информации Фишера вида

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{D}A \int d^3x PQ &= -\hbar^2 \int \mathfrak{D}A \int d^3x P^{1/2} \frac{\delta}{\delta A_a^i} \left(\mathfrak{G}_{ab}^{ij} \frac{\delta P^{1/2}}{\delta A_b^j} \right) \sim \\ &\sim \hbar^2 \int \mathfrak{D}A \int d^3x \mathfrak{G}_{ab}^{ij} \frac{\delta P^{1/2}}{\delta A_a^i} \frac{\delta P^{1/2}}{\delta A_b^j}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

возмущающему классический гамильтониан.

8. В работах [49] Ванг развил интересную процедуру анализа классической конформной геометродинамики, в результате чего получается следующая система связей первого рода:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\perp &= \phi^2 \tilde{\mu}^{-1} \left[\epsilon_{ijk} \tilde{F}_{ab}^k - \frac{4\phi^8 + 1}{2\phi^8} \tilde{K}_{[a}^i \tilde{K}_{b]}^j \right] \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b + 8\tilde{\mu}\phi\tilde{\Delta}\phi; \\ \tilde{C}_a &= \tilde{F}_{ab}^k \tilde{E}_k^b - \tilde{A}_a^k \tilde{C}_k + \pi\phi_{,a}, \quad \tilde{C}_k = \tilde{D}_a \tilde{E}_k^a, \quad \tilde{C} = -\tilde{K}_a^i \tilde{E}_i^a - \frac{1}{4}\phi\pi, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\tilde{E}_i^a = \phi^{-4} E_i^a$ (причем E_i^a уже превращена в плотность), а $\tilde{A}_a^i = \tilde{\Gamma}_a^i + \phi^4 K_a^i$ – сопряженные переменные. Таким образом, при квантовании ожидается появление формул вида $\tilde{E}_i^a \sim \kappa(\delta/\delta \tilde{A}_a^i)$. Мы напомним, что $\tilde{\Delta} = \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b$, где $\tilde{g}_{ab}$ – конформная метрика, а $\tilde{\mu}^2 = \det(\tilde{g})_{ab}$. Вследствие сложной структуры $\tilde{C}_\perp$ мы не исключаем возможность того, что κ зависит от ϕ . Поэтому по аналогии с (4.2) мы можем здесь очень эвристически представить себе уравнение типа уравнения УДВ с охватывающим упорядочением (потенциальный член $\tilde{V}$ добавлен беспричинно):

$$\kappa \frac{\delta}{\delta \tilde{A}_a^i} \left(\kappa \mathcal{H}_{ab}^{ij} \frac{\delta \Psi}{\delta \tilde{A}_b^j} \right) + W\Psi - \tilde{V}\Psi = 0, \quad W = 8\tilde{\mu}\phi\tilde{\Delta}\phi, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{H}_{ab}^{ij} = \phi^2 \tilde{\mu} \left[\epsilon_{ijk} \tilde{F}_{ab}^k - \frac{4\phi^8 + 1}{2\phi^8} \tilde{K}_{[a}^i \tilde{K}_{b]}^j \right] \quad (4.7)$$

(здесь, например, $\tilde{V} \sim \hat{c}\sqrt{\hbar}(2\Lambda - {}^3\tilde{R})$); ϕ – эволюция, поэтому W , в принципе, определяется величинами $\tilde{C}_a$ и $\tilde{C}$ (однако можно указать одновременное решение всех связей). Теперь, записав (4.6) в виде $\kappa(\delta/\delta \tilde{A}_a^i)(\mathcal{H}_{ab}^{ij}(\delta\Psi/\delta \tilde{A}_b^j) + W\Psi - \tilde{V}\Psi = 0$ и

положив $\Psi = Re^{iS/\hbar}$, получаем (ср. с (4.3))

$$\begin{aligned} \kappa\delta_1[\tilde{\mathcal{H}}\delta_2(Re^{iS/\hbar})] + W(\Psi) - \tilde{V}(\Psi) &= 0 = \\ &= W(\Psi) + \left\{ \kappa \left[\delta_1(\tilde{\mathcal{H}}R_2) - \frac{1}{\hbar^2} \tilde{\mathcal{H}}RS_1S_2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\hbar} [\tilde{\mathcal{H}}R_2S_1 + \delta_1(\tilde{\mathcal{H}}RS_2)] \right\} e^{iS/\hbar} - \tilde{V}\Psi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Отсюда

$$\kappa \left[\frac{1}{R} \frac{\delta}{\delta \tilde{A}_a^i} \left(\tilde{\mathcal{H}} \frac{\delta R}{\delta \tilde{A}_b^j} \right) - \frac{\tilde{\mathcal{H}}}{\hbar^2} \frac{\delta S}{\delta \tilde{A}_a^i} \frac{\delta S}{\delta \tilde{A}_b^j} \right] + W - \tilde{V} = 0, \quad (4.9)$$

следовательно,

$$Q = -\frac{\hbar^2}{R} \left[\kappa \frac{\delta}{\delta \tilde{A}_a^i} \left(\tilde{\mathcal{H}}_{ab}^{ij} \frac{\delta R}{\delta \tilde{A}_b^j} \right) \right], \quad Q + \kappa \mathcal{H}_{ab}^{ij} \frac{\delta S}{\delta \tilde{A}_a^i} \frac{\delta S}{\delta \tilde{A}_b^j} - W + \tilde{V} = 0. \quad (4.10)$$

Можно манипулировать величиной Q , как в выражении (4.4), чтобы получить возмущение классического гамильтониана типа информации Фишера. Мы снова подчеркиваем спекулятивную природу выражений (4.6)–(4.10) и отмечаем трудности, связанные с поиском $\tilde{C}$ и $\tilde{C}_a$ для определения ϕ .

Список литературы

- [1] M. Hall, *Gen. Relat. Grav.*, **37** (2005), 1505; [gr-qc/0408098](#).
- [2] M. Hall, K. Kumar, M. Reginatto, *J. Phys. A*, **36** (2003), 9779.
- [3] M. Hall, *Phys. Rev. A*, **62** (2000), 012107; [quant-ph/9912055](#).
- [4] M. Reginatto, *Braz. J. Phys.*, **35** (2005), 476; [gr-qc/0501030](#).
- [5] L. Brenig, *Quantum mechanics is a relativity theory*, [quant-ph/0608025](#); *J. Phys. A*, **40** (2007), 4567; *Is quantum mechanics based on an invariance principle?* [gr-qc/0610142](#).
- [6] R. Carroll, *Fluctuations, Information, Gravity, and the Quantum Potential*, *Fund. Theories Phys.*, **148**, Springer, Dordrecht, 2006.
- [7] L. Olavo, *Phys. A*, **262** (1999), 197; **271** (1999), 260; *Phys. Rev. E*, **64** (2001), 036125.
- [8] R. Parwani, *Ann. Phys.*, **315** (2005), 419; [hep-th/0401190](#); *J. Phys. A*, **38** (2005), 6231; [quant-ph/0408185](#).
- [9] E. Santamato, *Phys. Rev. D*, **29** (1984), 216; **32** (1985), 2615; *J. Math. Phys.*, **25** (1984), 2477; *Phys. Lett. A*, **130** (1988), 199.
- [10] E. Anderson, *Gen. Relat. Grav.*, **36** (2004), 255; [gr-qc/0205118](#); *Phys. Rev. D*, **68** (2003), 104001; [gr-qc/0302035](#); *Geometrodynamics: spacetime or space?* [gr-qc/0409123](#); *On the recovery of geometrodynamics from two different sets of first principles*, [gr-qc/0511070](#).
- [11] B. S. DeWitt, *Phys. Rev.*, **160** (1967), 1113.
- [12] D. Giulini, C. Kiefer, *Class. Quantum Grav.*, **12** (1995), 403; [gr-qc/9409014](#); S. Sawin, *J. Math. Phys.*, **36** (1995), 6130; [gr-qc/9505040](#).
- [13] C. Kiefer, *Quantum Gravity*, *Int. Ser. Monogr. Phys.*, **124**, Clarendon Press, Oxford, 2004.
- [14] E. Mottola, *J. Math. Phys.*, **36** (1995), 2470.
- [15] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004; *A note on the foundation of relativistic mechanics. II. Covariant hamiltonian general relativity*, [gr-qc/0202079](#).
- [16] J. Wheeler, “Superspace and quantum geometrodynamics”, *Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics*, eds. C. M. DeWitt, J. A. Wheeler, Benjamin, New York, 1968, 242.

- [17] R. Carroll, *Fluctuations, gravity, and the quantum potential*, [gr-qc/0501045](#); *Remarks on geometry and the quantum potential*, [math-ph/0701007](#).
- [18] R. Carroll, *Remarks on the WDW equation*, [gr-qc/0512146](#); *Entropy, geometry, and the quantum potential*, [physics/0511176](#); *Remarks on gravity, entropy, and information*, [physics/0602036](#).
- [19] A. O. Bolivar, *Quantum-Classical Correspondence. Dynamical Quantization and the Classical Limit*, Front. Coll., **8**, Springer, Berlin, 2004.
- [20] R. Carroll, *Some fundamental aspects of a quantum potential*, [quant-ph/0506075](#).
- [21] R. Carroll, *Found. Phys.*, **35** (2005), 131.
- [22] C. Castro, J. Mahecha, *Progr. Phys.*, **1** (2006), 38.
- [23] N. Pinto-Neto, *Found. Phys.*, **35** (2005), 577; [gr-qc/0410117](#).
- [24] F. Shojai, M. Golshani, *Int. J. Mod. Phys. A*, **13** (1998), 677; 2135.
- [25] K. Kuchař, *J. Math. Phys.*, **15** (1974), 708; **17** (1976), 792; **18** (1977), 1589; **19** (1978), 390; **22** (1981), 2640; “Canonical methods of quantization”, *Quantum Gravity II. A Second Oxford Symposium*, eds. C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama, Clarendon Press, Oxford, 1981, 329.
- [26] N. Pinto-Neto, E. Santini, *Gen. Relat. Grav.*, **34** (2002), 505; [gr-qc/0009080](#); *Phys. Lett. A*, **315** (2003), 36; [gr-qc/0302112](#); *Phys. Rev. D*, **59** (1999), 123517; [gr-qc/9811067](#).
- [27] F. Shojai, A. Shojai, *Understanding quantum theory in terms of geometry*, [gr-qc/0404102](#); *Constraint algebra in causal loop quantum gravity*, [gr-qc/0409035](#); *Class. Quantum Grav.*, **21** (2004), 1.
- [28] A. Shojai, F. Shojai, N. Dadhich, *Int. J. Mod. Phys. A*, **20** (2005), 2773; [gr-qc/0504137](#).
- [29] B. Frieden, *Physics from Fisher Information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [30] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Frontiers in Phys., **75**, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1992.
- [31] H. Nikolić, *Time in quantum gravity by weakening the Hamiltonian constraint*, [gr-qc/0312063](#); *Relativistic Bohmian interpretation of quantum mechanics*, [quant-ph/0512065](#).
- [32] P. Garbaczewski, *Entropy*, **7** (2005), 253; [quant-ph/0408192](#).
- [33] A. Fischer, *J. Math. Phys.*, **27** (1986), 718.
- [34] D. Giulini, *Phys. Rev. D*, **51** (1995), 5630; [gr-qc/9311017](#).
- [35] C. Eling, R. Guedens, T. Jacobson, *Phys. Rev. Lett.*, **96** (2006), 121301; [gr-qc/0602001](#).
- [36] T. Jacobson, *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995), 1260; [gr-qc/9504004](#).
- [37] T. Padmanabhan, *Int. J. Mod. Phys. D*, **13** (2004), 2293; [gr-qc/0408051](#); *Int. J. Mod. Phys. D*, **14** (2005), 2263; [gr-qc/0510015](#); *Int. J. Mod. Phys. D*, **15** (2006), 1659; [gr-qc/0606061](#); *AIP Conf. Proc.*, **861** (2006), 179; [astro-ph/0603114](#); *Braz. J. Phys.*, **35** (2005), 362; [gr-qc/0412068](#); S. Wytthe, T. Padmanabhan, *Properties of high redshift quasars-II: What does the quasar luminosity function tell us about super-massive black-hole evolution?* [astro-ph/0603333](#); J. S. Bagla, T. Padmanabhan, *Pramana*, **49** (1997), 161.
- [38] T. Banks, *Nucl. Phys. B*, **249** (1985), 332.
- [39] U. Gerlach, *Phys. Rev.*, **177** (1969), 1929.
- [40] H. Nikolić, *Int. J. Mod. Phys. D*, **12** (2003), 407; [hep-th/0202204](#); *Phys. Lett. A*, **348** (2006), 166; [hep-th/0501046](#); *Eur. Phys. J. C*, **47** (2006), 525; [hep-th/0512186](#).
- [41] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **74** (1948), 1439.
- [42] S. Tomonaga, *Progr. Theoret. Phys.*, **1** (1946), 27.
- [43] I. V. Kanatchikov, *From the DeDonder–Weyl Hamiltonian formalism to quantization of gravity*, [gr-qc/9810076](#); *Towards a “pre-canonical” quantization of gravity without the space+time decomposition*, [gr-qc/9909032](#); “Quantization of Gravity: Yet Another Way,” *Coherent States, Quantization and Gravity*, eds. M. Schlichenmaier, A. Strasburger, S. T. Ali, A. Odziejewicz, Warsaw Univ. Press, Warsaw, 2001, 189; [gr-qc/9912094](#); *Nuclear Phys. B*, **88** (2000), 326; [gr-qc/0004066](#); *Covariant geometric prequantization of fields*,

- gr-qc/0012038; *Int. J. Theoret. Phys.*, **40** (2001), 1121; gr-qc/0012074; *Rep. Math. Phys.*, **46** (2000), 107; hep-th/9911175; *Phys. Lett. A*, **283** (2001), 25; hep-th/0012084; “On quantization of field theories in polymomentum variables”, *Particles, Fields, and Gravitation* (Łódź, Poland, 1998), AIP Conf. Proc., **453**, ed. J. Rembielinski, Amer. Inst. Phys., Woodbury, NY, 1998, 356; hep-th/9811016; *Basic structures of the covariant canonical formalism for fields based on the De Donder–Weyl theory*, hep-th/9410238.
- [44] H. Nikolić, *Eur. Phys. J. C*, **42** (2005), 365; hep-th/0407228; *Found. Phys. Lett.*, **17** (2004), 363; quant-ph/0208185; *Found. Phys. Lett.*, **18** (2005), 549; quant-ph/0406173.
- [45] H. Nikolić, *Quantum determinism from quantum general covariance*, hep-th/0601027; *Probability in relativistic quantum mechanics and foliation of spacetime*, quant-ph/0602024.
- [46] M. Blagojević, *Gravitation and Gauge Symmetries*, Ser. High Energy Phys. Cosmol. Gravit., IOP Publ., Bristol, 2002.
- [47] A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.*, **57** (1986), 2244; *Phys. Rev. D*, **36** (1987), 1587.
- [48] J. Baez, *Knots and quantum gravity: progress and prospects*, gr-qc/9410018; *Phys. Rev. D*, **52** (1995), 6840; gr-qc/9501016; J. Baez, S. Sawin, *J. Funct. Anal.*, **150** (1997), 1; q-alg/9507023.
- [49] C. H.-T. Wang, *J. Phys. Conf. Ser.*, **33** (2006), 285; gr-qc/0512023; *Phys. Rev. D*, **71** (2005), 124026; gr-qc/0501024; *Conformal decomposition in canonical general relativity*, gr-qc/0603062; *The conformal factor in the parameter-free construction of spin-gauge variables for gravity*, gr-qc/0603077; *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, **364** (2006), 3375; gr-qc/0605124; *Phys. Rev. D*, **72** (2005), 087501.