Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Васильев, О. В. Шейнкман, Скалярное поле в произвольной размерности с точки зрения калибровочной теории высших спинов, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 2, 323–344

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf607>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 07:09:10

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ ВЫСШИХ СПИНОВ

Уравнения движения свободного скалярного поля в плоском и AdS -пространствах произвольной размерности сформулированы как условия ковариантного постоянства. Показано, что уравнение Клейна–Гордона допускает интерпретацию в терминах нетривиальной когомологии определенного “ σ_- -комплекса”. Действие скалярного поля сформулировано в терминах ковариантных производных высших спинов для случая скалярного поля ненулевой массы в плоском пространстве и для случая произвольной массы в пространстве AdS_d . Показано, что построенное действие на квадратичном уровне эквивалентно стандартному действию Клейна–Гордона первого порядка, но приводит к другим взаимодействиям из-за наличия бесконечного набора вспомогательных полей, не дающих вклада на свободном уровне. Подробно рассматривается пример янг-миллсовского токового взаимодействия. В частности, показано, как предложенное действие порождает псевдолокально-точную форму тока материи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Михаил Владимирович Савельев был блестящим ученым, внесшим фундаментальный вклад в теорию интегрируемых систем. Миша всегда был открыт для научных дискуссий и охотно делился с коллегами своими знаниями. Занимаясь в основном теорией двумерных интегрируемых систем, в течение последних лет Савельев стал интересоваться приложением своих идей к изучению релятивистских суперсимметричных моделей в высших размерностях [1], которые, как он верил, возможно, в некотором смысле являются точно решаемыми. Вопрос о том, насколько его ожидания были верны, пока остается открытым.

Целью данной работы является переформулировка простейшей релятивистской модели скалярного поля в произвольной размерности d в духе теории калибровочных полей высших спинов. До сих пор нелинейная теория калибровочных полей высших спинов была развита в основном для $d \leq 4$ (см. [2, 3] и содержащуюся там библиографию). Из анализа этих специальных случаев известно, что в основе калибровочных теорий

*Физический институт им. П. Н. Лебедева, Отдел теоретической физики им. И. Е. Тамма, Москва, Россия. E-mail: vasiliev@lpi.ru, shayn@lpi.ru

высших спинов лежат определенные бесконечномерные симметрии – симметрии высших спинов, а все безмассовые поля со спином $s \geq 1$ являются калибровочными. В рамках формализма, разработанного в работе [4], динамические уравнения для $d = 4$ имеют форму условий нулевой кривизны и ковариантного постоянства, дополненных определенными связями. Вопрос о том, служит ли это указанием на интегрируемость четырехмерных моделей высших спинов пока остается открытым. Предложенная в данной работе переформулировка динамики скалярного поля полезна в качестве отправной точки для поиска неизвестной пока бесконечномерной симметрии высших спинов в произвольной размерности. Она также проясняет некоторые особенности взаимодействия в теории высших спинов.

Принцип действия, совместный с калибровочными симметриями высших спинов и общекоординатной ковариантностью, был сформулирован для AdS_4 (пространство анти-де-Ситтер размерности 4) [5] в младшем нетривиальном порядке по взаимодействию, тем самым разрешив проблему введения непротиворечивого гравитационного взаимодействия калибровочных полей высших спинов в кубическом порядке по взаимодействию. Однако кубическое действие, найденное в [5], не полно и требует дальнейшей модификации в высших порядках по взаимодействию. Действительно, хорошо известно, что непротиворечивость кубического взаимодействия не гарантирует того, что теория допускает непротиворечивое расширение за рамки кубического приближения. Например, на кубическом уровне можно рассмотреть любое число N полей спина $3/2$ (гравитино), взаимодействующих с гравитоном, но выйти за кубический уровень удастся только для $N \leq 8$ со специфическими наборами полей, образующими супергравитационные супермультиплеты со спинами $s \leq 2$. Реальный спектр полей удастся фиксировать только в четвертом порядке по взаимодействию. Взаимодействия спинов выше третьего порядка изучались на уровне уравнений движения в работах [4, 6]. Благодаря этим результатам, а также анализу унитарных представлений старшего веса алгебр высших спинов (т.е. мультиплетов высших спинов) [7], известно, что спектры спинов полных теорий высших спинов содержат поля с младшими спинами 1, $1/2$ и 0. Одна из целей данной работы состоит в построении действия спина 0, аналогичного по форме действиям спинов $s > 1$, использовавшихся в [5] в качестве отправной точки для описания полного действия высших спинов. Как показано в [5], ненарушенная симметрия высших спинов требует не плоской геометрии, а AdS -геометрии. Поэтому мы рассматриваем задачу как на плоском, так и на AdS -фоне.

Бесконечномерные симметрии высших спинов перемешивают старшие производные всех порядков от динамических полей. Для того чтобы сделать эти симметрии явными, полезно переформулировать динамику в терминах соответствующих ковариантных производных высших спинов $DC^A(x)$. Представление $C^A(x)$ симметрии высших спинов содержит бесконечное число компонент (индекс A), большая часть которых выражается через старшие производные динамических полей с помощью связей. В терминах ковариантной производной DC мы сформулируем принцип действия для свободного скалярного поля произвольной массы m в пространстве AdS_d и для поля массы $m \neq 0$ в плоском пространстве. Так как старшие компоненты представления C^A не дают вклада в по-

строенное действие на свободном уровне, то, будучи действием первого порядка по производным, оно оказывается эквивалентным стандартному действию Клейна–Гордона первого порядка. Предложенное действие отличается, однако, от стандартного на уровне взаимодействия. В частности, в рамках этого подхода оказывается, что минимальное янг-миллсовское взаимодействие для скалярного поля дополняется некоторыми взаимодействиями с янг-миллсовской напряженностью, содержащими бесконечный ряд по старшим производным скалярного поля с коэффициентами, пропорциональными обратным степеням массы или космологической постоянной. Непосредственным следствием предложенной формулировки является демонстрация того, что ток Янга–Миллса, построенный из скалярных полей, может быть скомпенсирован псевдолокальной заменой переменных. Данный факт обобщает на случай произвольной размерности результат [8], полученный для $3d$ -моделей высших спинов и показывающий, что сохраняющиеся токи в пространстве AdS_3 псевдолокально-точны. Следует отметить некоторый параллелизм между полученными здесь результатами и описанием непротиворечивого взаимодействия массивных полей высших спинов с гравитацией [9, 10], требующего бесконечного разложения по отрицательным степеням массы на уровне действия. Излишне говорить, что такая картина напоминает разложение по α' для массивных мод в теории струн.

В разделе 2 уравнения движения для скалярного поля произвольной массы в плоском пространстве сформулированы в “развернутой” форме условий ковариантного постоянства. Эти результаты обобщаются на пространство AdS_d в разделе 3. В разделе 4 уравнения Клейна–Гордона интерпретируются в терминах σ_- -когомологии. В разделе 5 получено действие для скалярного поля, сформулированное в терминах ковариантных производных высших спинов, введенных в разделах 2 и 3. Формулировка на языке пространства Фока вводится в разделе 6. Особенности взаимодействия скалярного поля, описываемого действием из раздела 5, с полем Янга–Миллса обсуждаются в разделе 7. В разделе 8 условия ковариантного постоянства из разделов 2 и 3 обобщаются на систему вне массовой оболочки. Раздел 9 содержит некоторые заключения.

2. “РАЗВЕРНУТАЯ” ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для того чтобы описать свободное безмассовое скалярное поле $c(x)$ размерности d , рассмотрим набор симметричных бесследовых тензоров всех рангов $C(x) = (c(x), \dots, c^{n(k)}(x), \dots)$,

$$\eta_{nn} c^{n(k+2)} = 0, \quad (2.1)$$

где $n, \dots = 0, \dots, d-1$ и η^{nm} – плоская метрика, $\eta^{nm} = (1, -1, \dots, -1)$. Мы будем использовать обозначения работы [11], т.к. они удобны для покомпонентного анализа сложных тензорных структур. А именно верхние и нижние индексы, обозначаемые одним символом, должны быть вначале симметризованы (раздельно), а затем максимально возможное число их должно быть свернуто; количество индексов будем записывать в скобках, например будем писать $n(k)$ вместо k -кратного повторения индекса n . Подчеркнутые латинские индексы используются для дифференциальных форм и векторных

полей в d -мерном пространстве-времени с координатами $x^{\underline{n}}$,

$$\underline{n}, \dots = 0, \dots, d-1, \quad \partial_{\underline{n}} = \frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}, \quad d = dx^{\underline{n}} \partial_{\underline{n}}. \quad (2.2)$$

В качестве индексов слоя используются буквы из середины латинского алфавита.

Как показано в [2], уравнения движения для свободного безмассового скалярного поля $c(x)$ в плоском d -мерном пространстве-времени могут быть записаны в виде бесконечной цепочки уравнений

$$\partial_{\underline{n}} c_{n(k)} + e_{\underline{n}}^m c_{n(k)m} = 0, \quad (2.3)$$

где $e_{\underline{n}}^m$ – плоская тетрада. Такая форма динамических уравнений, выражающая все производные через входящие в нее поля, была названа “развернутой” [12]. В плоском пространстве можно положить $e_{\underline{n}}^m = \delta_{\underline{n}}^m$ и не различать подчеркнутые (база) и неподчеркнутые (слой) индексы.

Первые два уравнения в (2.3) имеют вид

$$\partial_{\underline{n}} c = -c_{\underline{n}}, \quad (2.4)$$

$$\partial_{\underline{n}} c_{\underline{m}} = -c_{\underline{n}\underline{m}}. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4) выражает $c_{\underline{n}}$ через производную от c . Тогда из (2.5) следует, что $c_{\underline{n}\underline{m}}$ – вторая производная c . Учитывая условие бесследовости

$$c_n{}^n = 0, \quad (2.6)$$

получаем уравнение Клейна–Гордона

$$\square c = 0. \quad (2.7)$$

Остальные уравнения в (2.3) выражают старшие тензоры $c_{n(k)}$ через производные высших порядков

$$c_{\underline{n}_1 \dots \underline{n}_k} = (-1)^k \partial_{\underline{n}_1} \dots \partial_{\underline{n}_k} c \quad (2.8)$$

и не накладывают новых условий на c . При этом условия бесследовости (2.1) для тензоров старших рангов выполнены, если выполнено уравнение Клейна–Гордона (2.7).

Обозначим через T_k^p линейное пространство p -форм, принимающих значения в пространстве симметричных бесследовых тензоров ранга k , т.е. общий элемент из T_k^p имеет вид $c^{n(k)} = dx^{\underline{m}_1} \wedge \dots \wedge dx^{\underline{m}_p} c_{\underline{m}_1 \dots \underline{m}_p}{}^{n(k)}$, причем $c_n{}^{n(k-1)} = 0$. Тогда

$$T^p = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus T_k^p$$

есть линейное пространство p -форм, принимающих значения в пространстве всех симметричных бесследовых тензоров.

Рассмотрим оператор

$$\sigma_-: T_k^p \rightarrow T_{k-1}^{p+1}, \quad (2.9)$$

$$(\sigma_- C)^{n(k-1)} = e_m \wedge c^{n(k-1)m}, \quad \sigma_-(T_0^p) = 0, \quad (2.10)$$

где e_n – 1-форма тетрады $e^n = dx^n e_n$. В плоском пространстве можно положить $e^n = dx^n \delta_n^n = dx^n$. Оператор σ_- обладает следующими свойствами:

$$(\sigma_-)^2 = 0, \quad \sigma_- d + d\sigma_- = 0. \quad (2.11)$$

В этих обозначениях цепочка уравнений (2.3) принимает вид

$$(d + \sigma_-)C = 0. \quad (2.12)$$

Условие совместности этой системы $(d + \sigma_-)^2 = 0$ является следствием свойств (2.11).

Рассмотрим вопрос о единственности уравнения (2.12) в классе уравнений, сформулированных в пространстве T^p с использованием внешнего дифференциала и 1-формы тетрады. Требованию лоренц-инвариантности удовлетворяют только уравнения вида

$$\mathcal{D}C = 0, \quad (2.13)$$

$$\mathcal{D} = d + \sigma_- + \sigma_+, \quad (2.14)$$

где $\sigma_+: T_k^p \rightarrow T_{k+1}^{p+1}$ – новый оператор вида

$$(\sigma_+ C)^{n(k+1)} = f(k) P_\perp (e^n c^{n(k)}), \quad (2.15)$$

$f(k)$ – неизвестный коэффициент, а $P_\perp$ – проектор на подпространство бесследовых тензоров, т.е.

$$(\sigma_+ C)^{n(k+1)} = f(k) \left(e^n c^{n(k)} - \frac{k}{d+2(k-1)} \eta^{nn} e_m c^{n(k-1)m} \right). \quad (2.16)$$

Условие совместности

$$\mathcal{D}^2 = 0 \quad (2.17)$$

в дополнение к (2.11) накладывает ограничения на оператор σ_+ ,

$$\sigma_+ d + d\sigma_+ = 0, \quad (2.18)$$

$$\sigma_+ \sigma_+ = 0, \quad (2.19)$$

$$\{\sigma_+, \sigma_-\} = 0. \quad (2.20)$$

Первые два условия выполняются тривиально, а из третьего следуют уравнения на коэффициенты $f(k)$:

$$f(k) = \frac{(k+1)(d+2(k-1))}{k(d+2k)} f(k-1). \quad (2.21)$$

Общее решение уравнений (2.21) имеет вид

$$f(k) = -m^2 \frac{k+1}{2k+d}, \quad (2.22)$$

где m^2 – произвольная постоянная.

Первые два уравнения цепочки (2.13) дают

$$\partial_{\underline{n}} c + e_{\underline{n}}^m c_m = 0, \quad (2.23)$$

$$\partial_{\underline{n}} c_n + e_{\underline{n}}^m c_{nm} - \frac{m^2}{d} e_{\underline{n}n} c = 0. \quad (2.24)$$

Сворачивая индексы в уравнении (2.24) и подставляя c_n из (2.23), получаем

$$(\square + m^2)c = 0. \quad (2.25)$$

Таким образом произвол в коэффициенте $f(k)$ выражает произвол в параметре массы в уравнении Клейна–Гордона, переформулированном в форме (2.13). Эквивалентная формулировка для массивного скалярного поля в плоском пространстве произвольной размерности была дана в статье [13]. Заметим, что соотношения (2.8) одинаковы для любого значения m^2 .

3. “РАЗВЕРНУТЫЕ” УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В AdS_d -ПРОСТРАНСТВЕ

Для того чтобы обобщить полученные результаты на пространство AdS_d , рассмотрим калибровочные поля $A_{\underline{n}}^{MN} = -A_{\underline{n}}^{NM}$ для AdS_d алгебры $o(d-1, 2)$ ($M, N = 0, \dots, d$). Положим $\omega_{\underline{n}}^{nm} = A_{\underline{n}}^{nm}$, а $e_{\underline{n}}^n = \lambda^{-1} A_{\underline{n}}^{nd}$, где λ – некоторая постоянная. Тогда $o(d-1, 2)$ -напряженность Янга–Миллса приобретает вид

$$R_{\underline{nm}}^{nm} = \partial_{\underline{n}} \omega_{\underline{m}}^{nm} + \omega_{\underline{n}}^n{}_t \omega_{\underline{m}}^{tm} - \lambda^2 e_{\underline{n}}^n e_{\underline{m}}^m - (\underline{n} \leftrightarrow \underline{m}), \quad (3.1)$$

$$R_{\underline{nm}}^n = \lambda \partial_{\underline{n}} e_{\underline{m}}^n + \lambda \omega_{\underline{n}}^n{}_m e_{\underline{m}}^m - (\underline{n} \leftrightarrow \underline{m}). \quad (3.2)$$

Поля $e_{\underline{n}}^n$ и $\omega_{\underline{n}}^{nm}$ соответствуют тетраде и спиновой связности. При условии, что $\det |e_{\underline{n}}^n| \neq 0$, 2-формы $\lambda^{-1} R_{\underline{nm}}^n$ и $R_{\underline{nm}}^{nm}$ соответствуют кручению и тензору кривизны Римана (с добавленным “космологическим членом”, пропорциональным λ^2) в тетрадной формулировке гравитации. Уравнения

$$R_{\underline{nm}}^{nm} = 0 \quad (3.3)$$

и

$$R_{\underline{nm}}^n = 0 \quad (3.4)$$

описывают d -мерное AdS -пространство радиуса λ^{-1} .

В тетрадном формализме лоренцева ковариантная производная определяется следующим образом:

$$D_{\underline{n}} f^{nm\dots} = \partial_{\underline{n}} f^{nm\dots} + \omega_{\underline{n}}^{\quad n}{}_t f^{tm\dots} + \omega_{\underline{n}}^{\quad m}{}_t f^{nt\dots} + \dots \quad (3.5)$$

Из (3.1) и (3.3) следует, что в пространстве AdS_d

$$[D_{\underline{n}}, D_{\underline{m}}](f^{nm\dots}) = \lambda^2 (e_{\underline{n}}^{\quad n} e_{\underline{m}t} f^{tm\dots} + e_{\underline{n}}^{\quad m} e_{\underline{m}t} f^{nt\dots} + \dots) - (\underline{n} \leftrightarrow \underline{m}). \quad (3.6)$$

Для того чтобы обобщить уравнение скалярного поля (2.13) на случай пространства AdS_d , положим

$$\mathcal{D} = D + \sigma_- + \sigma_+, \quad (3.7)$$

где $D = dx^{\underline{n}} D_{\underline{n}}$, а σ_+ — некоторый новый оператор. Условие совместности $\mathcal{D}^2 = 0$ в AdS_d -случае накладывает те же ограничения (2.11), (2.18), (2.19) на операторы σ_- и σ_+ . Условие же (2.20) в силу (3.6) заменяется на условие

$$(\{\sigma_+, \sigma_-\}C)^{n(k)} = -(DD(C))^{n(k)} = -k\lambda^2 e^n \wedge e_m c^{n(k-1)m}. \quad (3.8)$$

Снова выбирая σ_- и σ_+ в форме (2.10) и (2.15), получаем, что условие (3.8) приводит к следующему уравнению для $f(k)$:

$$f(k) = \frac{(k+1)(d+2(k-1))}{k(d+2k)} (f(k-1) + k\lambda^2). \quad (3.9)$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$f(k) = \frac{k+1}{2k+d} (\lambda^2 k(k+d-1) - m^2), \quad (3.10)$$

где m^2 — произвольный параметр, соответствующий решению однородной части уравнения (3.9). Аналогично плоскому случаю из первых двух уравнений цепочки (2.13) получаем уравнение Клейна–Гордона для массивного поля¹⁾

$$(\square + m^2)c = 0, \quad \square = \eta_{nm} D^n D^m \quad (3.11)$$

и

$$c^n = -D^n c, \quad (3.12)$$

где $D^n = e^{\underline{n}n} D_{\underline{n}}$ ($e_{\underline{n}}^{\quad n} e_{\underline{m}}^{\quad n} = \delta_{\underline{m}}^{\underline{n}}$). Из оставшихся уравнений цепочки следуют “ AdS -ковариантизованные” соотношения (2.8)

$$c^{n_1 \dots n_k} = (-1)^k P_{\perp} D^{n_1} \dots D^{n_k} c. \quad (3.13)$$

¹⁾ Следует отметить, что существует несколько конкурирующих определений безмассового скалярного поля в AdS_d с $m^2 = m_0^2 \neq 0$. Для безмассового поля, определяемого из требования конформной инвариантности, $m_0^2 = -(\lambda^2/4)d(d-2)$.

Подчеркнем, что система (2.13) не содержит ограничений на c помимо (3.11). Один из способов показать это состоит в анализе кохомологии оператора σ_- (см. раздел 4).

Если некоторая непротиворечивая теория полей всех спинов, обладающая калибровочными симметриями высших спинов, существует, то оператор $\mathcal{D}$ следует интерпретировать как результат линеаризации полных нелинейных ковариантных производных высших спинов в окрестности AdS_d вакуумного решения с вакуумными AdS_d -калибровочными полями, имеющими нулевой порядок малости. Наоборот, форму ковариантной производной (3.7) можно взять в качестве отправной точки для нахождения полной симметрии высших спинов и ее представлений на материальных полях. Такая стратегия оказалась успешной при анализе $d = 4$ динамики высших спинов в [11, 14], начиная с соответствующего обобщения ковариантной производной (3.7) для $d = 4$ безмассовых полей высших спинов. Динамические уравнения в форме (2.13) также являются удобной отправной точкой для построения развернутой формулировки нелинейных уравнений высших спинов (подробнее см. [2]).

4. σ_- -КОГОМОЛОГИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Интересной чертой предложенной формулировки является то, что уравнения движения скалярного поля в плоском и AdS -пространствах допускают естественную интерпретацию в терминах группы кохомологии оператора σ_- . В соответствии с (2.9) оператор σ_- повышает ранг дифференциальной формы, понижая количество тензорных индексов, а также удовлетворяет свойству $\sigma_-^2 = 0$. Мы покажем, что единственная нетривиальная первая группа кохомологии $H^1(\sigma_-)$ оператора σ_-

$$T \xrightarrow{\sigma_-} T^1 \xrightarrow{H^1} T^2 \xrightarrow{\sigma_-} T^3 \quad (4.1)$$

лежит в пространстве T_1^1 и описывает левые части уравнений движения скалярного поля, а связи (2.8) или (3.13) фиксируют конкретных представителей в тривиальном классе.

Рассмотрим ограничение $(DC)|_{T_0^1}$ оператора DC на T_0^1 (т.е. ту часть DC , которая не содержит векторных индексов). По определению σ_- имеем

$$\sigma_-((DC)|_{T_0^1}) = 0. \quad (4.2)$$

Зададимся вопросом, существует ли вектор $y^n \in T_1^0$ такой, что $(DC)|_{T_0^1} = \sigma_-(y)$ или, записывая в компонентах, $D_{\underline{n}}c = e_{\underline{n}n}y^n$. Очевидно, что при условии обратимости тетрады $e_{\underline{n}n}$ решение этого уравнения существует. Таким образом, $H_0^1 = 0$. Поскольку y^n входит в это уравнение так же, как c^n входит в уравнение (2.23), тривиальность H_0^1 означает, что поле c^n всегда можно выбрать таким, чтобы

$$((D + \sigma_-)C)|_{T_0^1} = 0. \quad (4.3)$$

Физически это уравнение интерпретируется как связь (2.23), выражающая c^n через первую производную динамического поля c . Когомологически оно фиксирует представителя в тривиальном классе когомологии c^n в терминах производных динамического поля c . Заметим, что это условие может быть интерпретировано как связь, потому что σ_- не содержит пространственно-временных производных.

Так как $(\sigma_+ C)|_{T_0^1} = 0$, условие (4.3) эквивалентно условию

$$(\mathcal{D}C)|_{T_0^1} = 0. \quad (4.4)$$

Покажем теперь, что $(\mathcal{D}C)|_{T_{k+1}^1}$ σ_- -замкнуто, если

$$(\mathcal{D}C)|_{T_l^1} = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq l \leq k. \quad (4.5)$$

Действительно, поскольку операторы D и σ_+ отображают T_k в T_l , где $l \geq k$, из (4.5) имеем

$$((D + \sigma_+)\mathcal{D}C)|_{T_l^1} = 0 \quad \text{для} \quad l \leq k. \quad (4.6)$$

Тогда из равенства $\mathcal{D}^2 = 0$ следует, что

$$(\sigma_- \mathcal{D}C)|_{T_l^1} = 0 \quad \text{для} \quad l \leq k \quad (4.7)$$

и поэтому

$$\sigma_-((\mathcal{D}C)|_{T_{k+1}^1}) = 0. \quad (4.8)$$

В результате получаем

$$(\mathcal{D}C)|_{T_{k+1}^1} = \sigma_-(y_{k+2}) + h_{k+1}, \quad (4.9)$$

где $\sigma_-(y_{k+2})$ описывает σ_- -точную часть (т.е. тривиальный когомологический класс), а h_{k+1} — представитель нетривиальной группы когомологии H^1 . Очевидно, что σ_- -точную часть можно фиксировать равной нулю с помощью соответствующего выбора поля $c^{n(k+2)}$ в левой части (4.9). Следовательно, можно наложить связь

$$(\mathcal{D}C)|_{T_{k+1}^1} = 0 \quad (4.10)$$

при условии, что группа когомологии равна нулю. Если она отлична от нуля, то уравнение (4.10) накладывает некоторые дифференциальные уравнения на поле $c(x)$.

Найдем группу когомологии H^1 . Для σ_- -замкнутой 1-формы $\hat{c}_{\underline{n}}, {}^{n(k)}$ верно равенство

$$e_{\underline{n}m} \hat{c}_{\underline{m}}, {}^{n(k-1)m} - e_{\underline{m}m} \hat{c}_{\underline{n}}, {}^{n(k-1)m} = 0. \quad (4.11)$$

Поэтому

$$e_{\underline{n}m} \hat{c}_{\underline{m}}, {}^{n(k-1)m} = y_{\underline{n}m}, {}^{n(k-1)}, \quad (4.12)$$

где $y_{\underline{n}m}, {}^{n(k-1)}$ симметрично по индексам $\underline{n}$ и $\underline{m}$ и симметрично и бесследово по индексам $n(k-1)$. В терминах индексов слоя получаем

$$\hat{c}_{m,n(k)} = y_{mn,n(k-1)}. \quad (4.13)$$

Из этого соотношения следует, что $y_{ml,n(k-1)}$ должно быть симметричным по всем индексам и бесследовым при $k \geq 2$. Значит, форма $\hat{c}_{\underline{n}},^{n(k)}$ точна для всех $k \neq 1$. Так как для $y_{\underline{nm}}$ не требуется бесследовости, существует нетривиальный кохомологический класс

$$\hat{c}_{\underline{n}},^n = \alpha e_{\underline{n}},^n \quad (4.14)$$

с произвольным параметром α . Очевидно, что этот элемент σ_- -замкнут, но он не является σ_- -точным, т.к.

$$e_{\underline{n}},^n \neq e_{\underline{n},m} X^{nm} \quad (4.15)$$

ни для какого бесследового X^{nm} . Из результатов разделов 2 и 3 ясно, что требование равенства нулю этой кохомологии в (4.9) эквивалентно наложению уравнения Клейна–Гордона. Тот факт, что все остальные σ_- -группы кохомологии в H^1 тривиальны, означает, что остальные уравнения в цепочке (2.13) и ее AdS -обобщении не содержат никаких других дифференциальных уравнений на поле $c(x)$, а только выражают старшие компоненты $c^{n(k)}$ через производные c .

Таким образом, заключаем, что система (2.13) содержит одно дифференциальное уравнение – уравнение Клейна–Гордона и бесконечный набор связей, выражающих поля $c^{n(k)}$, $k \geq 1$, через производные физического поля c в соответствии с (2.7) и (2.8) в плоском пространстве или (3.11) и (3.13) в пространстве AdS_d .

Заметим, что динамическое поле c представляет собой нетривиальную группу кохомологии H^0 . Действительно, поле c σ_- -замкнуто, но, будучи 0-формой, не может быть σ_- -точной. Подчеркнем, что физическое поле c обязано быть σ_- -замкнутым, чтобы можно было начать анализ уравнений с (4.2).

Одним из следствий этого раздела является то, что для получения цепочки уравнений $\tilde{D}\tilde{C} = 0$, не содержащей дифференциальных ограничений на младшее поле (поля), а только выражающей некоторые из 0-форм $\tilde{C}$ через производные от других, следует так модифицировать постановку задачи, чтобы $\tilde{H}^1 = 0$. Можно ожидать, что такая постановка задачи будет полезной для формулировки нелинейного принципа действия, совместимого со связями, имеющими ковариантную форму $\tilde{D}\tilde{C} = 0$. Для свободного скалярного поля этот подход развит в разделе 8.

5. СВОБОДНОЕ ДЕЙСТВИЕ

В работах [11, 15] было показано, что ковариантные производные “высших спинов”, аналогичные (3.7), могут быть использованы для построения функционалов действия. Такая форма для действия высших спинов использовалась [5] для введения гравитационного взаимодействия высших спинов на кубическом уровне. В этом разделе с помощью ковариантных производных (3.7) будет построено свободное действие для скалярного поля. Естественно ожидать, что такое действие является линеаризацией некоторого полного инвариантного действия, описывающего поля высших и низших спинов и сформулированного в терминах ковариантных производных высших спинов. Можно надеяться, что предлагаемое действие прольет свет на структуру нелинейного действия

высших спинов в произвольной размерности и, в частности, поможет построить полное нелинейное действие для $d = 4$, содержащее материальные поля низших спинов.

Отождествим поля c и c^n с полями действия Клейна–Гордона первого порядка. Рассмотрим вопрос, существует ли действие вида

$$S^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g(k)}{k!} \int_{M_d} e^{m_3} \wedge \dots \wedge e^{m_d} \wedge \epsilon_{m_1 \dots m_d} (\mathcal{D}C)^{m_1 n(k-1)} \wedge (\mathcal{D}C)^{m_2 n(k-1)} \quad (5.1)$$

с некоторыми коэффициентами $g(k)$ (симметризации по m нет) такое, что полученные из него уравнения движения эквивалентны уравнениям поля спина 0 в форме

$$(-D_n c^n + m^2)c = 0, \quad c^n = -D^n c. \quad (5.2)$$

Потребуем также, чтобы

$$\frac{\delta S^2}{\delta c^{n(k)}} \equiv 0 \quad \text{для} \quad k \geq 2. \quad (5.3)$$

С учетом формулы (3.13) последнее условие приобретает естественный смысл требования, чтобы свободное действие не содержало высших производных скалярного поля c .

Чтобы упростить выражения, введем операторы $E: T_k^p \rightarrow T_k^{d+p-2}$ и $N: T_k^p \rightarrow T_k^p$,

$$(EC)^{n(k)} = g(k) e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_{d-2}} \wedge c^{n(k-1)t} \epsilon_t{}^n{}_{m_1 \dots m_{d-2}}, \quad k \geq 1, \quad E(c) = 0, \quad (5.4)$$

$$(NC)^{n(k)} = k c^{n(k)} \quad (5.5)$$

для любой p -формы $c^{n(k)}$. Имеют место следующие элементарные соотношения:

$$\sigma_+ N = (N - 1)\sigma_+, \quad \sigma_- N = (N + 1)\sigma_-, \quad (5.6)$$

$$E\sigma_- = (-1)^d \frac{N+1}{N+d-1} \frac{g(N)}{g(N+1)} \sigma_- E, \quad N \geq 1, \quad (5.7)$$

$$E\sigma_+ = (-1)^d \frac{N+d-2}{N} \frac{g(N)}{g(N-1)} \sigma_+ E, \quad N \geq 2. \quad (5.8)$$

Введем обозначение

$$(C^p, B^q) = \sum_k \frac{1}{k!} c^{n(k)} \wedge b_{n(k)}, \quad (5.9)$$

где $C^p \in T^p$ и $B^q \in T^q$. Тогда выполняются следующие тождества:

$$(C^p, B^q) = (-1)^{pq} (B^q, C^p), \quad (5.10)$$

$$(C^p, EB^q) = (-1)^{pd-1} (EC^p, B^q), \quad (5.11)$$

$$(C^p, \sigma_+ B^q) = (-1)^p \left(\frac{f(N)}{N+1} \sigma_- C^p, B^q \right), \quad (5.12)$$

$$(C^p, \sigma_- B^q) = (-1)^p \left(\frac{N}{f(N-1)} \sigma_+ C^p, B^q \right). \quad (5.13)$$

В новых обозначениях действие (5.1) приобретает вид

$$S^2 = \int_{M_d} (EDC, DC). \quad (5.14)$$

Так как форма (5.9) лоренц-инвариантна, теорема Стокса может быть записана в виде

$$\int_{M_d} (C^p, DB^{d-p-1}) = -(-1)^p \int_{M_d} (DC^p, B^{d-p-1}) + (-1)^p \int_{\partial M_d} (C^p, B^{d-p-1}). \quad (5.15)$$

Локальная вариация действия есть

$$\delta S^2 = \int_{M_d} (EDC, \mathcal{D}\delta C) + \int_{M_d} (E\mathcal{D}\delta C, DC) = 2 \int_{M_d} (EDC, \mathcal{D}\delta C). \quad (5.16)$$

Интегрируя (5.16) по частям, используя определение (3.7) оператора $\mathcal{D}$ и тождества (5.7), (5.8), (5.12) и (5.13), получаем

$$\begin{aligned} \delta S^2 = & (-1)^{d-1} 2 \int_{M_d} \left(\left[\left[\frac{N+d-2}{N} \frac{g(N)}{g(N-1)} + \frac{N}{f(N-1)} \right] \sigma_+ + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[\frac{N+1}{N+d-1} \frac{g(N)}{g(N+1)} + \frac{f(N)}{N+1} \right] \sigma_- \right] EDC, \delta C \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

при условии, что $\delta C = N(N-1)\Upsilon$ с произвольным Υ (т. е. δC не содержит δc и δc^n). Условие равенства нулю этой вариации эквивалентно (5.3). Требуя, чтобы коэффициенты перед σ_- и σ_+ равнялись нулю, получаем набор уравнений на $g(k)$

$$g(k) = -\frac{g(k-1)}{f(k-1)} \frac{k^2}{k+d-2}, \quad (5.18)$$

имеющий единственное решение с точностью до произвольного нормировочного множителя, который удобно фиксировать как

$$g(1) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{m^2}, \quad (5.19)$$

чтобы добиться стандартной нормировки свободного действия скалярного поля.

Подставляя $f(k)$ из (3.10), получим для случая произвольной массы²⁾ в пространстве AdS_d

$$g(k) = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \frac{1}{m^2 \lambda^{2k-2}} \frac{\Gamma(\alpha^+ + 2) \Gamma(\alpha^- + 2)}{\Gamma(k + \alpha^+ + 1) \Gamma(k + \alpha^- + 1)} \frac{d!}{(d-2)!!} \frac{(2k+d-2)!!}{(k+d-2)!} k!, \quad (5.20)$$

²⁾ Для значений масс таких, что $m^2 = \lambda^2 k_0(k_0 + d - 1)$, $k_0 = 0, 1, \dots$, функция $g(k)$ при $k > k_0$ становится бесконечной и формула для действия (5.1) оказывается неприменимой. Эти специальные значения массового параметра аналогичны обнаруженным ранее в [16] для $d = 3$ на уровне уравнений движения. Их появление означает, что в этом случае бесконечные цепочки начинаются не со скаляра c , а с тензора ранга k_0 $c^{n(k_0)}$, так что после соответствующего изменения нормировки действие (5.1) оказывается хорошо определенным. Мы надеемся вернуться к рассмотрению этого интересного вопроса в отдельной публикации.

где

$$\alpha^{\pm} = \frac{1}{2} \left(d - 3 \pm \sqrt{(d-1)^2 + 4 \frac{m^2}{\lambda^2}} \right). \quad (5.21)$$

Для случая плоского пространства с ненулевой массой

$$g(k) = \frac{(-1)^{k-1}}{2m^{2k}} \frac{d!}{(d-2)!!} \frac{(2k+d-2)!!}{(k+d-2)!} k!. \quad (5.22)$$

Функции $g(k)$ таковы, что из (5.7) и (5.12) следует, что σ_- и σ_+ сопряжены по отношению к форме $(E(C), B)$, ограниченной на T_k при $k \geq 2$, т.е.

$$(EC^p, \sigma_+ B^q) = (-1)^{p-1} (E\sigma_- C^p, B^q) \quad \text{для} \quad C^p = N(N-1)\Upsilon^p. \quad (5.23)$$

С помощью этого свойства легко видеть, что $\delta S^2 = 0$ для вариации δC , не содержащей полей δc и δc^n . Именно поэтому мы получили только одно уравнение (5.18), потребовав обращения в нуль двух коэффициентов в (5.17).

Поскольку свойство (5.23) не имеет места для T_0^0 и T_1^0 , для полей c и c^n получаются нетривиальные уравнения движения, имеющие вид

$$\frac{\delta S^2}{\delta c} = 2(-1)^d \frac{m^2}{d} \sigma_- E((\mathcal{D}C)|_{T_1^1}) = 0, \quad (5.24)$$

$$\frac{\delta S^2}{\delta c^1} = -2E\sigma_+((\mathcal{D}C)|_{T_0^1}) = 0. \quad (5.25)$$

Несложно убедиться, что эти уравнения эквивалентны уравнениям для свободного поля (5.2). Действительно, уравнение (5.25) эквивалентно уравнению

$$(\mathcal{D}C)|_{T_0^1} = 0 \quad (5.26)$$

(т.к. $\text{Ker}(E\sigma_+)|_{T_0^1} = 0$), а уравнение (5.24) эквивалентно уравнению

$$(\mathcal{D}C)|_{T_1^1} = \sigma_- X \quad (5.27)$$

с произвольным X ($\text{Ker}(\sigma_- E)|_{T_1^1} = \sigma_- X$). Всегда можно выбрать c^{nm} таким, чтобы $X = 0$. Это условие можно считать связью на c^{nm} . Как было показано в разделах 2, 3 и 4, накладывая связи на высшие поля $c^{n(k)}$, получим $\mathcal{D}C = 0$ при условии, что выполнены динамические уравнения (5.24) и (5.25).

Хотя квадратичное действие (его локальная вариация) не зависит от “лишних полей” $c^{n(k)}$ с $k \geq 2$, оказывается полезным выразить их через производные динамического поля c , потому что “лишние поля” дают вклад во взаимодействия и должны учитываться в граничных членах. Естественный выбор для таких связей соответствует формуле (3.13). На уровне действия этого можно добиться, добавляя член

$$S^c = \sum_{k=2} \int_{\Omega} \gamma^{n_1 \dots n_k} (c_{n_1 \dots n_k} - (-1)^k D_{n_1} \dots D_{n_k} c) \quad (5.28)$$

с лагранжевыми множителями $\Gamma = (\gamma^{n(2)}, \gamma^{n(3)}, \dots)$ ($\gamma^{n(k)}$ симметричные и бесследовые). Действие

$$S = S^2 + S^c \quad (5.29)$$

приводит к уравнениям (5.24) и (5.25), а также к выражениям

$$c_{n_1 \dots n_k} = (-1)^k P_{\perp} D_{n_1} \dots D_{n_k} c, \quad \gamma^{n(k)} = 0, \quad k \geq 2. \quad (5.30)$$

Учитывая результаты раздела 4, мы можем сделать вывод, что эти уравнения эквивалентны уравнениям

$$DC = 0, \quad (5.31)$$

$$\Gamma = 0. \quad (5.32)$$

Заметим, что набор лагранжевых множителей можно расширить, добавив члены с γ^n и γ . Скаляр γ при этом сокращается, а член с γ^n хотя и дает вклад в действие, но приводит к эквивалентной динамике с дополнительной связью $\gamma^n = 0$ как следствию уравнений движения.

До сих пор мы рассматривали локальные вариации в пространстве-времени M_d . Если граница ∂M_d не тривиальна, то следует учитывать граничные члены. Можно убедиться, что

$$\begin{aligned} S^2 = & \int_{M_d} (2(E\sigma_+ c, Dc^n) + (E\sigma_+ c, \sigma_+ c) - (E\sigma_+ \sigma_- c^n, c^n)) + \\ & + (-1)^{d-1} \int_{\partial M_d} ((EDC, C) - (E\sigma_+ c, c^n)). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Таким образом, действие S^2 равно стандартному действию Клейна–Гордона первого порядка с точностью до граничных членов, которые следует вычесть, чтобы эти действия были полностью эквивалентны.

6. ПРОСТРАНСТВО ФОКА

Вместо того чтобы работать с бесконечным набором тензоров C , удобнее использовать язык пространства Фока аналогично тому, как это делалось в работе [15] для полей со спином $s \geq 1$. А именно введем операторы рождения и уничтожения a_n и a_m^+ с коммутационными соотношениями

$$[a_n, a_m^+] = \eta_{nm}, \quad (6.1)$$

$$[a_n, a_m] = [a_n^+, a_m^+] = 0. \quad (6.2)$$

Для набора p -форм $c^{n(k)}$ введем фоковский вектор

$$|c(p)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} |c(p, k)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{n_1}^+ \dots a_{n_k}^+ c^{n_1 \dots n_k} |0\rangle. \quad (6.3)$$

Удобно ввести операторы

$$N^{++} = \frac{1}{2}a_n^+a^{+n}, \quad N^{--} = \frac{1}{2}a_na^n \quad (6.4)$$

и

$$N = a_n^+a^n, \quad (6.5)$$

обладающие коммутационными соотношениями

$$[N, N^{++}] = 2N^{++}, \quad [N, N^{--}] = -2N^{--}, \quad (6.6)$$

$$[N^{--}, N^{++}] = N + \frac{d}{2}, \quad (6.7)$$

которые при сдвиге $N^0 = N + d/2$ переходят в коммутационные соотношения алгебры sl_2 . Подпространство бесследовых симметричных тензоров определяется условием

$$N^{--}|c(p, k)\rangle = 0. \quad (6.8)$$

Явная формула для проектора $P_\perp$ на бесследовые тензоры довольно сложна. Однако для практических вычислений достаточно использовать следующие простые соотношения:

$$a_n^+P_\perp = P_\perp a_n^+ + \left(N + \frac{d}{2} - 2\right)^{-1} N^{++}a_nP_\perp, \quad (6.9)$$

$$a_nP_\perp = P_\perp a_n + \left(N + \frac{d}{2} - 1\right)^{-1} P_\perp a_n^+ N^{--}. \quad (6.10)$$

В этих обозначениях имеем

$$\sigma_- = e_na^n, \quad (6.11)$$

$$\sigma_+ = \frac{f(N-1)}{N}P_\perp e^na_n^+ = \frac{f(N-1)}{N}\left(e^na_n^+ - \left(N + \frac{d}{2} - 2\right)^{-1}N^{++}\sigma_-\right), \quad (6.12)$$

$$D^n = e^{\underline{n}n}(\partial_{\underline{n}} + \omega_{\underline{n}}^t{}_m a_t^+ a^m), \quad (6.13)$$

$$E = \frac{g(N)}{N}e^{t_1} \wedge \dots \wedge e^{t_{d-2}} \epsilon_m{}^n{}_{t_1\dots t_{d-2}} a_n^+ a^m. \quad (6.14)$$

Удобно также использовать лоренц-инвариантные “базовые” осцилляторы

$$a_{\underline{n}} = e_{\underline{n}}{}^n a_n, \quad a_{\underline{n}}^+ = e_{\underline{n}}{}^n a_n^+, \quad a^{\underline{n}} = e^{\underline{n}n} a_n, \quad a^{+\underline{n}} = e^{\underline{n}n} a_n^+, \quad (6.15)$$

удовлетворяющие соотношениям

$$D(a_{\underline{n}}) = 0, \quad D(a^{\underline{n}}) = 0, \quad D(a_{\underline{n}}^+) = 0, \quad D(a^{+\underline{n}}) = 0, \quad (6.16)$$

которые следуют из условия нулевого кручения (3.4). Введя новый оператор

$$D^+ = D^n a_n^+ = D_{\underline{n}} a^{+\underline{n}} \quad (6.17)$$

и используя определение (2.14) ковариантной производной $\mathcal{D}$, получаем, что действие (5.29) может быть переписано в виде

$$S = (-1)^{d-1} \langle \mathcal{D}C | E | \mathcal{D}C \rangle + \langle \Gamma | C \rangle - \langle \Gamma | \exp(-D^+) c | 0 \rangle. \quad (6.18)$$

7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЯНГА–МИЛЛСА

Хотя, как было показано выше, свободное действие (5.14) эквивалентно с точностью до некоторых граничных членов обычному действию Клейна–Гордона первого порядка, введение минимального взаимодействия Янга–Миллса путем ковариантизации производных приводит к различным результатам для этих действий. Это неудивительно, т.к. при доказательстве эквивалентности мы использовали то, что $\mathcal{D}^2 = 0$ для фоновой AdS -геометрии. Данный факт не имеет места в присутствии янг-миллсовской связности A ,

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^{YM} = \mathcal{D} + A, \quad (7.1)$$

$$(\mathcal{D}^{YM})^2 = G, \quad G = dA + A \wedge A. \quad (7.2)$$

Здесь A и G принимают значения в некотором представлении t калибровочной группы g , в пространстве представления которой принимают значения поля $c^{n(k)}$ (т.е. $c^{n(k)} \rightarrow c^{\alpha n(k)}$, $A \rightarrow A^\alpha_\beta$). Поэтому два действия могут отличаться на члены, пропорциональные напряженности Янга–Миллса G .

Интересным следствием переформулировки действия скалярного поля в виде (5.14) является то, что оно немедленно приводит к псевдолокально-точной форме сохраняющегося тока спина 1. Это обобщает результаты [8] для токов спина 1 при $d = 3$ на случай массивного и безмассового скалярных материальных полей в пространстве AdS_d или массивного скалярного поля в плоском пространстве. Действительно, минимальное взаимодействие для действия (5.14) имеет вид

$$S^{\text{gau}} = \int_{M_d} \text{tr}(E \mathcal{D}^{YM} C, \mathcal{D}^{YM} C). \quad (7.3)$$

Сохраняющийся ток спина 1 равен

$$J^{\underline{n}}_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{\delta}{\delta A^{\underline{n}}_{\alpha}{}^{\beta}} S^{\text{gau}} \Big|_{A=0}. \quad (7.4)$$

Для действия (7.3) получаем

$$\delta S^{\text{gau}}|_{A=0} = \int_{M_d} ((E \delta A(C), DC) + (EDC, \delta A(C))) = 2 \int_{M_d} (EDC, \delta A(C)). \quad (7.5)$$

Учитывая, что свободные уравнения движения (5.24), (5.25) вместе со связями (5.30) эквивалентны уравнению $DC = 0$, приходим к парадоксальному результату, что ток Янга–Миллса для действия (5.14) равен нулю на массовой оболочке, несмотря на то что действие инвариантно относительно симметрии Янга–Миллса³⁾. Интересно отметить, что такая переформулировка действия для скалярного поля оказывается возможной именно в тех случаях, когда понятие S -матрицы либо не определено (случай AdS),

³⁾ Следует отметить, что, т.к. вариация свободного действия по “лишним полям” тождественно равна нулю, для анализа кубического взаимодействия достаточно использовать свободные связи (3.13). Другими словами, поправки, возникающие при ковариантизации выражения (5.28), приводят к взаимодействию четвертого порядка. Член с лагранжевыми множителями также не влияет на наше рассмотрение, потому что $\Gamma = 0$ на массовой оболочке. Альтернативно можно наложить связи “руками”, не вводя лагранжевых множителей.

либо вклад соответствующих трехчастичных вершин в амплитуду рассеяния равен нулю по кинематическим причинам, как это имеет место для случая $m \neq 0$ в плоском пространстве.

Обычно предполагается, что любые члены в нетеровском взаимодействии, которые равны нулю на массовой оболочке, несущественны, т.к. они могут быть скомпенсированы некоторым локальным переопределением полей

$$C \rightarrow C' = C + AC^2. \quad (7.6)$$

В рассматриваемом случае следует, однако, учесть, что вариация действия содержит бесконечно много членов со всеми производными скалярного поля c (3.13), которые входят через старшие компоненты $c^{n(k)}$. Поэтому замена полей (7.6), компенсирующая взаимодействие в действии (5.14), может быть нелокальной. Такие выражения, содержащие бесконечные ряды по степеням производных, были названы в [8] псевдолокальными. Неудивительно, что некоторое взаимодействие можно компенсировать нелокальным переопределением полей (например, с помощью функции Грина). Поэтому наивное заключение о том, что действие (7.3) не описывает нетривиального взаимодействия, не верно.

Вывод состоит в том, что обычные токовые взаимодействия, играющие фундаментальную роль в локальной теории поля, могут быть не столь важными в теориях со взаимодействиями, содержащими бесконечные ряды по высшим производным. Это верно как для массивных мод в плоском пространстве (теория суперструн), так и для теорий с произвольной массой на AdS -фоне (теория высших спинов). Один из способов продемонстрировать это состоит в том, чтобы показать, что обычный янг-миллсовский ток является точным в классе псевдолокальных разложений на массовой оболочке. Для этого сравним минимальное взаимодействие для действия (5.14) и для стандартного действия Клейна–Гордона первого порядка. Так же как и в разделе 5, получаем, что

$$\begin{aligned} S^{\text{gau}} = & \int_{M_d} (2(E\sigma_+c, D^{\text{YM}}c^n) + (E\sigma_+c, \sigma_+c) - (E\sigma_+\sigma_-c^n, c^n)) + \int_{M_d} (EGC, C) + \\ & + (-1)^{d-1} \int_{\partial M_d} ((AD^{\text{YM}}C, C) - (E\sigma_+c, c^n)), \end{aligned} \quad (7.7)$$

где $D^{\text{YM}} = D + A$. Первый член в этой формуле описывает ковариантизованное действие Клейна–Гордона первого порядка $S_{\text{KG}}^{\text{gau}}$. Поэтому разность

$$\Delta = S^{\text{gau}} - S_{\text{KG}}^{\text{gau}} \quad (7.8)$$

пропорциональна с точностью до некоторых граничных членов напряженности Янга–Миллса

$$\Delta = \int_{M_d} (EGC, C) + \text{граничные члены}. \quad (7.9)$$

Из этой формулы сразу же вытекает псевдолокально-точное представление тока спина 1. Действительно,

$$S_{\text{KG}}^{\text{gau}} = S_{\text{KG}}^{\text{free}} + \int_{M_d} \text{tr}(*J \wedge A) + O(A^2). \quad (7.10)$$

С другой стороны,

$$\left. \frac{\delta S^{\text{gau}}}{\delta A_{\underline{n}}^{\alpha\beta}} \right|_{A=0} \sim 0, \quad (7.11)$$

где $\sim$ означает равенство на массовой оболочке и

$$\Delta = \int_{M_d} \text{tr}(U \wedge G), \quad U = (EC, C). \quad (7.12)$$

Учитывая (7.8), получаем

$$*J \sim (-1)^d dU, \quad (7.13)$$

где величина U из (7.12) оказывается в силу (5.30) рядом по высшим производным поля s .

Было бы интересно изучить роль граничных членов в (7.7) в контексте AdS/CFT-соответствия [17] и прояснить, в какой степени динамика пространственно-временного действия (7.7) “закодирована” в граничных действиях.

8. СИСТЕМА ВНЕ МАССОВОЙ ОБОЛОЧКИ

Подход, развитый в этой работе, аналогичен подходу, развитому в работе [15] для безмассовых калибровочных полей в произвольной размерности и в работе [6] для всех безмассовых полей при $d = 4$. Этот подход пригоден для анализа нелинейных уравнений движения как некоторой деформации уравнений (5.31). Он также полезен для исследования кубических взаимодействий калибровочных полей высших спинов, потому что анализ нетеровского взаимодействия является, по существу, анализом на массовой оболочке⁴⁾, так что связи и уравнения движения могут использоваться одновременно в форме, аналогичной (5.31). Однако вне рамок кубического приближения требуются соответствующим образом модифицированные связи вне массовой оболочки, совместимые с симметриями высших спинов. Проблема нахождения инвариантных связей была названа в работе [11] проблемой “лишних полей”.

В нашей работе делается первый шаг в этом направлении, связанный с решением проблемы разделения связей и динамических уравнений для простейшего случая свободного скалярного поля. Мы обобщаем результаты раздела 4 так, чтобы условия ковариантного постоянства

$$\tilde{D}\tilde{C} = 0 \quad (8.1)$$

для некоторого расширенного набора полей $\tilde{C}$ выражали все поля через производные динамического скалярного поля $s(x)$, не накладывая на последнее никаких дифференциальных ограничений. Как показано в разделе 4, нетривиальные дифференциальные

⁴⁾Заметим, что ситуация с калибровочными полями высших спинов, рассмотренная в [5], отличается от обсуждаемой здесь ситуации со скалярным полем в том отношении, что в [5] для любых трех фиксированных спинов в калибровочной вариации действия высших спинов появляется не более чем конечное число членов, обращающихся в нуль на массовой оболочке, и потому факт существования там некоторого деформированного калибровочного преобразования, которое оставляет действие инвариантным, является хорошо определенным локальным утверждением.

уравнения на физическое поле c связаны с когомологией оператора σ_- . Поэтому следует найти такую модифицированную ковариантную производную $\tilde{D}\tilde{C}$ ($\tilde{D}^2 = 0$), чтобы $\tilde{\sigma}_-$ -когомология $\tilde{D}$ была тривиальной. Также требуется, чтобы вместе с уравнением Клейна–Гордона на c уравнение (8.1) было эквивалентным системе (3.11), (3.13). Этого можно добиться, расширив набор тензоров C до всех симметричных, но не обязательно бесследовых тензоров $\tilde{C} = (\tilde{c}, \dots, \tilde{c}^{n(k)}, \dots)$.

Пусть $\tilde{T}_k^p$ – линейное пространство p -форм, принимающих значения в пространстве симметричных тензоров ранга k ,

$$\tilde{T}^p = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus \tilde{T}_k^p, \quad \tilde{T} = \sum_{p=0}^{\infty} \oplus \tilde{T}^p.$$

Пространство $\tilde{T}^p$ можно реализовать как пространство Фока из раздела 6, но без условия бесследовости (6.8).

Определим оператор $\tilde{\sigma}_- \tilde{T}_k^p \rightarrow \tilde{T}_{k-1}^{p+1}$, как и раньше,

$$\tilde{\sigma}_- = e^n a_n \quad (8.2)$$

(или в компонентах $(\tilde{\sigma}_- \tilde{C})^{n(k-1)} = e_m \wedge \tilde{c}^{n(k-1)m}$). Очевидно, что

$$\tilde{\sigma}_- \tilde{\sigma}_- = 0, \quad (8.3)$$

$$D\tilde{\sigma}_- + \tilde{\sigma}_- D = 0. \quad (8.4)$$

Подчеркнем, что операторы $\tilde{\sigma}_-$ и σ_- различны, поскольку они определены на разных пространствах. Это проявляется в том, что, как и необходимо для нашей конструкции, первая группа $\tilde{\sigma}_-$ -когомологии $\tilde{H}^1$ тривиальна. Явное доказательство этого факта мы не приводим, поскольку оно является упрощенным случаем анализа, проведенного в разделе 4 для σ_- -когомологии, с тем отличием, что уравнение (4.15) оказывается разрешимым, если X^{nm} не предполагается бесследовым. С другой стороны, оператор $\tilde{\sigma}_-$ оставляет инвариантным подпространство $T \in \tilde{T}$, порожденное бесследовыми тензорами, а оператор σ_- совпадает с ограничением $\tilde{\sigma}_-$ на T ,

$$\tilde{\sigma}_-|_T = \sigma_-. \quad (8.5)$$

Будем искать оператор $\tilde{D}$ в виде

$$\tilde{D} = D + \tilde{\sigma}_- + \tilde{\sigma}_+, \quad (8.6)$$

где $\tilde{\sigma}_+ : \tilde{T}_k^p \rightarrow \tilde{T}_{k+1}^{p+1}$ – некоторый новый оператор, который должен удовлетворять условиям

$$\tilde{\sigma}_+ \tilde{\sigma}_+ = 0, \quad (8.7)$$

$$D\tilde{\sigma}_+ + \tilde{\sigma}_+ D = 0, \quad (8.8)$$

$$\{\tilde{\sigma}_+, \tilde{\sigma}_-\} = -DD = -\lambda^2 e^n a_n^+ e^m a_m, \quad (8.9)$$

чтобы было выполнено условие совместности

$$\tilde{\mathcal{D}}^2 = 0. \quad (8.10)$$

Кроме того, удобно потребовать выполнения соотношения

$$\tilde{\sigma}_+|_T = \sigma_+, \quad (8.11)$$

чтобы интерпретировать цепочку на массовой оболочке $\mathcal{DC} = 0$ как ограничение (8.1) на T .

Будем искать оператор $\tilde{\sigma}_+$ в виде

$$\tilde{\sigma}_+ = p(N)e^n a_n^+ + q(N)N^{++}e^n a_n \quad (8.12)$$

с некоторыми коэффициентами $p(N)$ и $q(N)$. Условия (8.9) и (8.7) налагают следующие условия на $p(N)$ и $q(N)$:

$$q(N+1) = p(N+1) - p(N) - \lambda^2, \quad (8.13)$$

$$p(N)q(N-1) - q(N)p(N-1) + q(N)q(N-1) = 0. \quad (8.14)$$

Условие (8.11) эквивалентно требованию $N^{--}\tilde{\sigma}_+ = X_+N^{--}$ с некоторым оператором X_+ . С помощью (6.7) получим

$$p(N) = -\left(N + \frac{d}{2} - 2\right)q(N). \quad (8.15)$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$p(N) = \frac{1}{2} \left(\lambda^2 \left(N + \frac{d}{2} - 2 \right) - \frac{m_c^2}{N + \frac{d}{2} - 1} \right), \quad (8.16)$$

где m_c^2 — произвольный параметр. Когда оператор $\tilde{\sigma}_+$ действует на бесследовый вектор, он воспроизводит оператор σ_+ (2.16), который использовался при рассмотрении задачи на массовой оболочке, причем

$$m_c^2 = m^2 + \frac{\lambda^2}{4}d(d-2). \quad (8.17)$$

Заметим, что значение $m_c^2 = 0$ соответствует конформному случаю (см. сноску 1).

Таким образом, мы показали, что ковариантные производные на массовой оболочке (3.7) допускают такое обобщение на более широкий набор полей, что условия ковариантного постоянства (8.1) не накладывают никаких динамических уравнений на материальное поле $c(x)$, а лишь выражают высшие компоненты набора $\tilde{C}$ через высшие производные от $c(x)$. Так как оператор $\tilde{\mathcal{D}}$ при ограничении на подпространство $T^0 \subset \tilde{T}^0$ сводится к оператору $\mathcal{D}$, то динамические уравнения оказываются эквивалентными условию равенства нулю всех полей из $\tilde{T}^0/T^0$. Интересно найти действие, приводящее к таким уравнениям движения.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе динамика скалярного поля в пространстве AdS_d сформулирована в терминах определенных ковариантных производных высших спинов как на уровне уравнений движения, так и на лагранжевом уровне.

Предложенный формализм приводит к интересной интерпретации динамических полевых уравнений (т.е. уравнения Клейна–Гордона) как требованию принадлежности полей к тривиальному классу определенной группы когомологии (σ –когомологии). Задача состоит в том, чтобы распространить эту интерпретацию на другие типы релятивистских полей и прояснить ее теоретико-групповой смысл.

Предложенное в данной работе новое действие для скалярного поля в произвольной размерности эквивалентно на свободном уровне (по модулю граничных членов) стандартному действию Клейна–Гордона первого порядка, но отличается от него на уровне взаимодействия и приводит к псевдолокальным взаимодействиям, содержащим производные всех порядков. Это действие определено для массивных полей в плоском пространстве и для полей произвольной массы (требуется лишь некоторое переопределение для специальных значений m^2/λ^2 , см. сноску 2) в пространстве AdS_d . Данное действие содержит обратные степени массы или космологической постоянной перед членами с высшими производными. В этом смысле оно аналогично действиям высших спинов, построенным ранее в [11], и действиям для массивных полей высших спинов, построенным в недавних работах [9, 10]. Эта картина хорошо согласуется с картиной в теории суперструн, где взаимодействия содержат степени параметра α' , который фиксирует (обратный) массовый масштаб в теории.

Интересным выводом данной работы является то, что взаимодействия с токами не играют фундаментальной роли в теориях, допускающих на уровне взаимодействия бесконечные разложения по высшим производным, т.е. таких как теории высших спинов и теории струн. Этот вывод является в действительности естественным для любой теории, о которой предполагается, что она может отвечать той или иной фазе теории струн, поскольку фейнмановское диаграммное разложение в обычной локальной теории поля (т.е. с локальными токовыми вершинами) противоречит дуальности в теории струн [18]. Действие для скалярного поля, представленное в данной работе, показывает, как обычные теоретико-полевые действия, переформулированные в форме, характерной для теории высших спинов, могут избежать этого потенциального противоречия. Важно отметить, что предложенная переформулировка действия для скалярного поля оказывается возможной именно в тех случаях, когда понятие S -матрицы либо не определено (случай AdS), либо вклад соответствующих трехчастичных вершин в амплитуду рассеяния равен нулю по кинематическим причинам, как это имеет место для случая $m \neq 0$ в плоском пространстве.

Благодарности. Авторы благодарны С. Прокушкину за сотрудничество на ранней стадии работы, а также Р. Мецаеву и И. Типунину за полезные обсуждения. Данное исследование выполнено при частичной поддержке ИНТАС, грант № 96-0538, и РФФИ, грант № 99-02-16207.

Список литературы

- [1] *J. Gervais, M. V. Saveliev.* Progress in Classically Solving Ten-Dimensional Supersymmetric Reduced Yang–Mills Theories. hep-th/9811108.
- [2] *M. A. Vasiliev.* Higher Spin Gauge Theories: Star-Product and AdS Space. hep-th/9910096.
- [3] *M. A. Vasiliev.* Int. J. Mod. Phys. D. 1976. V. 5. P. 763; hep-th/9611024.
- [4] *M. A. Vasiliev.* Phys. Lett. B. 1992. V. 285. P. 225.
- [5] *E. S. Fradkin, M. A. Vasiliev.* Phys. Lett. B. 1987. V. 189. P. 89; Nucl. Phys. B. 1987. V. 291. P. 141.
- [6] *M. A. Vasiliev.* Ann. Phys. (N. Y.). 1989. V. 190. P. 59.
- [7] *S. E. Konstein, M. A. Vasiliev.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 331. P. 475.
- [8] *S. F. Prokushkin, M. A. Vasiliev.* Phys. Lett. B. 1999. V. 464. P. 53; hep-th/9906149; *М. А. Васильев, С. Ф. Прокушкин.* Когомологии токов произвольного спина. ТМФ. 2000. (в печати); hep-th/9907020.
- [9] *S. M. Klishevich.* Class. Q. Grav. 1999. V. 16. P. 2915. hep-th/9812005.
- [10] *I. L. Buchbinder, D. M. Gitman, V. A. Krykhtin, V. D. Pershin.* Equations of Motion for Massive Spin 2 Field Coupled to Gravity. hep-th/9910188.
- [11] *M. A. Vasiliev.* Fortschr. Phys. 1987. V. 35. P. 741.
- [12] *M. A. Vasiliev.* Class. Q. Grav. 1994. V. 11. P. 649.
- [13] *S. F. Prokushkin, M. A. Vasiliev.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 545. P. 385; hep-th/9806236.
- [14] *E. S. Fradkin, M. A. Vasiliev.* Ann. Phys. (N. Y.). 1987. V. 177. P. 63.
- [15] *V. E. Lopatin, M. A. Vasiliev.* Mod. Phys. Lett. A. 1988. V. 3. P. 257.
- [16] *А. В. Барабанщиков, М. А. Васильев, С. Ф. Прокушкин.* ТМФ. 1997. Т. 110. С. 372; hep-th/9609034.
- [17] *J. Maldacena.* The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. hep-th/9711200; *S. Ferrara, C. Fronsdal.* Conformal Maxwell Theory as a Singleton Field Theory on ADS_5 , IIB Branes and Duality. hep-th/9712239; *M. Gunaydin, D. Minic.* Singletons, Doubletons and M -theory. hep-th/9802047; *S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov.* Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory. hep-th/9802109; *E. Witten.* Anti De Sitter Space and Holography. hep-th/9802150; *O. Aharony, S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz.* Large N Field Theories, String Theory and Gravity. hep-th/9905111.
- [18] *М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен.* Теория суперструн. Т.1, 2. М.: Мир, 1990.