Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Де Лилло, Д. Лупо, М. Соммакал, Решения нелинейной задачи теплопроводности на полупрямой, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 1, 58–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6070>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 03:15:28

© 2007 г.

С. Де Лилло*, Г. Лупо*, М. Соммакал†

РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПОЛУПРЯМОЙ

На полупрямой решается задача для нелинейного диффузионного уравнения с заданной зависящей от времени теплопроводностью в начале координат. Задача сводится к линейному интегральному уравнению Вольтерра, которое решается с помощью процесса Пикара последовательных приближений. Некоторые явные примеры проанализированы численно.

Ключевые слова: нелинейный, теплопроводность, полупрямая.

Нелинейные эволюционные уравнения диффузионного типа в прошлом были предметом многочисленных исследований из-за их актуальности в приложениях (см. монографию [1] и библиографию в ней). В частности, нелинейное диффузионное уравнение

$$u_t = \left(\frac{u_x}{u^2} \right)_x, \quad u \equiv u(x, t), \quad (1)$$

широко изучалось в литературе как математическая модель, описывающая теплопроводность в высокополимерных системах [2] и в материалах типа материалов Сторма [3].

В работе [4] внимание было сосредоточено на задаче на полупрямой с начальным/граничным условием для уравнения (1) в случае заданной постоянной теплопроводности в начале координат.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы обобщить результаты работы [4], предложив решение приведенной выше задачи Коши для случая, когда теплопроводность на границе зависит от времени. Ниже мы покажем, что с помощью преобразования годографа нелинейную задачу для уравнения (1) можно свести к задаче типа задачи Робина для линейного уравнения теплопроводности с движущейся границей. Эта задача затем решается, т.е. редуцируется к линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое допускает единственное решение. Мы также численно анализируем некоторые явные примеры.

*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Perugia, Via Vanvitelli 1, 06123 Perugia, Italy; Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Perugia, Perugia, Italy. E-mail: Gaia.Lupo@pg.infn.it

†Laboratoire J.-L. Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France.

Начнем с рассмотрения задачи с начальным/граничным условием для уравнения (1) на полупрямой $0 \leq x < \infty$, характеризуемой начальным и граничными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (2a)$$

$$u(\infty, t) = \gamma, \quad u_x(\infty, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2б)$$

$$\frac{u_x(0, t)}{u^2(0, t)} = f(t), \quad t \geq 0, \quad (2в)$$

где γ – положительная константа, а $f(t)$ – интегрируемая функция. Граничное условие (2в) представляет заданную теплопроводность в начале координат (см. работу [4]).

Введем преобразование годографа

$$u(x, t) = [v(z, t)]^{-1}, \quad (3a)$$

где

$$\frac{\partial z}{\partial x} = u(x, t), \quad (3б)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\left(\frac{1}{u(x, t)}\right)_x, \quad (3в)$$

условие совместности которого $\partial^2 z / \partial x \partial t = \partial^2 z / \partial t \partial x$ гарантировано уравнением (1).

Используя приведенное выше преобразование, отобразим уравнение (1) в линейное уравнение теплопроводности

$$v_t = v_{zz} \quad (4)$$

в области $F(t) \leq z < \infty$, где $F(t)$ удовлетворяет соотношению

$$F(t) = \int_0^t f(t') dt'. \quad (5)$$

С помощью преобразования годографа мы свяжем с уравнением (4) начальные данные

$$v(z, 0) \equiv v_0(z_0) = [u_0(x)]^{-1}, \quad (6a)$$

где z_0 в силу уравнений (3б) и (3в) имеет вид

$$z_0 \equiv z_0(x) = \int_0^x u_0(x') dx', \quad (6б)$$

а также граничные условия

$$v(\infty, t) = \frac{1}{\gamma}, \quad v_z(\infty, t) = 0, \quad (7a)$$

$$f(t)v(F(t), t) + v_z(F(t), t) = 0. \quad (7б)$$

Тогда задача с начальным/граничным условием для нелинейного диффузионного уравнения (1) с начальными данными (2a) и граничными условиями (2б), (2в)

отображается в линейное уравнение теплопроводности (4) в области с движущейся границей, характеризующейся начальным условием (6a) и граничными условиями (7a), (76).

Чтобы решить линейную задачу, введем фундаментальное ядро теплопроводности

$$K(z - \xi, t - t') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t - t'}} e^{-(z - \xi)^2 / (4(t - t'))} \quad (8)$$

и проинтегрируем тождество Грина для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(K \frac{\partial v}{\partial \xi} - v \frac{\partial K}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial t'} (Kv) = 0 \quad (9)$$

по области $F(t') < \xi < \infty$, $\varepsilon < t' < t - \varepsilon$, а также возьмем $\varepsilon \rightarrow 0$. Используя условие (76) и тот факт, что $K(z - \xi, 0) = \delta(z - \xi)$, получаем

$$v(z, t) = \int_{F(0)}^{+\infty} K(z - \xi, t) v_0(\xi) d\xi + \int_0^t K_\xi(z - F(t'), t - t') v(F(t'), t') dt'. \quad (10)$$

Из уравнения (10) ясно, что можно определить $v(z, t)$, если известно граничное условие $v(F(t), t)$; поэтому удобно вычислить (10) при $z = F(t)$. Полагая $w(t) = v(F(t), t)$, получим

$$w(t) = G(t) + \lambda \int_0^t R(t, t') w(t') dt', \quad (11a)$$

где

$$G(t) = \int_{F(0)}^{+\infty} K(F(t) - \xi, t) v_0(\xi) d\xi, \quad (11б)$$

$$R(t, t') = \frac{1}{\lambda} K_\xi(F(t) - F(t'), t - t'), \quad \lambda = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}. \quad (11в)$$

Уравнение (11a) является линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода с сингулярным ядром $R(t, t')$. Подходящий выбор функции $f(t)$ позволяет с помощью уравнения (5) получить умеренно сингулярное ядро. Тогда линейное уравнение Вольтерра (11a) допускает единственное решение в предположении, что $G(t)$ является интегрируемой и ограниченной функцией своего аргумента [5]. Используя процесс Пикара последовательных приближений [5], решение уравнения (11a) можно записать как

$$w(t) = G(t) + \lambda \int_0^t H(t, t'; \lambda) G(t') dt'. \quad (12)$$

Здесь $H(t, t'; \lambda)$ – ядро резольвенты, задаваемое рядом

$$H(t, t'; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n R_{n+1}(t, t'), \quad (13a)$$

Рис. 1. Графическое представление решения $u(x, t)$, соответствующего примеру 1 (см. (18)), построенное относительно переменной x при фиксированных значениях t для различных интервалов: $0 \leq t \leq 0.01$ (а), $0.01 \leq t \leq 0.09$ (б), $0.2 \leq t \leq 0.9$ (в), $1.0 \leq t \leq 10$ (г).

где

$$R_{n+1}(t, t') = \int_0^t R(t, t'') R_n(t'', t') dt'', \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (136)$$

$$R_1(t, t') = R(t, t'). \quad (13в)$$

Ниже мы численно исследуем четыре примера, соответствующие двум различным выборам функции $f(t)$ (см. условие (2в)): в первом случае $f(t)$ является константой, а во втором – линейной функцией времени:

$$f(t) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \quad (14a)$$

$$f(t) = at + b, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (146)$$

Из (14a) и (146) ясно, что с учетом соотношения (5) $F(t)$ является соответственно линейной или квадратичной функцией времени. Заметим также, что выбор (14a) соответствует случаю, который аналитически рассматривался в работе [4]. В обоих случаях мы рассматриваем начальные данные $u_0(x)$, совместные с асимптотическим условием (26), соответствующим, во-первых, функции

$$u_0(x) = \beta - (\beta - \gamma)\vartheta(x - \eta), \quad \beta, \eta \in \mathbb{R}, \quad (15a)$$

Рис. 2. Графическое представление решения $u(x, t)$, соответствующего примеру 2 (см. (19)), построенное относительно переменной x при фиксированных значениях t для различных интервалов: $0 \leq t \leq 0.01$ (а), $0.01 \leq t \leq 0.09$ (б), $0.1 \leq t \leq 0.9$ (в), $1.1 \leq t \leq 3.6$ (г).

где $\vartheta(x)$ – обычная единичная ступенчатая функция, а во-вторых, функции

$$u_0(x) = \frac{\gamma}{1 + W(c\gamma e^{-\gamma(\kappa x - c)})}, \quad \kappa, c \in \mathbb{R}, \quad (156)$$

где $W(x)$ – W -функция Ламбера, неявно определяемая соотношением $f(W) = We^W$.

В первом случае с $F(t)$, определяющейся (14а), наш метод состоит в прямом вычислении функции $v(z, t)$ через явное решение, как это было показано в работе [4]. Затем мы вычисляем функцию $v(z, t)$ в соответствии с выражением (10) и окончательно получаем решение $u(x, t)$, обращая преобразование годографа (3а)–(3в). При фиксированном времени $t = t^*$ с помощью (3а) и (3б) получаем

$$x(z)|_{t^*} = \int_0^z v(z', t^*) dz'. \quad (16)$$

Тогда из выражения (16) мы получаем обратную функцию $z(x)|_{t^*}$ и окончательно находим решение исходной задачи:

$$u(x, t^*) = [v(z(x)|_{t^*}, t^*)]^{-1}, \quad (17)$$

в соответствии с (3а).

Рис. 3. Графическое представление решения $u(x, t)$, соответствующего примеру 3 (см. (20)), построенное относительно переменной x при фиксированных значениях t для различных интервалов: $0 \leq t \leq 0.001$ (а), $0.001 \leq t \leq 0.01$ (б), $0.01 \leq t \leq 0.09$ (в), $0.2 \leq t \leq 2.5$ (г).

Если $F(t)$ определяется (146), то интегральное уравнение Вольтерра (11а) не решается в квадратурах, как в предыдущем случае, однако оно должно решаться численно. Решение $v(z, t)$ линейной задачи получается с помощью уравнения (10), но, конечно, вычислительные издержки такого алгоритма гораздо больше, чем в предыдущем случае. Интегральное уравнение (10) интегрируется численно при использовании неравномерного *fixed-mesh*-метода, с тем чтобы избежать проблем, связанных с наличием умеренно сингулярного ядра (см., например, книгу [6] и ссылки в ней). Как объяснялось выше, после вычисления функции $v(z, t)$ мы, обращая преобразование годографа, получаем решение $u(x, t)$ нелинейной задачи (см. (16) и (17)).

Ниже мы подробно анализируем примеры и интерпретируем численные результаты, представив ряд графиков. Подчеркнем, что на всех графиках каждая линия представляет собой функцию $u(x, t)$ в фиксированный момент времени. Как и ожидалось, при больших x решение нелинейной задачи $u(x, t)$ асимптотически приближается к значению γ .

ПРИМЕР 1. Функция $u_0(x)$ задается уравнением (15а), а $f(t)$ – уравнением (14а), где $\alpha = 1$, $\beta = 1/3$, $\eta = 3$ и $\gamma = 1/2$. Тогда

$$u_0(x) = \frac{1}{6} [2 + \vartheta(x - 3)], \quad f(t) = 1. \quad (18)$$

Рис. 4. Графическое представление решения $u(x, t)$, соответствующего примеру 4 (см. (22)), построенное относительно переменной x при фиксированных значениях t для различных интервалов: $0 \leq t \leq 0.001$ (а), $0.001 \leq t \leq 0.01$ (б), $0.01 \leq t \leq 0.09$ (в), $0.1 \leq t \leq 2$ (г).

Результаты численного моделирования представлены на рис. 1. Видно, что при $0 < t < 1$ разрыв решения $u(x, t)$ по переменной x , обусловленный выбором ступенчатой функции $\vartheta(x)$ в начальных данных $u_0(x)$, сдвигается к началу координат вдоль оси x с ростом t .

ПРИМЕР 2. Функция $u_0(x)$ задается уравнением (15а), а $f(t)$ – уравнением (146), где $a = 2$, $b = 0$, $\beta = 1/3$, $\eta = 3$ и $\gamma = 1/2$. Тогда

$$u_0(x) = \frac{1}{6} [2 + \vartheta(x - 3)], \quad f(t) = 2t. \quad (19)$$

Результаты численного моделирования представлены на рис. 2. Сравнивая этот результат с предыдущим, мы видим, что выбор функции (146) (а именно квадратичной по времени функции $F(t)$), по-видимому, приводит к более быстрому по времени приближению решения $u(x, t)$ к постоянной функции $\hat{u}(x, t) = \gamma$.

ПРИМЕР 3. Функция $u_0(x)$ задается уравнением (15б), а $f(t)$ – уравнением (14а), где $\alpha = 1$, $c = 1$, $\kappa = 2/3$ и $\gamma = 1/2$. Тогда

$$u_0(x) = \frac{1}{2} \left[1 + W \left(\frac{1}{2} e^{-x/3+1/2} \right) \right]^{-1}, \quad f(t) = 1. \quad (20)$$

В этом случае полезно заметить, что из уравнения (20) с помощью уравнений (6a) и (66) мы получаем

$$v_0(z) = \frac{1}{\gamma} + ce^{-\kappa z} = 2 + e^{-2z/3}. \quad (21)$$

Результаты численного моделирования представлены на рис. 3.

ПРИМЕР 4. Функция $u_0(x)$ задается формулой (156), а $f(t)$ – формулой (146), где $\alpha = 1$, $c = 1$, $\kappa = 2/3$ и $\gamma = 1/2$. Тогда

$$u_0(x) = \frac{1}{2} \left[1 + W \left(\frac{1}{2} e^{-x/3+1/2} \right) \right]^{-1}, \quad f(t) = 2t. \quad (22)$$

Результаты численного моделирования представлены на рис. 4. Сравнивая этот результат с предыдущим, мы видим, что выбор функции (146) (а именно квадратичной по времени функции $F(t)$), по-видимому, приводит к более быстрому по времени приближению решения $u(x, t)$ к постоянной функции $\hat{u}(x, t) = \gamma$.

Список литературы

- [1] P. L. Sachdev, *Nonlinear Diffusive Waves*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [2] G. Bluman, S. Kumei, *J. Math. Phys.*, **21** (1980), 1019.
- [3] M. L. Storm, *J. Appl. Phys.*, **22** (1951), 940.
- [4] S. De Lillo, G. Lupo, G. Sanchini, *J. Phys. A*, **39** (2006), 7299.
- [5] Ф. Трикоми, *Дифференциальные уравнения*, ИЛ, М., 1960.
- [6] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran. The Art of Scientific Computing*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.