Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Т. Чэнь, Ц. Х. Чан, М. Х. Ту, Дополнительные симметрии и преобразования Беклунда для бездисперсионной иерархии Гарри Дима, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 1, 45–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6069>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:47:07

© 2007 г. Юй-Тун Чэнь^{*†}, Цзень-Ху Чан[‡], Мин-Хсиень Ту[†]

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА ДЛЯ БЕЗДИСПЕРСИОННОЙ ИЕРАРХИИ ГАРРИ ДИМА

Описывается бездисперсионное расширение типа Тоды для бездисперсионной иерархии Гарри Дима. Расширенная бездисперсионная иерархия Гарри Дима допускает формулировку в терминах одеваания, а ее солитонная структура исследуется в рамках твисторной конструкции. Показано, что дополнительные симметрии солитонного пространства задают преобразования Беклунда расширенной бездисперсионной иерархии Гарри Дима. Даются примеры построения новых решений $(2 + 1)$ -мерных уравнений бездисперсионной иерархии Гарри Дима и расширенной бездисперсионной иерархии Гарри Дима с помощью преобразований Беклунда.

Ключевые слова: бездисперсионная иерархия Гарри Дима, одевающий оператор, твисторная конструкция, дополнительные симметрии, преобразование Беклунда.

1. ВВЕДЕНИЕ

Бездисперсионные интегрируемые системы вызывают значительный интерес в теоретической и математической физике (см., например, работы [1]–[4] и ссылки в них). Одной из бездисперсионных интегрируемых систем является так называемая бездисперсионная иерархия Гарри Дима (бДим) [5], задаваемая уравнением Лакса

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_n} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{L}\}, \quad \mathcal{B}_n = (\mathcal{L}^n)_{\geq 2}, \quad (1)$$

в котором оператор Лакса $\mathcal{L}$ представлен в виде ряда Лорана

$$\mathcal{L} = UP + U_0 + U_1P^{-1} + U_2P^{-2} + \dots,$$

где коэффициентные функции U_i зависят от параметра X и различных переменных времен T_n , символ $(\cdot)_{\geq 2}$ обозначает проектирование на полиномиальную часть

^{*}Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan

[†]Department of Physics, National Chung Cheng University, Chiayi, Taiwan.

E-mail: phymhtu@ccu.edu.tw

[‡]Department of Computer Science, National Defense University, Taoyuan, Taiwan

выражения порядка ≥ 2 , а скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ задана формулой

$$\{f(X, P), g(X, P)\} = \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial g}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial g}{\partial P}. \quad (2)$$

Так как $\mathcal{B}_1 = 0$, то U_i не зависят от T_1 . Первый член потоков Лакса (1) – это так называемое $(2+1)$ -мерное уравнение бДим, которое для ведущей переменной U оператора $\mathcal{L}$ принимает вид

$$U_T = \frac{3}{4} \frac{1}{U} \left[U^2 \partial_X^{-1} \left(\frac{U_Y}{U^2} \right) \right]_Y, \quad (3)$$

где введены обозначения $T_2 = Y$ и $T_3 = T$. Уравнение (3) представляет собой основной пример уравнения гидродинамического типа и является просто бездисперсионным пределом стандартного $(2+1)$ -мерного уравнения Гарри Дима [6], полученным опусканием дисперсионного слагаемого. С точки зрения алгебр Пуассона–Ли [7] иерархия бДим вместе с бездисперсионной иерархией Кадомцева–Петвиашвили (бКП) [2] и бездисперсионной модифицированной иерархией Кадомцева–Петвиашвили (бмКП) [3], [8] представляют собой три важных класса бездисперсионных интегрируемых систем. Более точно, для ряда Лорана $\Lambda = \sum_i a_i P^i$ разложение $\Lambda = \Lambda_{\geq k} \oplus \Lambda_{< k}$ относительно скобки Пуассона (2) представляет собой разложение подалгебры Ли только для $k = 0, 1, 2$, а именно $\{\Lambda_{\geq k}, \Lambda_{\geq k}\} \subset \Lambda_{\geq k}$ и $\{\Lambda_{< k}, \Lambda_{< k}\} \subset \Lambda_{< k}$. В последние годы наблюдался значительный прогресс в исследовании структур иерархии бДим таких, как пуассоновы структуры, отображение Миуры, твисторная конструкция, конечномерные редукции и $\bar{\partial}$ -подход (см., например, работы [5], [9]–[15]). В частности, большой интерес вызывали решения, связанные с конечномерными редукциями. Однако в отличие от иерархий бКП и бмКП структура симметрий пространства решений системы бДим не была полностью представлена в литературе.

В данной работе мы исследуем этот вопрос с помощью изучения дополнительных симметрий [16] иерархии бДим. Эти симметрии не относятся к классу потоков иерархий. Применяв подход одевающего оператора [4], Такасаки и Такебе исследовали дополнительные симметрии, связанные с солитонными пространствами иерархии бКП и бездисперсионной иерархии Тоды (бТода) в твисторном подходе. Они доказали, что инфинитезимальные действия этих симметрий образуют расширенную конформную алгебру ($w_{1+\infty}$ -алгебру). Далее Мартинес Алонсо и Маньяс [17] использовали твисторный формализм для получения набора дополнительных симметрий уравнений бКП и обнаружили однопараметрическое семейство решений. Затем Маньяс [13], [14] применил этот подход также к другим бездисперсионным иерархиям типа Лакса, включая иерархии бмКП, бДим, и бТода, и построил различные явные решения с помощью отображения Миуры. Эти работы побудили нас исследовать связь между дополнительными симметриями и преобразованием Беклунда для иерархии бДим. Для этого, основываясь на наших предыдущих работах [10], [12], мы формулируем систему бДим в терминах твисторной конструкции типа бТоды, вводя дополнительный набор потоков иерархии по отношению к новым переменным времен $\hat{T}_n$, которые оказываются совместными со стандартными

потоками. Эта расширенная иерархия называется расширенной иерархией бДим (рбДим). Мы покажем, что в подходе одевающего оператора можно исследовать ассоциированные дополнительные симметрии и преобразования Беклунда иерархии рбДим с помощью твисторной конструкции, что дает удобный метод для получения явных решений $(2+1)$ -мерного уравнения бДим и его расширения.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 приводится расширенная формулировка Лакса иерархии бДим и определяется иерархия рбДим. В разделе 3 описан подход одевающего оператора к иерархии рбДим в духе системы бТода, в рамках которого удается обсудить солитонную структуру иерархии рбДим с помощью твисторной конструкции. В разделе 4 показано, что подход одевающего оператора оказывается естественным при исследовании дополнительных симметрий пространства решений. Также показано, что генераторы инфинитезимальных симметрий подчиняются структуре w -алгебры. В разделе 5 исследуются дополнительные потоки, связанные с так называемой (r, q) -обрезанной моделью, и выводятся явные формулы для преобразований Беклунда $(2+1)$ -мерных уравнений. В разделе 6 приводятся некоторые примеры преобразований Беклунда при построении явных решений $(2+1)$ -мерных уравнений бДим и рбДим. Раздел 7 посвящен заключительным замечаниям.

2. РАСШИРЕННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЛАКСА

В духе системы бТода [4] рассмотрим два ряда Лорана $\mathcal{L}$ и $\hat{\mathcal{L}}$ вида [10], [12]

$$\mathcal{L} = UP + \sum_{n=0}^{\infty} U_n P^{-n}, \quad \hat{\mathcal{L}}^{-1} = P^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{U}_n P^n, \quad (4)$$

которые удовлетворяют уравнениям Лакса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_n} &= \{\mathcal{B}_n, \mathcal{L}\}, & \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial T_n} &= \{\mathcal{B}_n, \hat{\mathcal{L}}\}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{T}_n} &= \{\hat{\mathcal{B}}_n, \mathcal{L}\}, & \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \hat{T}_n} &= \{\hat{\mathcal{B}}_n, \hat{\mathcal{L}}\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\mathcal{B}_n = (\mathcal{L}^n)_{\geq 2}, \quad \hat{\mathcal{B}}_n = (\hat{\mathcal{L}}^{-n})_{\leq 1}.$$

Из определения $\mathcal{B}_n$ и $\hat{\mathcal{B}}_n$ следует, что коэффициентные функции U_n и $\hat{U}_n$ зависят от переменных $X, T_2, T_3, \dots$ и $\hat{T}_{-1}, \hat{T}_1, \dots$. В частности, поскольку $\hat{\mathcal{B}}_{-1} = P$, эти коэффициентные функции зависят от $\hat{T}_{-1}$ и X только через линейную комбинацию $\hat{T}_{-1} + X$, и можно просто положить $\hat{T}_{-1} = X$. Уравнения Лакса для $\mathcal{L}$ и $\hat{\mathcal{L}}$ эквивалентны уравнениям нулевой кривизны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{B}_m}{\partial T_n} - \frac{\partial \mathcal{B}_n}{\partial T_m} + \{\mathcal{B}_m, \mathcal{B}_n\} &= 0, \\ \frac{\partial \hat{\mathcal{B}}_m}{\partial \hat{T}_n} - \frac{\partial \hat{\mathcal{B}}_n}{\partial \hat{T}_m} + \{\hat{\mathcal{B}}_m, \hat{\mathcal{B}}_n\} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{B}_m}{\partial \hat{T}_n} - \frac{\partial \hat{\mathcal{B}}_n}{\partial T_m} + \{\mathcal{B}_m, \hat{\mathcal{B}}_n\} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

которые обеспечивают взаимную коммутацию уравнений Лакса (5). Так как уравнения (5) представляют собой расширение иерархии бДим при введении в рассмотрение дополнительного набора переменных времен $\hat{T}_n$, будем называть их (или уравнения (6)) иерархией рбДим. Первые два нетривиальных интеграла иерархии можно получить из уравнений (6) при подстановке $n = 2, m = 3$ в первое уравнение и $n = 1, m = 2$ в третье. В дополнение к $(2 + 1)$ -мерному уравнению бДим (3) простейшее $(2 + 1)$ -мерное уравнение, содержащее $\hat{T}_n$, имеет вид

$$U_{\hat{T}_1} + U^2 [2U^{-1} \partial_Y^{-1} U^2 (\partial_Y^{-1} U^2)_{XX}]_X = 0, \quad (7)$$

где введены обозначения $f_{\hat{T}_1} = \partial_{\hat{T}_1} f$, $f_X = \partial_X f$, и $\partial_Y^{-1} f = \int^Y f$. Будем называть (7) уравнением рбДим. Далее, используя уравнения Лакса (5) и тот факт, что $\int \text{res}\{A, B\} = 0$ для любых двух рядов Лорана A и B , можно проверить, что иерархия рбДим содержит бесконечный набор сохраняющихся величин, задаваемых как

$$H_n = \frac{1}{n} \int \text{res}(\mathcal{L}^n dP), \quad \hat{H}_n = \frac{1}{n} \int \text{res}(\hat{\mathcal{L}}^{-n} dP),$$

где $n \geq 1$ и $\text{res}(\sum_i a_i P^i) = a_{-1}$.

3. ПОДХОД ОДЕВАЮЩЕГО ОПЕРАТОРА

На самом деле можно сформулировать уравнения Лакса (5) в форме одевания, похожей на соответствующую форму системы бТода [4]. Пусть $(\mathcal{L}, \hat{\mathcal{L}})$ – решение уравнений Лакса (5) вида (4). Тогда существуют лорановские ряды $\Theta = \sum_{n=-1}^{\infty} \Theta_n(X, T, \hat{T}) P^{-n}$ и $\hat{\Theta} = \sum_{n=2}^{\infty} \hat{\Theta}_n(X, T, \hat{T}) P^n$ [10] такие, что

$$\mathcal{L} = e^{\text{ad } \Theta}(P), \quad \hat{\mathcal{L}} = e^{\text{ad } \hat{\Theta}}(P) \quad (8)$$

при

$$\begin{aligned} \nabla_{T_n, \Theta} \Theta &= -(\mathcal{L}^n)_{\leq 1}, & \nabla_{T_n, \hat{\Theta}} \hat{\Theta} &= (\mathcal{L}^n)_{\geq 2}, \\ \nabla_{\hat{T}_n, \Theta} \Theta &= (\hat{\mathcal{L}}^{-n})_{\leq 1}, & \nabla_{\hat{T}_n, \hat{\Theta}} \hat{\Theta} &= -(\hat{\mathcal{L}}^{-n})_{\geq 2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\text{ad } X(Y) = \{X, Y\}$ и $\nabla_{T_n, Z} W = \sum_{k=0}^{\infty} (\text{ad } Z)^k \partial_{T_n} W / (k+1)!$. Если имеется форма одевания для $(\mathcal{L}, \hat{\mathcal{L}})$, то можно ввести соответствующие операторы Орлова–Шульмана

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= e^{\text{ad } \Theta} \left(X + \sum_{n=2}^{\infty} n T_n P^{n-1} \right) = e^{\text{ad } \Theta} e^{\text{ad } t(P)}(X), \\ \hat{\mathcal{M}} &= e^{\text{ad } \hat{\Theta}} \left(X - \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{T}_n P^{-n-1} \right) = e^{\text{ad } \hat{\Theta}} e^{\text{ad } \hat{t}(P)}(X), \end{aligned} \quad (10)$$

где $t(P) = \sum_{n=2}^{\infty} T_n P^n$ и $\hat{t}(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{T}_n P^{-n}$. Эти величины имеют следующие разложения [10]:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sum_{n=2}^{\infty} n T_n \mathcal{L}^{n-1} + \phi_1 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathcal{L}^{-n-1}, \\ \hat{\mathcal{M}} &= - \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{T}_n \hat{\mathcal{L}}^{-n-1} + X + \sum_{n=2}^{\infty} \hat{v}_n \hat{\mathcal{L}}^{n-1}, \end{aligned}$$

где $\phi_1 = \int^X dX' / U(X', T, \widehat{T})$ и $v_n, \hat{v}_n$ также представляют собой функции от X, T_n и $\widehat{T}_n$. Ниже будет показано, что введение операторов Орлова–Шульмана $\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{M}}$ расширяет симметрии системы рБДим. Из формул (9) и (10) следует, что операторы Орлова–Шульмана $\mathcal{M}$ и $\widehat{\mathcal{M}}$ удовлетворяют уравнениям Лакса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T_n} &= \{\mathcal{B}_n, \mathcal{M}\}, & \frac{\partial \widehat{\mathcal{M}}}{\partial T_n} &= \{\mathcal{B}_n, \widehat{\mathcal{M}}\}, \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \widehat{T}_n} &= \{\widehat{\mathcal{B}}_n, \mathcal{M}\}, & \frac{\partial \widehat{\mathcal{M}}}{\partial \widehat{T}_n} &= \{\widehat{\mathcal{B}}_n, \widehat{\mathcal{M}}\} \end{aligned} \quad (11)$$

и каноническим соотношениям

$$\{\mathcal{L}, \mathcal{M}\} = \{\hat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}}\} = 1. \quad (12)$$

Интегрируемость иерархии рБДим характеризуется наличием симплектической 2-формы

$$\omega = dP \wedge dX + \sum_{n=2} d\mathcal{B}_n \wedge dT_n + \sum_{n=1} d\widehat{\mathcal{B}}_n \wedge d\widehat{T}_n, \quad (13)$$

которая замкнута, $d\omega = 0$, в то время как соотношение $\omega \wedge \omega = 0$ предполагает справедливость уравнений нулевой кривизны (6). Сопряженные пары $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ и $(\hat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}})$ задают координаты Дарбу в окрестностях соответствующих точек $P = \infty$ и $P = 0$. В области перекрытия эти координаты Дарбу связаны соотношением

$$\omega = d\mathcal{L} \wedge d\mathcal{M} = d\hat{\mathcal{L}} \wedge d\widehat{\mathcal{M}},$$

из которого с учетом выражения (13) следуют уравнения Лакса (5), (11) и каноническое соотношение (12). Наконец, на основе расширенной формулировки Лакса для иерархии рБДим можно задать твисторную конструкцию и рассмотреть с ее помощью пространство решений. Пусть $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ и $(\hat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}})$ имеют вышеприведенный вид. Если заданы функции $f(P, X)$, $g(P, X)$, $\hat{f}(P, X)$ и $\hat{g}(P, X)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\{f(P, X), g(P, X)\} = 1, \quad \{\hat{f}(P, X), \hat{g}(P, X)\} = 1,$$

то функциональные уравнения

$$f(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \hat{f}(\hat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}}), \quad g(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \hat{g}(\hat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}})$$

задают решение $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \hat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}})$, которое удовлетворяет уравнениям (5), (11) и каноническому соотношению (12). Будем называть $(f, g, \hat{f}, \hat{g})$ твисторными данными соответствующего решения.

4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ

Имея формулировку одевания для иерархии рБДим, можно теперь, следуя предложенному в работе [4] подходу, исследовать дополнительные симметрии пространства решений системы бДим. Пусть $F(P, X), \widehat{F}(P, X)$ – производящие функции канонических преобразований

$$\begin{aligned} (f(P, X), g(P, X)) &\rightarrow (f_\epsilon(P, X), g_\epsilon(P, X)) = e^{-\epsilon \operatorname{ad} F}(f, g), \\ (\hat{f}(P, X), \hat{g}(P, X)) &\rightarrow (\hat{f}_\epsilon(P, X), \hat{g}_\epsilon(P, X)) = e^{-\epsilon \operatorname{ad} \widehat{F}}(\hat{f}, \hat{g}), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\text{ad } F = \frac{\partial F}{\partial P} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial}{\partial P}, \quad \text{ad } \widehat{F} = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial P} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial \widehat{F}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial P}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Theta_\epsilon &= \Theta + \epsilon \delta_{F, \widehat{F}} \Theta + O(\epsilon^2), & \widehat{\Theta}_\epsilon &= \widehat{\Theta} + \epsilon \delta_{F, \widehat{F}} \widehat{\Theta} + O(\epsilon^2), \\ \mathcal{L}_\epsilon &= \mathcal{L} + \epsilon \delta_{F, \widehat{F}} \mathcal{L} + O(\epsilon^2), & \mathcal{M}_\epsilon &= \mathcal{M} + \epsilon \delta_{F, \widehat{F}} \mathcal{M} + O(\epsilon^2), \\ \widehat{\mathcal{L}}_\epsilon &= \widehat{\mathcal{L}} + \epsilon \delta_{F, \widehat{F}} \widehat{\mathcal{L}} + O(\epsilon^2), & \widehat{\mathcal{M}}_\epsilon &= \widehat{\mathcal{M}} + \epsilon \delta_{F, \widehat{F}} \widehat{\mathcal{M}} + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

где производная $\delta_{F, \widehat{F}}$ не действует на переменные времен: $\delta_{F, \widehat{F}} T_n = \delta_{F, \widehat{F}} \widehat{T}_n = 0$. Из выражений (14) следует, что инфинитезимальные симметрии одевающих функций имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla_{\delta_{F, \widehat{F}}} \Theta &= F(\mathcal{L}, \mathcal{M})_{\leq 1} - \widehat{F}(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}})_{\leq 1}, \\ \nabla_{\delta_{F, \widehat{F}}} \widehat{\Theta} &= \widehat{F}(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}})_{\geq 2} - F(\mathcal{L}, \mathcal{M})_{\geq 2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из соотношений (8) и (15) получаем, что инфинитезимальные симметрии $\mathcal{L}$, $\widehat{\mathcal{L}}$, $\mathcal{M}$, $\widehat{\mathcal{M}}$ задаются выражениями

$$\begin{aligned} \delta_{F, \widehat{F}} \mathcal{L} &= \{(F - \widehat{F})_{\leq 1}, \mathcal{L}\}, & \delta_{F, \widehat{F}} \mathcal{M} &= \{(F - \widehat{F})_{\leq 1}, \mathcal{M}\}, \\ \delta_{F, \widehat{F}} \widehat{\mathcal{L}} &= \{(\widehat{F} - F)_{\geq 2}, \widehat{\mathcal{L}}\}, & \delta_{F, \widehat{F}} \widehat{\mathcal{M}} &= \{(\widehat{F} - F)_{\geq 2}, \widehat{\mathcal{M}}\}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений и уравнений Лакса (5) следует, что дополнительные потоки коммутируют с потоками Лакса:

$$[\delta_{F, \widehat{F}}, \partial_{T_n}] = [\delta_{F, \widehat{F}}, \partial_{\widehat{T}_n}] = 0.$$

Тем не менее дополнительные потоки в общем случае не коммутируют между собой. Если имеются две пары производящих функций $(F, \widehat{F})$ и $(G, \widehat{G})$, то можно показать, что инфинитезимальные симметрии $\delta_{F, \widehat{F}}$ и $\delta_{G, \widehat{G}}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\delta_{F, \widehat{F}}, \delta_{G, \widehat{G}}] \mathcal{K} = \delta_{\{F, G\}, \{\widehat{F}, \widehat{G}\}} \mathcal{K}, \quad (16)$$

где $\mathcal{K} = \mathcal{L}, \mathcal{M}, \widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}}, \Theta, \widehat{\Theta}$. На самом деле коммутационные соотношения (16) разлагаются следующим образом:

$$\begin{aligned} [\delta_{F, 0}, \delta_{G, 0}] \mathcal{K} &= \delta_{\{F, G\}, 0} \mathcal{K}, \\ [\delta_{0, \widehat{F}}, \delta_{0, \widehat{G}}] \mathcal{K} &= \delta_{0, \{\widehat{F}, \widehat{G}\}} \mathcal{K}, \\ [\delta_{F, 0}, \delta_{0, \widehat{G}}] \mathcal{K} &= 0, \end{aligned}$$

и образуют тем самым бесконечномерную алгебру без центра $w_\infty \oplus w_\infty$, где w_∞ реализована как алгебра Ли скобок Пуассона [18]. Заметим, что дополнительная симметрия, порождаемая $\delta_{F, 0}$, коммутирует с такой же симметрией для $\delta_{0, \widehat{G}}$, что отражает перестановочность преобразований Беклунда.

5. ОБРЕЗАННЫЕ ПОТОКИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА

Рассмотрим однопараметрический поток, порождаемый дополнительными симметриями. Полагая $s = -\epsilon$, можно представить дополнительный поток для $\mathcal{L}$ в виде

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \{ \mathcal{L}, (F(\mathcal{L}, \mathcal{M}) - \widehat{F}(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}}))_{\leq 1} \}, \quad (17)$$

где генераторы F и $\widehat{F}$ имеют разложения

$$F(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \sum_{ij} c_{ij} \mathcal{L}^i \mathcal{M}^j, \quad \widehat{F}(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}}) = \sum_{ij} \hat{c}_{ij} \widehat{\mathcal{L}}^i \widehat{\mathcal{M}}^j,$$

в которых c_{ij} и $\hat{c}_{ij}$ – произвольные константы. Теперь с помощью предложенного в работе [17] метода рассмотрим (r, q) -обрезанную систему, которая определяется только первыми r T_n -потоками и q $\widehat{T}_n$ -потоками, т.е. положим $T_n = 0$ для всех $n \geq r + 2$ и $\widehat{T}_n = 0$ для всех $n \geq q$. Операторы Орлова–Шульмана при этом имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (r+1)T_{r+1}\mathcal{L}^r + rT_r\mathcal{L}^{r-1} + \dots + \phi_1 + O(\mathcal{L}^{-2}), \\ \widehat{\mathcal{M}} &= -(q-1)\widehat{T}_{q-1}\widehat{\mathcal{L}}^{-q} - (q-2)\widehat{T}_{q-2}\widehat{\mathcal{L}}^{-q+1} + \dots + X + O(\widehat{\mathcal{L}}). \end{aligned}$$

Подставляя $\mathcal{M}$ и $\widehat{\mathcal{M}}$ соответственно в F и $\widehat{F}$ и требуя, чтобы дополнительные потоки, порождаемые F и $\widehat{F}$, не индуцировали потоки иерархий для $T_n (n \geq r+2)$ и $\widehat{T}_n (n \geq q)$, получим

$$F(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \sum_{i=2}^{r+1} \alpha_i \left(\frac{\mathcal{M}}{(r+1)\mathcal{L}^r} \right) \mathcal{L}^i, \quad \widehat{F}(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}}) = \sum_{i=-(q-1)}^1 \beta_i \left(-\frac{\widehat{\mathcal{M}}\widehat{\mathcal{L}}^q}{(q-1)} \right) \widehat{\mathcal{L}}^i,$$

где α_i, β_i – произвольные функции и $r \geq 1, q \geq 0 (q \neq 1)$. Таким образом, для (r, q) -обрезанных систем $r + q + 1$ генераторов симметрий задаются формулами

$$\begin{aligned} F_i(\mathcal{L}, \mathcal{M}) &= \alpha_i \left(\frac{\mathcal{M}}{(r+1)\mathcal{L}^r} \right) \mathcal{L}^i, \quad i = 2, 3, \dots, r+1, \\ \widehat{F}_i(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}}) &= \beta_i \left(-\frac{\widehat{\mathcal{M}}\widehat{\mathcal{L}}^q}{(q-1)} \right) \widehat{\mathcal{L}}^i, \quad i = -(q-1), -(q-2), \dots, 1. \end{aligned}$$

В дальнейшем в основном рассматриваются дополнительные потоки, связанные с $(1+1)$ - и $(2+1)$ -мерными уравнениями.

Случай $(1, 0)$ -обрезания. В этом случае система зависит только от X и Y . Два генератора имеют вид

$$\widehat{F}_1 = \beta_1(\widehat{\mathcal{M}})\widehat{\mathcal{L}}, \quad F_2 = \alpha_2\left(\frac{\mathcal{M}}{2\mathcal{L}}\right)\mathcal{L}^2,$$

где β_1 и α_2 аналитичны вблизи соответствующих точек X и Y :

$$\begin{aligned} \beta_1(\widehat{\mathcal{M}}) &= \beta_1(X) + O(\widehat{\mathcal{L}}), \\ \alpha_2\left(\frac{\mathcal{M}}{2\mathcal{L}}\right) &= \alpha_2(Y) + \frac{1}{2}\phi_1\alpha_2'(Y)\mathcal{L}^{-1} + O(\mathcal{L}^{-2}). \end{aligned}$$

Теперь из выражения (17) можно получить дополнительные потоки для U :

$$\begin{aligned}\widehat{F}_1: \quad & \frac{\partial U}{\partial s} = \beta_1(X) \frac{\partial U}{\partial X} - \beta'_1(X)U, \\ F_2: \quad & \frac{\partial U}{\partial s} = \alpha_2(Y) \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{1}{2} \alpha'_2(Y)U.\end{aligned}$$

Налагая начальное условие $U(0 | X, Y) = U(X, Y)$, можно решить эти дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП) первого порядка:

$$\begin{aligned}\widehat{F}_1: \quad & U(s | X, Y) = (\widetilde{X}')^{-1}U(\widetilde{X}, Y), \\ F_2: \quad & U(s | X, Y) = (\widetilde{Y}')^{1/2}U(X, \widetilde{Y}),\end{aligned}\tag{18}$$

где $\widetilde{X}(s, X)$ и $\widetilde{Y}(s, Y)$ заданы неявно с помощью соотношений

$$\int^{\widetilde{X}(s, X)} \frac{dz}{\beta_1(z)} = s + \int^X \frac{dz}{\beta_1(z)}, \quad \int^{\widetilde{Y}(s, Y)} \frac{dz}{\alpha_2(z)} = s + \int^Y \frac{dz}{\alpha_2(z)}$$

и $\widetilde{X}' = \partial \widetilde{X} / \partial X$, $\widetilde{Y}' = \partial \widetilde{Y} / \partial Y$.

Случай (2, 0)-обрезания. В этом случае система зависит только от переменных X , Y и T , и соответствующие три генератора имеют вид

$$\widehat{F}_1(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}}) = \beta_1(\widehat{\mathcal{M}})\widehat{\mathcal{L}}, \quad F_2 = \alpha_2\left(\frac{\mathcal{M}}{3\mathcal{L}^2}\right)\mathcal{L}^2, \quad F_3 = \alpha_3\left(\frac{\mathcal{M}}{3\mathcal{L}^2}\right)\mathcal{L}^3,$$

где предполагается, что β_1 и α_i , $i = 2, 3$, аналитичны около соответствующих точек X и T . Тем самым

$$\begin{aligned}\beta_1(\widehat{\mathcal{M}}) &= \beta_1(X) + O(\widehat{\mathcal{L}}), \\ \alpha_i\left(\frac{\mathcal{M}}{3\mathcal{L}^2}\right) &= \alpha_i(T) + \frac{2}{3}Y\alpha'_i(T)\mathcal{L}^{-1} + \left(\frac{1}{3}\phi_1\alpha'_i(T) + \frac{2}{9}Y^2\alpha''_i(T)\right)\mathcal{L}^{-2} + \\ &+ \left(\frac{2}{9}\phi_1Y\alpha''_i(T) + \frac{4}{81}\alpha'''_i(T)Y^3\right)\mathcal{L}^{-3} + O(\mathcal{L}^{-4}),\end{aligned}$$

что вместе с выражением (17) задает дополнительные потоки для U :

$$\begin{aligned}\widehat{F}_1: \quad & \frac{\partial U}{\partial s} = \beta_1(X) \frac{\partial U}{\partial X} - \beta'_1(X)U, \\ F_2: \quad & \frac{\partial U}{\partial s} = \alpha_2(T) \frac{\partial U}{\partial Y}, \\ F_3: \quad & \frac{\partial U}{\partial s} = \alpha_3(T) \frac{\partial U}{\partial T} + \frac{2}{3}Y\alpha'_3(T) \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{1}{3}\alpha'_3(T)U.\end{aligned}$$

Налагая начальное условие $U(0 | X, Y, T) = U(X, Y, T)$, можно решить эти ДУЧП первого порядка:

$$\begin{aligned}\widehat{F}_1: \quad & U(s | X, Y, T) = (\widetilde{X}')^{-1}U(\widetilde{X}, Y, T), \\ F_2: \quad & U(s | X, Y, T) = U(X, Y + s\alpha_2(T), T), \\ F_3: \quad & U(s | X, Y, T) = (\widetilde{T}')^{1/3}U(X, Y(\widetilde{T}')^{2/3}, \widetilde{T}),\end{aligned}\tag{19}$$

где $\tilde{X}(s, X)$ и $\tilde{T}(s, T)$ неявно заданы формулами

$$\int^{\tilde{X}(s, X)} \frac{dz}{\beta_1(z)} = s + \int^X \frac{dz}{\beta_1(z)}, \quad \int^{\tilde{T}(s, T)} \frac{dz}{\alpha_3(z)} = s + \int^T \frac{dz}{\alpha_3(z)} \quad (20)$$

и $\tilde{X}' = \partial\tilde{X}/\partial X$, $\tilde{T}' = \partial\tilde{T}/\partial T$. Формулы (19) задают однопараметрическое семейство решений уравнения бДим (3). Заметим, что второе и третье из решений (19) недавно были представлены в работе [13], в то время как первое решение, задаваемое $\hat{F}_1$, совершенно новое.

Случай (1, 2)-обрезания. В этом случае примарная переменная U зависит только от параметров $\hat{T}_1$, $\hat{T}_{-1} = X$ и $T_2 = Y$. Генераторы симметрий имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{F}_{-1} &= \beta_{-1}(-\hat{\mathcal{M}}\hat{\mathcal{L}}^2)\hat{\mathcal{L}}^{-1} = \beta_{-1}(\hat{T}_1)\hat{\mathcal{L}}^{-1} - X\beta'_{-1}(\hat{T}_1)\hat{\mathcal{L}} + O(\hat{\mathcal{L}}^2), \\ \hat{F}_0 &= \beta_0(-\hat{\mathcal{M}}\hat{\mathcal{L}}^2) = \beta_0(\hat{T}_1) - X\beta'_0(\hat{T}_1)\hat{\mathcal{L}}^2 + O(\hat{\mathcal{L}}^3), \\ \hat{F}_1 &= \beta_1(-\hat{\mathcal{M}}\hat{\mathcal{L}}^2)\hat{\mathcal{L}} = \beta_1(\hat{T}_1)\hat{\mathcal{L}} + O(\hat{\mathcal{L}}^3), \\ F_2 &= \alpha_2\left(\frac{\mathcal{M}}{2\mathcal{L}}\right)\mathcal{L}^2 = \alpha_2(Y)\mathcal{L}^2 + \frac{1}{2}\alpha'_2(Y)\phi_1\mathcal{L} + \frac{1}{8}\alpha''_2(Y)\phi_1^2 + O(\mathcal{L}^{-1}), \end{aligned}$$

где произвольные функции β_i , $i = -1, 0, 1$, и α_2 предполагаются аналитическими вблизи соответствующих точек $\hat{T}_1$ и Y . Соответствующие дополнительные потоки для U имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{F}_{-1}: \quad & \frac{\partial U}{\partial s} = \beta_{-1}(\hat{T}_1)\hat{\partial}_1 U + \beta'_{-1}(\hat{T}_1)(U - XU_X), \\ \hat{F}_0: \quad & \frac{\partial U}{\partial s} = 0, \\ \hat{F}_1: \quad & \frac{\partial U}{\partial s} = \beta_1(\hat{T}_1)U_X, \\ F_2: \quad & \frac{\partial U}{\partial s} = \alpha_2(Y)\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{1}{2}\alpha'_2(Y)U, \end{aligned}$$

что можно решить в виде

$$\begin{aligned} \hat{F}_{-1}: \quad & U(s | X, Y, \hat{T}_1) = (\tilde{\hat{T}}'_1)U(X(\tilde{\hat{T}}'_1)^{-1}, Y, \tilde{\hat{T}}_1), \\ \hat{F}_0: \quad & U(s | X, Y, \hat{T}_1) = U(X, Y, \hat{T}_1), \\ \hat{F}_1: \quad & U(s | X, Y, \hat{T}_1) = U(X + s\beta_1(\hat{T}_1), Y, \hat{T}_1), \\ F_2: \quad & U(s | X, Y, \hat{T}_1) = (\tilde{Y}')^{1/2}U(X, \tilde{Y}, \hat{T}_1). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $\tilde{\hat{T}}_1(s, \hat{T}_1)$ и $\tilde{Y}(s, Y)$ неявно задаются формулами

$$\int^{\tilde{\hat{T}}_1(s, \hat{T}_1)} \frac{dz}{\beta_{-1}(z)} = s + \int^{\hat{T}_1} \frac{dz}{\beta_{-1}(z)}, \quad \int^{\tilde{Y}(s, Y)} \frac{dz}{\alpha_2(z)} = s + \int^Y \frac{dz}{\alpha_2(z)} \quad (22)$$

и $\tilde{\hat{T}}'_1 = \partial\tilde{\hat{T}}_1/\partial\hat{T}_1$, $\tilde{Y}' = \partial\tilde{Y}/\partial Y$. Решения (21) (кроме тривиального, задаваемого $\hat{F}_0$) задают однопараметрическое семейство решений уравнения рбДим (7).

Так как формулы (18), (19) и (21) связывают между собой два решения уравнения бДим (или рбДим), их можно рассматривать как преобразования Беклунда системы. Для каждого типа обрезания композиция любых двух преобразований Беклунда оказывается преобразованием Беклунда того же типа обрезания. В частности, ввиду коммутативности подалгебры дополнительных симметрий преобразования Беклунда $\widehat{F}$ -типа и F -типа удовлетворяют следующей коммутативной диаграмме преобразований:

$$\begin{array}{ccc}
 & U(s \mid X, Y, T) & \\
 \widehat{F} \nearrow & & \searrow F \\
 U(X, Y, T) & & U(s, t \mid X, Y, T) = U(t, s \mid X, Y, T) \\
 F \searrow & & \nearrow \widehat{F} \\
 & U(t \mid X, Y, T) &
 \end{array}$$

6. ПРИМЕРЫ

В этом разделе приведены несколько примеров, иллюстрирующих применение преобразований Беклунда. Во-первых, покажем, что вышеприведенные преобразования Беклунда описывают те решения $(1+1)$ - и $(2+1)$ -мерных уравнений бДим, которые обнаруживаются в $\bar{\partial}$ -подходе [15].

ПРИМЕР 1. Применяя преобразование Беклунда типа $\widehat{F}_1$ в случае $(2, 0)$ -обрезания, получим

$$U(s \mid X, Y, T) = (\tilde{X}'(s, X))^{-1} U(\tilde{X}(s, X), Y, T).$$

Выбирая тривиальное решение $U = X$ уравнения бДим, имеем

$$U(s \mid X, Y, T) = (f'(s, X))^{-1} f(s, X) = [(\ln f(s, X))']^{-1},$$

где $f(s, X)$ – произвольная функция от X . При $f(s, X) = e^{g(s, X)}$ воспроизводится решение (ср. пример 1 в работе [15])

$$U(s \mid X, Y, T) = \frac{1}{g'(s, X)}.$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим преобразование Беклунда $\widehat{F}_1$ с последующим преобразованием F_2 в случае $(1, 0)$ -обрезания. При этом получим преобразованное решение

$$U(s, t \mid X, Y, T) = (\tilde{X}')^{-1} (\tilde{Y}')^{1/2} U(\tilde{X}, \tilde{Y}, T).$$

Выбирая решение уравнения бДим в виде $U = XY$, получим

$$\begin{aligned}
 U(s, t \mid X, Y, T) &= (c'(s, X))^{-1} (w'(t, Y))^{1/2} c(s, X) w(t, Y) = \\
 &= \frac{[(w^3(t, Y))'/3]^{1/2}}{[\ln c(s, X)]'},
 \end{aligned}$$

где $c(s, X)$ и $w(t, Y)$ – произвольные функции от соответствующих переменных X и Y . Если положить $g(s, X) = \ln c(s, X)$ и $W(t, Y) = -\ln((w^3(t, Y))'/3)^{1/2}$, то получается решение (ср. пример 2 в работе [15])

$$U(s, t | X, Y, T) = \frac{e^{-W(t, Y)}}{g'(s, X)}.$$

ПРИМЕР 3. Применяя преобразование Беклунда (19), порождаемое $\hat{F}_1$ и F_3 в случае $(2, 0)$ -обрезания, получим преобразованное решение

$$U(s, t | X, Y, T) = (\tilde{X}')^{-1}(\tilde{T}')^{1/3}U(\tilde{X}, (\tilde{T}')^{2/3}Y, \tilde{T}).$$

Выбирая решение $U = XT$ для уравнения бДим, получим

$$\begin{aligned} U(s, t | X, Y, T) &= (c'(s, X))^{-1}(w'(t, T))^{1/3}c(s, X)w(t, T) = \\ &= \frac{[(w^4(t, T))'/4]^{1/3}}{[\ln c(s, X)]'}, \end{aligned}$$

где $c(s, X)$ и $w(t, T)$ – произвольные функции от соответствующих переменных X и T . Если положить $C(s, X) = \ln c(s, X)$ и $W(t, T) = -\ln((w^4(t, T))'/4)^{1/3}$, то приходим к решению (ср. пример 3 в работе [15])

$$U(s, t | X, Y, T) = \frac{e^{-W(t, T)}}{C'(s, X)}.$$

Теперь используем преобразования Беклунда для того, чтобы построить новые явные решения уравнения бДим (или рбДим), исходя из старых.

ПРИМЕР 4. Рассматривая преобразование Беклунда, порожденное $\hat{F}_1$ и F_2 в (19), получим преобразованное решение

$$U(s, t | X, Y, T) = (\tilde{X}'(s, X))^{-1}U(\tilde{X}(s, X), Y + t\alpha_2(T), T). \quad (23)$$

Если имеется решение типа годографа для $(2 + 1)$ -мерного уравнения бДим [11]

$$U(X, Y, T) = -\frac{1}{2}(X - Y + \sqrt{(X - Y)^2 + 3T}),$$

то, применяя преобразование Беклунда (23), получим

$$U(s, t | X, Y, T) = -\frac{1}{2f_X(s, X)}\left(f(s, X) - Y - t\alpha_2(T) + \sqrt{(f(s, X) - Y - t\alpha_2(T))^2 + 3T}\right), \quad (24)$$

где $f(s, X) \equiv \tilde{X}(s, X)$ задается формулами (20), а $\beta_1(X)$ и $\alpha_2(T)$ – произвольные функции с хорошим поведением относительно соответствующих переменных X и T . Тем самым мы получаем двухпараметрическое семейство решений $(2 + 1)$ -мерного уравнения бДим (3).

ПРИМЕР 5. Чтобы построить явные решения уравнения рбДим (7), попробуем использовать генераторы $\hat{F}_{-1}$ и F_2 (1, 2)-обрезания. В силу соотношения (21) преобразованное решение имеет вид

$$U(s, t | X, Y, \hat{T}_1) = (\tilde{\hat{T}}_1(t, \hat{T}_1))(\tilde{Y}'(s, Y))^{1/2} U(X(\tilde{\hat{T}}_1(t, \hat{T}_1))^{-1}, \tilde{Y}(s, Y), \tilde{\hat{T}}_1(t, \hat{T}_1)). \quad (25)$$

Выберем простое затравочное решение $(2 + 1)$ -мерного уравнения рбДим

$$U(X, Y, \hat{T}_1) = X + Y + \hat{T}_1,$$

которое после преобразования Беклунда (25) принимает вид

$$U(s, t | X, Y, \hat{T}_1) = \frac{\partial g(t, \hat{T}_1)}{\partial \hat{T}_1} \left(\frac{\partial h(s, Y)}{\partial Y} \right)^{1/2} \left(\left(\frac{\partial g(t, \hat{T}_1)}{\partial \hat{T}_1} \right)^{-1} X + h(s, Y) + g(s, \hat{T}_1) \right),$$

где функции $h(s, Y) \equiv \tilde{Y}(s, Y)$ и $g(t, \hat{T}_1) \equiv \tilde{\hat{T}}_1(t, \hat{T}_1)$ задаются формулами (22), а $\alpha_2(Y)$ и $\beta_{-1}(\hat{T}_1)$ – произвольные (но хорошие) функции соответствующих переменных Y и $\hat{T}_1$.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В статье сформулирован подход одевающих операторов в иерархии рбДим, обеспечивающий удобный взгляд на дополнительные симметрии, связанные с пространством решений иерархии рбДим с использованием метода твисторной конструкции. Мы показали, что дополнительные симметрии образуют структуру w -алгебры и задают однопараметрическое семейство решений иерархии. Для (r, q) -обрезанных систем явно построены соответствующие дополнительные потоки и преобразования Беклунда для $(2 + 1)$ -мерного уравнения бДим и его расширения.

Благодарности. Авторы благодарны проф. Ц. Ч. Шоу за гостеприимство в National Chiao-Tung University, где была выполнена большая часть работы, а также Ч. Р. Ли, Н. Ч. Ли, Ц. Ч. Шоу, Л. П. Тео и Д. Ч. Ву за обсуждения. Работа была частично поддержана National Science Council of Taiwan (гранты № NSC95-2115-M-014-001 (Цзень-Ху Чан) и NSC95-2112-M-194-005-MY2 (Мин-Хсиень Ту)).

Список литературы

- [1] H. W. Braden, I. M. Krichever (eds.), *Integrability: the Seiberg–Witten and Whitham Equations*, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000; N. M. Ercolani, I. R. Gabitov, C. D. Levermore, D. Serre (eds.), *Singular Limits of Dispersive Waves*, Proc. NATO Adv. Res. Workshop (Lyon, France, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B. Phys., **320**, Plenum, New York, 1994; K. Takasaki, T. Takebe, *Lett. Math. Phys.*, **23** (1991), 205; **28** (1993), 165; *Int. J. Mod. Phys. A*, **7**:Suppl.01B (1992), 889.
- [2] Y. Kodama, *Phys. Lett. A*, **129** (1988), 223; Y. Kodama, J. Gibbons, *Phys. Lett. A*, **135** (1989), 167; I. Krichever, *Commun. Math. Phys.*, **143** (1992), 415.
- [3] B. A. Kupershmidt, *J. Phys. A*, **23** (1990), 871.
- [4] K. Takasaki, T. Takebe, *Rev. Math. Phys.*, **7** (1995), 743.
- [5] L.-C. Li, *Commun. Math. Phys.*, **203** (1999), 573.

- [6] B. G. Konopelchenko, V. G. Dubrovsky, *Phys. Lett. A*, **102** (1984), 15.
- [7] М. А. Семенов-Тянь-Шанский, *Функци. анализ и его прилож.*, **17**:4 (1983), 17.
- [8] J.-H. Chang, M.-H. Tu, *J. Math. Phys.*, **41** (2000), 5391.
- [9] M. Błaszak, *Phys. Lett. A*, **297** (2002), 191; M. Błaszak, B. M. Szablikowski, *J. Phys. A*, **35** (2002), 10325; 10345; Y.-T. Chen, M.-H. Tu, *Lett. Math. Phys.*, **63** (2003), 125.
- [10] Y.-T. Chen, N.-C. Lee, M.-H. Tu, *Phys. Lett. A*, **335** (2005), 157.
- [11] Y.-T. Chen, M.-H. Tu, *J. Phys. A*, **36** (2003), 9875.
- [12] Y.-T. Chen, M.-H. Tu, *Lett. Math. Phys.*, **65** (2003), 109.
- [13] M. Mañas, *J. Phys. A*, **37** (2004), 9195.
- [14] M. Mañas, *J. Phys. A*, **37** (2004), 11191.
- [15] D. Wu, M.-H. Tu, Y.-T. Chen, J. H. Chang, *J. Phys. A*, **38** (2005), 6167.
- [16] L. A. Dickey, *Soliton Equations and Hamiltonian Systems*, Adv. Ser. Math. Phys., **26**, World Sci. Publ., Singapore, 2003; A. Yu. Orlov, E. I. Schulman, *Lett. Math. Phys.*, **12** (1986), 171.
- [17] L. Martínez Alonso, M. Mañas, *J. Math. Phys.*, **44** (2003), 3294.
- [18] I. Bakas, *Commun. Math. Phys.*, **134** (1990), 487.