Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Димакис, Ф. Мюллер-Хойсен, Иерархии Бюргерса и Кадомцева–Петвиашвили: метод функционального представления, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 1, 66–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6071>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 05:18:05

© 2007 г.

А. Димакис*, Ф. Мюллер-Хойсен†

ИЕРАРХИИ БЮРГЕРСА И КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ: МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Функциональные представления (матричной) иерархии Бюргерса и потенциальной иерархии Кадомцева–Петвиашвили (и других иерархий), а также некоторые из соответствующих преобразований Беклунда могут быть получены из “дискретного” функционального уравнения нулевой кривизны удивительно простым способом. С помощью этих представлений показано, что любое решение иерархии Бюргерса является также решением потенциальной иерархии Кадомцева–Петвиашвили. Более того, потенциальная иерархия Кадомцева–Петвиашвили может быть представлена в виде неоднородной иерархии Бюргерса. В частности, это приводит к распространению преобразования Коула–Хопфа на потенциальную иерархию Кадомцева–Петвиашвили. Кроме того, эти иерархии решаются посредством решения некоторых функциональных уравнений Риккати.

Ключевые слова: иерархия Бюргерса, преобразование Коула–Хопфа, иерархия Кадомцева–Петвиашвили, функциональное уравнение Риккати.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было замечено, что любое решение первых двух уравнений иерархии Бюргерса [2]–[10] является также решением потенциального уравнения Кадомцева–Петвиашвили (уравнения пКП). Обобщение на случай, когда зависимые переменные принимают значения в матричной (или, в более общем виде, в некоторой ассоциативной и, как правило, некоммутативной) алгебре $\mathbb{A}$, появилось в работе [11]. Используя функциональные представления (т.е. производящие уравнения, зависящие от вспомогательных неизвестных) соответствующих иерархий, нетрудно показать, что любое решение “некоммутативной” иерархии Бюргерса является также решением “некоммутативной” иерархии пКП (см. раздел 4). Более того, оказывается, что иерархия пКП может быть представлена как *неоднородная иерархия Бюргерса*.

*Department of Financial and Management Engineering, University of the Aegean, 31 Fostini Str., GR-82100 Chios, Greece.

†Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation, Bunsenstrasse 10, D-37073 Göttingen, Germany. E-mail: fmuelle@gwdg.de

Это означает, что существует функциональная форма иерархии пКП, включающая матричную функцию в качестве неоднородного члена. Если положить этот член равным нулю, то функциональная форма иерархии пКП сведется к функциональной форме иерархии Бюргерса.

В качестве исходного пункта для построения функциональных представлений интегрируемых иерархий мы используем функциональное уравнение нулевой кривизны Захарова–Шабата, которое мы напоминаем в разделе 2 (см. также [12], [13]). Затем в разделе 3 рассматривается простейший нетривиальный пример: иерархия Бюргерса с зависимой переменной, принимающей значения в алгебре $\mathbb{A}$. Другой вариант иерархии Бюргерса рассмотрен в приложении. Раздел 4 посвящен случаю иерархии пКП и ее связи с иерархиями Бюргерса. В частности, мы получаем расширение преобразования Коула–Хопфа с иерархии Бюргерса на иерархию пКП, что обобщает результат работы [11]. В разделе 5 показано, что существует функциональное уравнение Риккати, из которого вытекает иерархия пКП и которое при определенных условиях сводится к функциональному уравнению Риккати, из которого следует иерархия Бюргерса. Поскольку такие уравнения Риккати могут быть решены явно, то это открывает короткий путь к точным решениям. Если наложить “условие ранга один” (см. [14] и цитируемую там литературу), то эти решения матричных иерархий приводят к решениям соответствующих скалярных иерархий.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Условиями интегрируемости линейной системы

$$\partial_{t_n} \psi = B_n \psi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

с независимыми переменными $\mathbf{t} := (t_1, t_2, t_3, \dots)$ являются условия нулевой кривизны Захарова–Шабата

$$\partial_{t_n} B_m - \partial_{t_m} B_n = [B_n, B_m]. \quad (2.2)$$

Нам известно [12], [13], что для нескольких важных иерархий вместо частных производных ∂_{t_n} более удобно использовать операторы

$$\hat{\chi}_n := p_n(-\tilde{\partial}), \quad \tilde{\partial} := \left(\partial_{t_1}, \frac{\partial_{t_2}}{2}, \frac{\partial_{t_3}}{3}, \dots \right), \quad (2.3)$$

где p_n – элементарные полиномы Шура. Понимание этого факта восходит к работе [15] (см. также [16]). В частности, имеем

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_0 &= \text{id}, & \hat{\chi}_1 &= -\partial_{t_1}, & \hat{\chi}_2 &= -\frac{1}{2}\partial_{t_2} + \frac{1}{2}\partial_{t_1}^2, \\ \hat{\chi}_3 &= -\frac{1}{3}\partial_{t_3} + \frac{1}{2}\partial_{t_2}\partial_{t_1} - \frac{1}{6}\partial_{t_1}^3, \\ \hat{\chi}_4 &= -\frac{1}{4}\partial_{t_4} + \frac{1}{3}\partial_{t_3}\partial_{t_1} + \frac{1}{8}\partial_{t_2}^2 - \frac{1}{4}\partial_{t_2}\partial_{t_1}^2 + \frac{1}{24}\partial_{t_1}^4. \end{aligned}$$

В таком случае приведенная выше линейная система может быть записана в эквивалентном виде

$$\psi_{-[\lambda]} = \mathcal{E}(\lambda)\psi, \quad (2.4)$$

где λ – некоторая независимая переменная и $\mathcal{E}(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \mathcal{E}_n$ – формальный степенной ряд по λ . Коэффициенты $\mathcal{E}_n$ могут быть выражены через B_n и наоборот. Например, $B_1 = -\mathcal{E}_1$, $B_2 = -2\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_{1,t_1} + \mathcal{E}_1^2$, $B_3 = -3\mathcal{E}_3 - 3\mathcal{E}_{2,t_1} - \mathcal{E}_{1,t_1 t_1} + 2\mathcal{E}_{1,t_1} \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_{1,t_1} + 3\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1^3$. В формуле (2.4) использована запись $[\lambda] := (\lambda, \lambda^2/2, \lambda^3/3, \dots)$ и

$$f_{-[\lambda]}(\mathbf{t}) := f(\mathbf{t} - [\lambda]) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{\chi}_n(f) \quad (2.5)$$

(формальный степенной ряд по λ) для любого объекта f , зависящего от $\mathbf{t}$. Последняя операция иногда называется сдвигом Мивы. Мы используем также “положительный” сдвиг Мивы, $f_{[\lambda]}(\mathbf{t}) := f(\mathbf{t} + [\lambda]) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \chi_n(f)$, где $\chi_n := p_n(\tilde{\partial})$. Условие интегрируемости теперь имеет вид

$$\mathcal{E}(\lambda)_{-[\mu]} \mathcal{E}(\mu) = \mathcal{E}(\mu)_{-[\lambda]} \mathcal{E}(\lambda) \quad (2.6)$$

с независимыми переменными λ, μ . Что касается оператора $\mathcal{E}(\lambda)$ как оператора параллельного переноса, то выражение (2.6) позволяет интерпретировать “дискретное” условие нулевой кривизны так, как показано на следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\mathcal{E}(\lambda)} & \bullet \\ \mathcal{E}(\mu) \downarrow & & \downarrow \mathcal{E}(\mu)_{-[\lambda]} \\ \bullet & \xrightarrow{\mathcal{E}(\lambda)_{-[\mu]}} & \bullet \end{array}$$

Здесь термин “дискретный” используется в смысле работы [16] (см. также [17], [18] по поводу подхода к интегрируемым уравнениям на основе дискретных уравнений нулевой кривизны).

Введем “дискретный” калибровочный потенциал (см. [19], [20])

$$\mathcal{E}(\lambda) = I - \lambda \mathcal{A}(\lambda), \quad (2.7)$$

где I – единичный элемент той (обычно матричной) алгебры, из которой берутся коэффициенты формального степенного ряда $\mathcal{A}(\lambda)^1$. Тогда условие (2.6) может быть записано в виде

$$\Upsilon(\lambda, \mu) = \Upsilon(\mu, \lambda), \quad \Upsilon(\lambda, \mu) := \mu^{-1}(\mathcal{A}(\lambda) - \mathcal{A}(\lambda)_{-[\mu]}) + \mathcal{A}(\lambda)_{-[\mu]} \mathcal{A}(\mu). \quad (2.8)$$

Соотношение (2.6) оказывается инвариантным относительно следующего калибровочного преобразования²⁾:

$$\mathcal{E}(\lambda) \mapsto \mathcal{B}_{-[\lambda]} \mathcal{E}(\lambda) \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{E}'(\lambda), \quad (2.9)$$

¹⁾В более общем случае коэффициенты формальных степенных рядов $\mathcal{E}(\lambda)$ и $\mathcal{A}(\lambda)$ могут быть элементами любой унитарной ассоциативной алгебры $\mathbb{A}$, элементы которой дифференцируемы относительно набора координат $\mathbf{t}$ (что требует структуры банахова пространства на алгебре $\mathbb{A}$). Тогда ψ – элемент левого $\mathbb{A}$ -модуля.

²⁾Преобразование (2.9) расширяет приведенную выше плоскую диаграмму до “коммутативного куба”, в котором оператор $\mathcal{B}$ действует вдоль перпендикулярных сторон.

где $\mathcal{B}$ – некоторый обратимый оператор. Это следует из преобразования $\psi' = \mathcal{B}\psi$ линейной системы (2.4). В частности, таким образом возникают преобразования Беклунда (или Дарбу) (см., например, [21]). В терминах калибровочного потенциала преобразование (2.9) имеет вид

$$\lambda^{-1}(\mathcal{B} - \mathcal{B}_{-[\lambda]}) = \mathcal{A}'(\lambda)\mathcal{B} - \mathcal{B}_{-[\lambda]}\mathcal{A}(\lambda). \quad (2.10)$$

В разделе 3 иерархия Бюргерса получена как следствие простейшего нетривиального анзаца для калибровочного потенциала $\mathcal{E}(\lambda)$ (см. также приложение, в котором приведен другой вариант матричной иерархии Бюргерса). Если калибровочный потенциал является линейным по оператору взятия частной производной относительно переменной x , мы получаем иерархию ПКП (см. раздел 4). Существуют другие примеры (см. [12], [13]) и обобщения условия (2.6), которые покрывают многокомпонентные иерархии.

3. ИЕРАРХИЯ БЮРГЕРСА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОУЛА–ХОПФА И БЕКЛУНДА В ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Выберем

$$\mathcal{E}(\lambda) = I - \lambda\phi, \quad (3.1)$$

так что калибровочный потенциал $\mathcal{A}(\lambda) = \phi$ и тем самым не зависит от λ , тогда условие (2.6) может быть представлено следующим образом:

$$\omega(\lambda) = \omega(\mu), \quad \omega(\lambda) := \lambda^{-1}(\phi - \phi_{-[\lambda]}) + \phi_{-[\lambda]}\phi. \quad (3.2)$$

Поскольку $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \omega(\lambda) = \phi_x + \phi^2$, где $x := t_1$, последнее условие оказывается эквивалентным условию

$$\Omega(\lambda) := \omega(\lambda) - \phi_x - \phi^2 \equiv (\phi - \phi_{-[\lambda]})(\lambda^{-1} - \phi) - \phi_x = 0, \quad (3.3)$$

которое является функциональным представлением (“некоммутативной”) иерархии Бюргерса. Первое уравнение иерархии есть уравнение Бюргерса $\phi_y = \phi_{xx} + 2\phi_x\phi$, где $y := t_2$. Из формулы (3.1) получаем $B_1 = \phi$, $B_2 = \phi_{t_1} + \phi^2$, $B_3 = \phi_{t_1 t_1} + 2\phi_{t_1}\phi + \phi\phi_{t_1} + \phi^3$ и т.д. Уравнения Захарова–Шабата (2.2) в таком случае также дают иерархию уравнений Бюргерса.

Поскольку кривизна обращается в нуль, можно ожидать, что существует калибровка, в которой калибровочный потенциал $\mathcal{A}$ также обращается в нуль. Поэтому будем искать обратимую функцию f такую, что

$$f_{-[\lambda]}^{-1}\mathcal{E}(\lambda)f = I \quad (3.4)$$

(т.е. $\mathcal{E}'(\lambda) = I$ и $\mathcal{B} = f^{-1}$ в (2.9)), являющуюся решением уравнения

$$\lambda^{-1}(f - f_{-[\lambda]}) = \phi f. \quad (3.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Уравнение (3.5) является функциональным представлением преобразования Коула–Хопфа

$$\phi = f_x f^{-1}, \quad (3.6)$$

$$\partial_{t_n} f = \partial_x^n f, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

Любая обратимая функция f , являющаяся решением линейной иерархии теплопроводности (3.7), определяет посредством (3.6) решение иерархии Бюргерса³⁾. Тогда из условия

$$0 = \Omega(\lambda)f = (\partial_x - \phi_{-[\lambda]})[\lambda^{-1}(f - f_{-[\lambda]}) - f_x]$$

следует, что f является решением иерархии теплопроводности, если выражение $\partial_x - \phi_{-[\lambda]}$ обратимо.

Отметим, что этот некоммутативный вариант преобразования Коула–Хопфа (см., например, [3], [7], [11], [22]–[26]) для уравнения Бюргерса появился, например, в работах [3], [26]–[28].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известное тождество для элементарных полиномов Шура p_n дает

$$n\hat{\chi}_n = -\sum_{k=1}^n \partial_{t_k} \hat{\chi}_{n-k} = -\sum_{k=1}^{n-2} \partial_{t_k} \hat{\chi}_{n-k} - \partial_{t_n} + \partial_x \partial_{t_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots$$

С помощью этих равенств можно доказать по индукции, что для произвольного $N > 1$ первые N уравнений системы (3.7) эквивалентны первым N уравнениям $\hat{\chi}_n(f) = 0$, $n = 2, 3, \dots$. Вместе с уравнением (3.6) эти уравнения эквивалентны уравнению (3.5). Более того, условие интегрируемости уравнения (3.5) есть уравнение иерархии Бюргерса (3.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Специальные решения иерархии теплопроводности (3.7) даются произвольными линейными комбинациями полиномов Шура $p_n(\mathbf{t})$, $n = 0, 1, \dots$, с постоянными коэффициентами из алгебры $\mathbb{A}$. В частности, следующее выражение с постоянным коэффициентом $P \in \mathbb{A}$ является (формальным) решением:

$$e^{\xi(P)} = \sum_{n \geq 0} p_n(\mathbf{t}) P^n, \quad \xi(P) := \sum_{m \geq 1} t_m P^m. \quad (3.8)$$

Трансформационное уравнение (2.10) теперь имеет вид

$$\lambda^{-1}(\mathcal{B} - \mathcal{B}_{-[\lambda]}) = \phi' \mathcal{B} - \mathcal{B}_{-[\lambda]} \phi. \quad (3.9)$$

Отсюда, переходя к пределу $\lambda \rightarrow 0$, имеем

$$\phi' = \mathcal{B} \phi \mathcal{B}^{-1} + \mathcal{B}_x \mathcal{B}^{-1}. \quad (3.10)$$

³⁾ Наоборот, если функция ϕ является решением иерархии Бюргерса, выберем f так, чтобы $f_x = \phi f$.

Исключая ϕ' из (3.9) с помощью последней формулы, получаем

$$(\mathcal{B} - \mathcal{B}_{-[\lambda]})(\lambda^{-1} - \phi) = \mathcal{B}_x. \quad (3.11)$$

С учетом (3.10) последнее уравнение эквивалентно уравнению (3.9). Любой обратимый оператор $\mathcal{B}$, удовлетворяющий уравнению (3.11), порождает по формуле (3.10) новое решение ϕ' из данного решения ϕ иерархии Бюргерса. Поскольку уравнение (3.11) линейно по $\mathcal{B}$, линейные комбинации решений (с постоянными левыми коэффициентами) снова являются решениями уравнения (3.11). Сравнение (3.11) с (3.3) показывает, что $\mathcal{B} = \phi$ – частное решение. Очевидно, что любой постоянный элемент α также удовлетворяет уравнению (3.11). Следовательно, оператор $\mathcal{B} = \alpha + \beta\phi$ с произвольными постоянными элементами α, β удовлетворяет этим условиям, и формула (3.10) принимает вид

$$\phi' = (\alpha + \beta\phi)\phi(\alpha + \beta\phi)^{-1} + \beta\phi_x(\alpha + \beta\phi)^{-1} \quad (3.12)$$

в предположении, что обратный оператор существует. Это преобразование охватывает элементарные преобразования Беклунда (или Дарбу), полученные в работах [3], [9], [24], [29], [30].

4. ИЕРАРХИЯ ПКП В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ВИДЕ. СВЯЗЬ С ИЕРАРХИЕЙ БЮРГЕРСА

При выборе⁴⁾

$$\mathcal{E}(\lambda) = I - \lambda(w(\lambda) + \partial), \quad (4.1)$$

т.е. при $\mathcal{A}(\lambda) = w(\lambda) + \partial$, где $\partial = \partial_x$, условие (2.8) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}(w(\mu) - w(\mu)_{-[\lambda]}) + w(\mu)_{-[\lambda]}w(\lambda) + w(\lambda)_x = \\ = \mu^{-1}(w(\lambda) - w(\lambda)_{-[\mu]}) + w(\lambda)_{-[\mu]}w(\mu) + w(\mu)_x \end{aligned} \quad (4.2)$$

и

$$w(\lambda) - w(\lambda)_{-[\mu]} = w(\mu) - w(\mu)_{-[\lambda]}. \quad (4.3)$$

Решением уравнения (4.3) является функция

$$w(\lambda) = \phi - \phi_{-[\lambda]}, \quad (4.4)$$

а уравнение (4.2) с учетом определения в (3.2) принимает вид

$$\omega(\lambda)_{-[\mu]} - \omega(\mu)_{-[\lambda]} = \omega(\lambda) - \omega(\mu) - (\phi_x + \phi^2)_{-[\lambda]} + (\phi_x + \phi^2)_{-[\mu]}. \quad (4.5)$$

Трижды циклически переставляя переменные $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и суммируя полученные выражения, получаем функциональное уравнение Богданова–Конопельченко [31], [32]

$$\sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \omega(\lambda_i)_{-[\lambda_j]} = 0, \quad (4.6)$$

⁴⁾Если взять $\mathcal{E}(\lambda) = I - \lambda v(\lambda)\partial$, можно таким же образом прийти к модифицированной иерархии Кадомцева–Петвиашвили [12]. Эти два потенциала $\mathcal{E}(\lambda)$ связаны калибровочным преобразованием (преобразованием Миуры).

где ϵ_{ijk} – абсолютно антисимметричный тензор, $\epsilon_{123} = 1$. Это уравнение определяет иерархию пКП и эквивалентно уравнению (4.5). Разлагая (4.5) по λ, μ , имеем $\partial_x \phi = \partial_{t_1} \phi$ и

$$\hat{\chi}_m \hat{\chi}_{n+1}(\phi) - \hat{\chi}_n \hat{\chi}_{m+1}(\phi) = \hat{\chi}_m(\hat{\chi}_n(\phi)\phi) - \hat{\chi}_n(\hat{\chi}_m(\phi)\phi), \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

Эквивалентное выражение для иерархии пКП (в скалярном случае) уже появлялось в работе [33] (см. также [10], [12]). При $m = 1, n = 2$ имеем уравнение пКП

$$(4\phi_t - \phi_{xxx} - 6\phi_x^2)_x - 3\phi_{yy} + 6[\phi_x, \phi_y] = 0, \quad (4.8)$$

где $x = t_1, y = t_2, t = t_3$. Сравнение (3.2) с (4.5) показывает, что любое решение рассмотренной в разделе 3 иерархии Бюргерса является также решением иерархии пКП.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Существует псевдодифференциальный оператор Сато–Вильсона $W = I + \sum_{n>0} w_n \partial^{-n}$ такой, что оператор $\mathcal{B} = W^{-1}$ в (2.9) преобразует $\mathcal{E}(\lambda)$ в $\mathcal{E}'(\lambda) = I - \lambda \partial$. Он определяется (с точностью до умножения на постоянный оператор $I + \sum_{n>0} c_n \partial^{-n}$) условиями

$$w_1 - w_{1,-[\lambda]} = \phi_{-[\lambda]} - \phi, \quad w_{n+1} - w_{n+1,-[\lambda]} = \lambda^{-1}(w_n - w_{n,-[\lambda]}) - w_{n,x} - (\phi - \phi_{-[\lambda]})w_n.$$

4.1. Иерархия пКП как неоднородная иерархия Бюргерса. Мы видели, что уравнение (4.5) может также быть записано в виде

$$\Omega(\mu) - \Omega(\mu)_{-[\lambda]} = \Omega(\lambda) - \Omega(\lambda)_{-[\mu]}, \quad (4.9)$$

где выражение $\Omega(\lambda)$ определено в формуле (3.3) через ϕ . В результате иерархия пКП принимает вид

$$\Omega(\lambda) = \theta - \theta_{-[\lambda]} \quad (4.10)$$

с некоторой функцией θ . Если правая часть обращается в нуль, т.е. θ – постоянная, это в точности есть функциональное представление (3.3) иерархии Бюргерса, рассмотренное в разделе 3. Представление (4.10) эквивалентно системе уравнений

$$\hat{\chi}_{n+1}(\phi) - \hat{\chi}_n(\phi)\phi = \hat{\chi}_n(\theta), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Первые два уравнения суть

$$\begin{aligned} \phi_y &= \phi_{xx} + 2\phi_x\phi + 2\theta_x, \\ \phi_t &= \phi_{xxx} + 3\phi_{xx}\phi + 3\phi_x^2 + 3\phi_x\phi^2 + 3\theta_x\phi + \frac{3}{2}(\theta_y + \theta_{xx}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где мы использовали первое уравнение, чтобы исключить ϕ_y во втором. При постоянном θ эти уравнения суть два первых уравнения иерархии Бюргерса. Исключая θ из уравнений (4.12), мы возвращаемся к уравнению пКП (4.8).

Применение сдвига Мивы к уравнению (4.5) дает

$$\tilde{\omega}(\lambda)_{[\mu]} - \tilde{\omega}(\mu)_{[\lambda]} = \tilde{\omega}(\lambda) - \tilde{\omega}(\mu) - (\phi_x + \phi^2)_{[\lambda]} + (\phi_x + \phi^2)_{[\mu]}, \quad (4.13)$$

где

$$\tilde{\omega}(\lambda) := \omega(\lambda)_{[\lambda]} = \lambda^{-1}(\phi_{[\lambda]} - \phi) + \phi\phi_{[\lambda]}.$$

Поскольку это уравнение можно записать как

$$\tilde{\Omega}(\lambda)_{[\mu]} - \tilde{\Omega}(\lambda) = \tilde{\Omega}(\mu)_{[\lambda]} - \tilde{\Omega}(\mu), \quad (4.14)$$

где

$$\tilde{\Omega}(\lambda) := \tilde{\omega}(\lambda) - \phi_x - \phi^2 = (\lambda^{-1} + \phi)(\phi_{[\lambda]} - \phi) - \phi_x,$$

то иерархия пКП также может быть представлена в виде

$$\tilde{\Omega}(\lambda) = \tilde{\theta}_{[\lambda]} - \tilde{\theta} \quad (4.15)$$

с некоторой функцией $\tilde{\theta}$. Функции $\tilde{\theta}$ и θ связаны соотношением $\tilde{\theta} - \theta = \phi_x + \phi^2$. Если $\tilde{\theta}$ – постоянная, так что правая часть последнего уравнения обращается в нуль, то это уравнение сводится к обратной иерархии Бюргерса (см. приложение)

$$(\lambda^{-1} + \phi)(\phi_{[\lambda]} - \phi) = \phi_x, \quad (4.16)$$

которая начинается с уравнения $\phi_y = -\phi_{xx} - 2\phi\phi_x$. В частности, имеем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Любое решение любой из двух иерархий Бюргерса является также решением иерархии пКП.

4.2. Преобразование Коула–Хопфа для матричной иерархии пКП.

ТЕОРЕМА. Пусть $(\mathbb{A}, \cdot)$ – алгебра $(M \times N)$ -матриц функций от переменных $\mathbf{t}$ с произведением

$$A \cdot B = AQB, \quad (4.17)$$

где в правой части подразумевается обычное матричное произведение, а Q – постоянная $(N \times M)$ -матрица. Пусть X – обратимая $(N \times N)$ -матрица, $Y \in \mathbb{A}$, причем матрицы X, Y являются решениями линейной иерархии теплопроводности (3.7) и удовлетворяют условию

$$X_x = RX + QY, \quad (4.18)$$

где R – некоторая постоянная $(N \times N)$ -матрица. Тогда иерархия пКП в алгебре $(\mathbb{A}, \cdot)$ имеет следующее решение:

$$\phi := YX^{-1}. \quad (4.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (4.19), выражение (3.3) для $\Omega(\lambda)$ (в нелинейный член которого в силу (4.17) входит множитель Q) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega(\lambda) = & (\phi - \phi_{-[\lambda]})(X_x - QY)X^{-1} + (\lambda^{-1}(Y - Y_{-[\lambda]}) - Y_x)X^{-1} - \\ & - \phi_{-[\lambda]}(\lambda^{-1}(X - X_{-[\lambda]}) - X_x)X^{-1}. \end{aligned}$$

Если X, Y являются решениями иерархии теплопроводности, то $\hat{\chi}_n(X) = 0 = \hat{\chi}_n(Y)$, $n = 2, 3, \dots$, и поэтому

$$\lambda^{-1}(X - X_{-[\lambda]}) = X_x, \quad \lambda^{-1}(Y - Y_{-[\lambda]}) = Y_x.$$

С помощью этих уравнений приведенное выше выражение для $\Omega(\lambda)$ сводится к выражению

$$\Omega(\lambda) = (\phi - \phi_{-[\lambda]})(X_x - QY)X^{-1}.$$

Если $R := (X_x - QY)X^{-1}$ – постоянная матрица, что означает выполнение условия (4.18), то последнее уравнение принимает вид иерархии пКП (4.10) с $\theta = \phi R$ ⁵⁾. Таким образом, ϕ является решением иерархии пКП.

Если $R = 0$, то при $M = N$ и $Q = I_N$ выражения (4.18) и (4.19) сводятся к $\phi = X_x X^{-1}$, и мы возвращаемся к преобразованию Коула–Хопфа для иерархии Бюргерса. Заметим, что наложенные на X условия уже обеспечивают выполнение условия $Q(\lambda^{-1}(Y - Y_{-[\lambda]}) - Y_x) = 0$, и поэтому Y автоматически удовлетворяет иерархии теплопроводности, если Q имеет максимальный ранг. Более того, если рассмотреть $Q\phi$ вместо ϕ , то условия на Y можно опустить.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X удовлетворяет иерархии теплопроводности и условию (4.18) с некоторым Y . Тогда $Q\phi$, где ϕ дается формулой (4.19), является решением $(N \times N)$ -матричной иерархии пКП с обычным матричным умножением.

Для случая, когда $\text{rank } Q = 1$ (см. [14] и цитируемую там литературу), аналогичный результат уже был представлен в [11]. В этом случае $\text{tr}(QA \cdot B) = \text{tr}(QA) \text{tr}(QB)$, так что в силу (4.18) функция

$$\varphi := \text{tr}(Q\phi) = -\text{tr } R + (\ln \tau)_x, \quad \tau := \det X, \quad (4.20)$$

является решением скалярной иерархии пКП.

4.3. Преобразования Беклунда и Дарбу. Подстановка $\mathcal{B} = b(\mathbf{t}) - \partial$ в уравнение (2.10) приводит к двум уравнениям:

$$b - \phi' + \phi = (b - \phi' + \phi)_{-[\lambda]} \quad (4.21)$$

и

$$\lambda^{-1}(b - b_{-[\lambda]}) - b_x = (\phi' - \phi'_{-[\lambda]})b - b_{-[\lambda]}(\phi - \phi_{-[\lambda]}) + (\phi - \phi_{-[\lambda]})_x. \quad (4.22)$$

Решение уравнения (4.21) есть

$$b = \phi' - \phi \quad (4.23)$$

(аддитивная константа включена в ϕ'). Тогда уравнение (4.22) может быть записано в виде

$$\Omega(\lambda) - \Omega'(\lambda) = \Gamma(\phi, \phi') - \Gamma(\phi, \phi')_{-[\lambda]}, \quad (4.24)$$

где $\Omega'(\lambda)$ построена из ϕ' и $\Gamma(\phi, \phi') := (\phi' - \phi)\phi - \phi_x$. Это элементарное преобразование Беклунда иерархии пКП. Расширение использованного выше анзаца для $\mathcal{B}$

⁵⁾ Отметим также, что $\tilde{\theta} = \theta + \phi_x + \phi Q\phi = Y_x X^{-1}$ в силу (4.18).

до n -го порядка по ∂ приводит к уравнениям, которые определяют преобразования Беклунда n -го порядка. Они решаются с помощью n -кратного произведения элементарных преобразований Беклунда.

Используя представление (4.10), находим

$$0 = \Gamma(\phi, \phi') + \theta' - \theta = \phi' \phi + \theta' - \tilde{\theta}. \quad (4.25)$$

Пусть $\mathcal{B}_{n,m}$ обозначает преобразование Беклунда, переводящее решение уравнения пКП ϕ_m в новое решение ϕ_n . Тогда перестановочное соотношение⁶⁾ $\mathcal{B}_{(3,1)}\mathcal{B}_{(1,0)} = \mathcal{B}_{(3,2)}\mathcal{B}_{(2,0)}$ дает в результате

$$(\phi_2 - \phi_1)_x = \phi_3(\phi_2 - \phi_1) + (\phi_2 - \phi_1)\phi_0 + \phi_1^2 - \phi_2^2. \quad (4.26)$$

Полагая в коммутативном скалярном случае $\phi = \tau_x/\tau$, где τ – некоторая функция, имеем $\tau_0\tau_3 = \tau_1\tau_{2,x} - \tau_{1,x}\tau_2$. Соотношение (4.26) представляет собой алгебраическое выражение нового решения ϕ_3 через заданное решение ϕ_0 и соответствующие беклундовские потомки ϕ_1, ϕ_2 .

В рассматриваемом случае линейная система (2.4) принимает вид

$$\lambda^{-1}(\psi - \psi_{-[\lambda]}) - \psi_x = (\phi - \phi_{-[\lambda]})\psi. \quad (4.27)$$

Эквивалентный вариант этой системы в скалярном случае представлен в работе [15]. Если функция ψ обратима, получаем уравнение

$$\phi - \phi_{-[\lambda]} = \lambda^{-1}(\psi - \psi_{-[\lambda]})\psi^{-1} - \psi_x\psi^{-1}. \quad (4.28)$$

Если исключить из уравнения (4.22) функции ϕ' с помощью соотношения (4.23), а затем выражения $\phi - \phi_{-[\lambda]}$ – с помощью уравнения (4.28), то уравнение (4.22) принимает вид

$$(b - \psi_x\psi^{-1})_x + (b - \psi_x\psi^{-1})(b + \lambda^{-1}\psi_{-[\lambda]}\psi^{-1}) - \\ - (b_{-[\lambda]} + \lambda^{-1}\psi_{-[\lambda]}\psi^{-1})(b - \psi_x\psi^{-1}) = 0. \quad (4.29)$$

Очевидным решением этого уравнения является функция

$$b = \psi_x\psi^{-1}. \quad (4.30)$$

Следовательно, если ψ_1 – решение линейной системы с ϕ , где ϕ – решение иерархии пКП, то

$$\phi' = \phi + \psi_{1,x}\psi_1^{-1} \quad (4.31)$$

– новое решение иерархии пКП⁷⁾. Это есть преобразование Дарбу [30], [34]–[36].

⁶⁾Заметим, что это также дискретное условие нулевой кривизны.

⁷⁾Боле того, функция $\psi' = \mathcal{B}\psi = \psi_x - \psi_{1,x}\psi_1^{-1}\psi$ удовлетворяет линейной системе с ϕ' .

5. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ИЕРАРХИЯМИ пКП И БЮРГЕРСА: НА ПУТИ К ТОЧНЫМ РЕШЕНИЯМ

Рассмотрим функциональное уравнение Богданова–Конопельченко (4.6) в алгебре $(\mathbb{A}, \cdot)$, где $\mathbb{A}$ – множество $(M \times N)$ -матриц комплексных функций от переменных $\mathbf{t}$, снабженное произведением (4.17). Простейшим нетривиальным уравнением, вытекающим из этой формулы при разложении по степеням переменных, является матричное уравнение пКП

$$(4\phi_t - \phi_{xxx} - 6\phi_x Q \phi_x)_x = 3\phi_{yy} - 6(\phi_x Q \phi_y - \phi_y Q \phi_x). \quad (5.1)$$

Как следствие величина ϕQ удовлетворяет $(M \times M)$ -матричной иерархии пКП, а $Q\phi - (N \times N)$ -матричной иерархии пКП. Более того, если $Q = VU^T$, где $V - (N \times m)$ -матрица, а $U - (M \times m)$ -матрица, то $U^T \phi V$ удовлетворяет $(m \times m)$ -матричной иерархии пКП. В частности, при $m = 1$ она превращается в скалярную иерархию пКП. В последнем случае ранг Q равен единице.

Решающее наблюдение теперь состоит в том, что функциональное уравнение Богданова–Конопельченко и, следовательно, уравнения иерархии пКП выполнены, если функция ϕ является решением уравнения

$$\omega(\lambda) = S + L\phi - \phi_{-[\lambda]}R \quad (5.2)$$

с постоянными матрицами S, L, R размеров $M \times N$, $M \times M$ и $N \times N$, соответственно. Это функциональное матричное уравнение Риккати для функции ϕ ,

$$\lambda^{-1}(\phi - \phi_{-[\lambda]}) = S + L\phi - \phi_{-[\lambda]}R - \phi_{-[\lambda]}Q\phi. \quad (5.3)$$

Условие интегрируемости для этого функционального уравнения выполнено⁸⁾, поскольку выражение

$$\begin{aligned} (\phi_{-[\lambda]})_{-[\mu]} &= [(\lambda^{-1} - L)\phi_{-[\mu]} - S][(\lambda^{-1} - R) - Q\phi_{-[\mu]}]^{-1} = \\ &= [(\lambda^{-1} - L)(\mu^{-1} - L)\phi - (\lambda^{-1} - \mu^{-1})S + LS + SR + SQ\phi] \times \\ &\times [(\lambda^{-1} - R)(\mu^{-1} - R) - (\lambda^{-1} + \mu^{-1})Q\phi + (RQ + QL)\phi + QS]^{-1} \end{aligned} \quad (5.4)$$

симметрично по λ, μ и поэтому равно $(\phi_{-[\mu]})_{-[\lambda]}$. Из уравнения Риккати следует, что

$$\Omega(\lambda) = (\phi - \phi_{-[\lambda]})R, \quad \tilde{\Omega}(\lambda) = L(\phi_{[\lambda]} - \phi). \quad (5.5)$$

Это показывает, что при $R = 0$ (соответственно $L = 0$), любое решение уравнения (5.3) является также решением иерархии Бюргерса (3.3) (соответственно обратной иерархии (4.16)) в алгебре $(\mathbb{A}, \cdot)$.

Хорошо известно, что матричные уравнения Риккати могут быть линейаризованы [37], [38]. Это достигается рассмотрением $\phi(\mathbf{t})$ как элемента многообразия Грассмана $G(N, N+M)$ N -мерных линейных подпространств в пространстве $\mathbb{C}^{N+M}$ посредством соотношения $\kappa(\phi) = \text{span}(I_N, \phi^T)^T$, поскольку $\kappa^{-1}: G(N, N+M) \rightarrow \mathbb{C}^{M \times N}$

⁸⁾Это следует также из нашей работы [10] и является основанием для выбора правой части уравнения (5.2).

определяет график для многообразия $G(N, N + M)$. Действительно, уравнение (5.3) может быть поднято до линейного уравнения на пространстве $((N + M) \times N)$ -матриц:

$$\lambda^{-1}(Z - Z_{-[\lambda]}) = HZ, \quad (5.6)$$

где

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} R & Q \\ S & L \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Следовательно, получаем

$$\lambda^{-1}(X - X_{-[\lambda]}) = RX + QY, \quad \lambda^{-1}(Y - Y_{-[\lambda]}) = SX + LY. \quad (5.8)$$

Если предположить, что матрица X обратима, и положить

$$\phi = YX^{-1}, \quad (5.9)$$

то из этих уравнений следует уравнение

$$\phi_{-[\lambda]} = Y_{-[\lambda]}X_{-[\lambda]}^{-1} = [\phi - \lambda(S + L\phi)][I_N - \lambda(R + Q\phi)]^{-1}, \quad (5.10)$$

которое совпадает с уравнением (5.3). Поэтому любое решение Z линейного функционального уравнения (5.6) с обратимой матрицей X определяет по формуле (5.9) решение функционального матричного уравнения Риккати (5.3), а следовательно, и решение матричной иерархии пКП, с которой мы начинали.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Первое из уравнений (5.8) эквивалентно условию (4.18) и иерархии теплопроводности для X . Поскольку второе уравнение (5.8) означает, что Y также является решением иерархии теплопроводности, то в силу доказанной в п. 4.2 теоремы функция ϕ , определенная формулой (5.9), является решением иерархии пКП без дополнительного уравнения $Y_x = SX + LY$, которое следует из второго уравнения (5.8). Однако это уравнение помогает выделить интересные классы решений (см. ниже). В любом случае метод Риккати отвечает классу (обобщенных) преобразований Коула–Хопфа в смысле доказанной выше теоремы. Отметим также, что $\hat{\theta} = S + L\phi$.

Общее решение уравнения (5.6) имеет вид

$$Z = e^{\xi(H)}Z_0, \quad \xi(H) = \sum_{n \geq 1} H^n t_n, \quad Z_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

где матрица X_0 обратима. Следовательно, $Z_{t_n} = H^n Z$. Записав

$$e^{\xi(H)} =: \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

имеем

$$\phi = (\Xi_{21} + \Xi_{22}\phi_0)(\Xi_{11} + \Xi_{12}\phi_0)^{-1}, \quad (5.13)$$

где $\phi_0 = Y_0 X_0^{-1}$. Это матричное дробное преобразование с коэффициентами, зависящими от $\mathbf{t}$. Для любого выбора матриц S, L, R, Q эта функция ϕ является решением иерархии пКП в матричной алгебре с произведением (4.17). Практическая задача состоит в явном вычислении $e^{\xi(H)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При $Z = e^{\xi(H)}Z_0$ величина TZ также удовлетворяет уравнению (5.6), если T постоянно и коммутирует с H . В частности, выражение $T = kI_{M+N} + H$ с любой постоянной k порождает такое преобразование. В результате имеем матричное дробное преобразование (с постоянными коэффициентами) $\phi' = (S + L'\phi)(R' + Q\phi)^{-1}$, где $L' := L + kI_M$, $R' := R + kI_N$.

ПРИМЕР 1. Пусть $S = 0$ и $Q = RK - KL$, где K – постоянная $(N \times M)$ -матрица. Тогда имеем

$$H^n = \begin{pmatrix} R^n & R^n K - KL^n \\ 0 & L^n \end{pmatrix}, \quad \xi(H) = \begin{pmatrix} \xi(R) & \xi(R)K - K\xi(L) \\ 0 & \xi(L) \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

и поэтому

$$e^{\xi(H)} = \begin{pmatrix} e^{\xi(R)} & e^{\xi(R)}K - Ke^{\xi(L)} \\ 0 & e^{\xi(L)} \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

так что преобразование (5.13) принимает вид

$$\phi = e^{\xi(L)}\phi_0(I_N + K\phi_0 - e^{-\xi(R)}Ke^{\xi(L)}\phi_0)^{-1}e^{-\xi(R)}. \quad (5.16)$$

Если матрица Q имеет ранг, равный единице, то мы получаем следующее решение скалярной иерархии пКП:

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{tr}(Q\phi) = \text{tr} \ln(I_N + K\phi_0 - e^{-\xi(R)}Ke^{\xi(L)}\phi_0)_x = (\ln \tau)_x, \\ \tau &= \det(I_N + K\phi_0 - e^{-\xi(R)}Ke^{\xi(L)}\phi_0), \end{aligned} \quad (5.17)$$

включающее известные формулы для многосолитонных [39] и резонансных (см., например, [40], [41] и цитируемую там литературу) решений уравнения КП.

ПРИМЕР 2. Пусть $M = N$ и $L = S\pi_-$, $R = \pi_+S$, $Q = \pi_+S\pi_-$ с постоянными $(N \times N)$ -матрицами S , $\pi_{\pm}$ такими, что $\pi_+ + \pi_- = I_N$. Легко видеть, что

$$H^n = \begin{pmatrix} \pi_+ S^n & \pi_+ S^n \pi_- \\ S^n & S^n \pi_- \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Как следствие находим

$$e^{\xi(H)} = \begin{pmatrix} \pi_- + \pi_+ e^{\xi(S)} & \pi_+ (e^{\xi(S)} - I_N) \pi_- \\ e^{\xi(S)} - I_N & \pi_+ + e^{\xi(S)} \pi_- \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

и преобразование (5.13) имеет вид

$$\phi = (-A + e^{\xi(S)}B)(\pi_- A + \pi_+ e^{\xi(S)}B)^{-1}, \quad (5.20)$$

где $A := I_N - \pi_+ \phi_0$, $B := I_N + \pi_- \phi_0$. Если $\text{rank}(\pi_+ S \pi_-) = 1$, то

$$\varphi = \text{tr}(Q\phi) = -\text{tr}(\pi_+ S) + (\ln \tau)_x, \quad \tau = \det(\pi_- A + \pi_+ e^{\xi(S)}B). \quad (5.21)$$

Например, пусть $N = m + n$. Выберем

$$\pi_- = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Записывая

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} (\phi_0)_{--} & (\phi_0)_{-+} \\ (\phi_0)_{+-} & (\phi_0)_{++} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_{--} & S_{-+} \\ S_{+-} & S_{++} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

и учитывая, что $\text{rank } Q = 1$ означает $\text{rank } S_{+-} = 1$ (см. [14]), получаем

$$\tau = \det((e^{\xi(S)})_{++} + (e^{\xi(S)})_{+-}(\phi_0)_{-+}). \quad (5.24)$$

В частности, если S – оператор сдвига: $Se_i = e_{i+1}$, то это выражение определяет тау-функцию, которая может быть выражена через полиномы Шура. Это соответствует конечному варианту теории Сато (см. [14]). Если, например, $m = n = 2$ и $(\phi_0)_{-+} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, получаем

$$\tau = 1 + cx + a\left(y + \frac{x^2}{2}\right) + d\left(y - \frac{x^2}{2}\right) + b\left(t - \frac{x^3}{3}\right) + (ad - bc)\left(-xt + y^2 + \frac{x^4}{12}\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обратная иерархия Бюргерса и не только

Обобщим анзац для калибровочного потенциала $\mathcal{E}(\lambda)$, рассмотренный в разделе 3, следующим образом:

$$\mathcal{E}(\lambda) = I - \lambda \sum_{n \geq 0} \lambda^n \phi_n. \quad (\text{П.1})$$

Тогда условие (2.8) принимает вид

$$\hat{\chi}_{n+1}(\phi_m) - \hat{\chi}_{m+1}(\phi_n) = \sum_{k=0}^n \hat{\chi}_k(\phi_m) \phi_{n-k} - \sum_{k=0}^m \hat{\chi}_k(\phi_n) \phi_{m-k}, \quad (\text{П.2})$$

где $m, n = 0, 1, 2, \dots$. Это бесконечная система сцепленных уравнений. Как и в разделе 3, мы будем искать калибровочное преобразование такое, что выполняется условие (3.4). Оно определяется уравнением

$$\lambda^{-1}(f - f_{-[\lambda]}) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \phi_n f. \quad (\text{П.3})$$

При разложении левой части этого уравнения по степеням λ оно превращается в обобщенное преобразование Коула–Хопфа

$$\phi_0 = f_x f^{-1}, \quad \phi_n = -\hat{\chi}_{n+1}(f) f^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{П.4})$$

По построению это решение уравнения нулевой кривизны и, следовательно, иерархии (П.2). Калибровочное преобразование (2.10) принимает вид

$$\lambda^{-1}(\mathcal{B} - \mathcal{B}_{-[\lambda]}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (\phi'_n \mathcal{B} - \mathcal{B}_{-[\lambda]} \phi_n), \quad (\text{П.5})$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} \phi'_0 &= \mathcal{B} \phi_0 \mathcal{B}^{-1} + \mathcal{B}_x \mathcal{B}^{-1}, \\ \hat{\chi}_{n+1}(\mathcal{B}) &= -\phi'_n \mathcal{B} + \sum_{k=0}^n \hat{\chi}_k(\mathcal{B}) \phi_{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

ПРИМЕР 3. Если положить $\phi_n = -\hat{\chi}_n(\phi)$, $n = 0, 1, \dots$, так что

$$\mathcal{E}(\lambda) = I + \lambda\phi_{-[\lambda]}, \quad (\text{П.7})$$

то система (П.2) для $m = 0$ принимает вид

$$\hat{\chi}_{n+1}(\phi) + \hat{\chi}_n(\phi_x + \phi^2) - \hat{\chi}_n(\phi)\phi = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (\text{П.8})$$

и в функциональной форме после сдвига Мивы превращается в представление (4.16) обратной иерархии Бюргерса. Оставшиеся уравнения, вытекающие из системы (П.2), суть

$$\hat{\chi}_m \hat{\chi}_{n+1}(\phi) - \hat{\chi}_n \hat{\chi}_{m+1}(\phi) = \sum_{k=1}^m \hat{\chi}_{m-k} \hat{\chi}_n(\phi) \hat{\chi}_k(\phi) - \sum_{k=1}^n \hat{\chi}_{n-k} \hat{\chi}_m(\phi) \hat{\chi}_k(\phi),$$

где $m, n = 1, 2, \dots$. С учетом свойства производной Хасса–Шмидта для операторов $\hat{\chi}_n$ это есть вид (4.7) иерархии пКП. Однако нам уже известно, что иерархия пКП выполнена как следствие иерархии Бюргерса. Уравнение (П.4) принимает вид

$$\phi = -f_x f^{-1}, \quad \hat{\chi}_n(\phi) = \hat{\chi}_{n+1}(f) f^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{П.9})$$

Это приводит к линейному функциональному уравнению

$$f_{[\lambda]}^{-1} = f^{-1} + \lambda(f^{-1})_x, \quad (\text{П.10})$$

и потому $\chi_n(f^{-1}) = 0$ при $n = 2, 3, \dots$, что эквивалентно следующему варианту линейной иерархии теплопроводности:

$$\partial_{t_n}(f^{-1}) = (-1)^{n+1} \partial_x^n(f^{-1}), \quad n = 2, 3, \dots \quad (\text{П.11})$$

В результате если функция f^{-1} является решением линейной иерархии (П.11), то функция $\phi = -f_x f^{-1}$ является решением иерархии Бюргерса (4.16), а также иерархии пКП.

Уравнения (П.6) превращаются в уравнения

$$\phi' = \mathcal{B}\phi\mathcal{B}^{-1} - \mathcal{B}_x\mathcal{B}^{-1}, \quad (I + \lambda\phi')\mathcal{B}_{[\lambda]} = \mathcal{B}(I + \lambda\phi). \quad (\text{П.12})$$

Использование первого уравнения для исключения ϕ' во втором дает уравнение, линейное по $\mathcal{B}^{-1}$:

$$(\lambda^{-1} + \phi)(\mathcal{B}_{[\lambda]}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}) = (\mathcal{B}^{-1})_x. \quad (\text{П.13})$$

Сравнение с иерархией Бюргерса (4.16) показывает, что функция $\mathcal{B}^{-1} = \phi$ является решением. Более общее решение этого уравнения дается выражением $\mathcal{B}^{-1} = \alpha + \phi\beta$ с любыми постоянными α, β .

ПРИМЕР 4. При условиях $\phi_n = 0$ для $n > 0$ и $\phi := \phi_0$ иерархия (П.2) сводится к иерархии Бюргерса из раздела 3, а второе уравнение (П.4) требует, чтобы функция f была решением линейной иерархии теплопроводности. При ослаблении ограничения до $\phi_n = 0$ для $n > 1$, т.е. при сохранении ϕ_0 и ϕ_1 в качестве зависимых

переменных, иерархия (П.2) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} & (\hat{\chi}_{n+1}(\phi_0) - \hat{\chi}_n(\phi_0)\phi_0 - \hat{\chi}_{n-1}(\phi_0)\phi_1)\delta_{m,0} + \\ & + (\hat{\chi}_{n+1}(\phi_1) - \hat{\chi}_n(\phi_1)\phi_0 - \hat{\chi}_{n-1}(\phi_1)\phi_1)\delta_{m,1} = \\ & = (\hat{\chi}_{m+1}(\phi_0) - \hat{\chi}_m(\phi_0)\phi_0 - \hat{\chi}_{m-1}(\phi_0)\phi_1)\delta_{n,0} + \\ & + (\hat{\chi}_{m+1}(\phi_1) - \hat{\chi}_m(\phi_1)\phi_0 - \hat{\chi}_{m-1}(\phi_1)\phi_1)\delta_{n,1}. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Достаточно рассмотреть уравнения с $m < n$. При $m = 0$, $n = 1$ имеем

$$\phi_{0,y} - \phi_{0,xx} - 2\phi_{0,x}\phi_0 = 2\phi_{1,x} + 2[\phi_1, \phi_0]. \quad (\text{П.15})$$

Уравнения системы (П.14) при $m = 0$, $n > 1$ суть

$$\hat{\chi}_{n+1}(\phi_0) - \hat{\chi}_n(\phi_0)\phi_0 - \hat{\chi}_{n-1}(\phi_0)\phi_1 = 0, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (\text{П.16})$$

а при $m = 1$, $n > 1$ –

$$\hat{\chi}_{n+1}(\phi_1) - \hat{\chi}_n(\phi_1)\phi_0 - \hat{\chi}_{n-1}(\phi_1)\phi_1 = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (\text{П.17})$$

В рассматриваемом случае уравнения (П.4) принимают вид

$$\phi_0 = f_x f^{-1}, \quad \phi_1 = -\hat{\chi}_2(f) f^{-1} = \frac{1}{2}(f_y - f_{xx}) f^{-1} \quad (\text{П.18})$$

и

$$\hat{\chi}_n(f) = 0, \quad n = 3, 4, \dots, \quad (\text{П.19})$$

и не эквивалентны иерархии теплопроводности, поскольку уравнение $\hat{\chi}_2(f) = 0$ отсутствует.

Список литературы

- [1] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, V. V. Sokolov, “The symmetry approach to classification of integrable equations”, *What Is Integrability?* Springer Ser. Nonlinear Dynam., ed. V. E. Zakharov, Springer, Berlin, 1991, 115–184.
- [2] D. V. Choodnovsky, G. V. Choodnovsky, *Nuovo Cimento B*, **40** (1977), 339–352.
- [3] D. Levi, O. Ragnisco, M. Bruschi, *Nuovo Cimento B*, **74** (1983), 33–51.
- [4] M. Bruschi, O. Ragnisco, *J. Math. Phys.*, **26** (1985), 943–945.
- [5] A. Pickering, *J. Math. Phys.*, **35** (1994), 821–833.
- [6] A. S. Fokas, Q. M. Liu, *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994), 3293–3296.
- [7] H. Tasso, *J. Phys. A*, **29** (1996), 7779–7784.
- [8] B. A. Kupershmidt, *KP or mKP. Noncommutative Mathematics of Lagrangian, Hamiltonian, and Integrable Systems*, Math. Surveys Monogr., **78**, AMS, Providence, 2000.
- [9] B. A. Kupershmidt, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12** (2005), 539–549.
- [10] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, *Nonassociativity and integrable hierarchies*, [nlin.SI/0601001](https://arxiv.org/abs/nlin.SI/0601001).
- [11] F. Guil, M. Mañas, G. Álvarez, *Phys. Lett. A*, **190** (1994), 49–52.
- [12] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, *J. Phys. A*, **39** (2006), 9169–9186.
- [13] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, *J. Phys. A*, **39** (2006), 14015–14033.
- [14] M. Gekhtman, A. Kasman, *J. Geom. Phys.*, **56** (2006), 282–309.

- [15] M. Sato, Y. Sato, “Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold”, *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science* (Tokyo, 1982), North-Holland Math. Stud., **81**, eds. H. Fujita, P.D. Lax, G. Strang, North-Holland, Amsterdam, 1983, 259–271.
- [16] E. Date, M. Jinbo, T. Miwa, *J. Phys. Soc. Japan*, **51** (1982), 4116–4124.
- [17] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris, *Commun. Math. Phys.*, **233** (2003), 513–543.
- [18] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris, *Lett. Math. Phys.*, **61** (2002), 241–254.
- [19] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, T. Striker, *J. Phys. A*, **26** (1993), 1927–1949.
- [20] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, T. Striker, *Phys. Lett. B*, **300** (1993), 141–144.
- [21] L.-L. Chau, J. C. Shaw, H. C. Yen, *Commun. Math. Phys.*, **149** (1992), 263–278.
- [22] E. Hopf, *Commun. Pure Appl. Math.*, **3** (1950), 201–230.
- [23] J.D. Cole, *Quart. Appl. Math.*, **9** (1951), 225–236.
- [24] J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale, *J. Math. Phys.*, **24** (1983), 522–526.
- [25] K. T. Joseph, A. S. Vasudeva Murthy, *NoDEA Nonlinear Diff. Equations Appl.*, **8** (2001), 173–193.
- [26] D. J. Arrigo, F. Hickling, *J. Phys. A*, **35** (2002), L389–L399.
- [27] M. Hamanaka, K. Toda, *J. Phys. A*, **36** (2003), 11981–11998.
- [28] L. Martina, O.K. Pashaev, *Burgers’ equation in noncommutative space-time*, [hep-th/0302055](#).
- [29] A. S. Fokas, *Invariants, Lie-Bäcklund operators, and Bäcklund transformations*, PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 1979.
- [30] V.B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer, Berlin, 1991.
- [31] L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko, *J. Math. Phys.*, **39** (1998), 4701–4728.
- [32] L. V. Bogdanov, *Analytic-Bilinear Approach to Integrable Hierarchies*, Math. Appl., **493**, Kluwer, Dordrecht, 1999.
- [33] J. Dorfmeister, E. Neher, J. Szmigielski, *Quart. J. Math.*, **40** (1989), 161–195.
- [34] V.B. Matveev, *Lett. Math. Phys.*, **3** (1979), 213–216.
- [35] W. Oevel, *Phys. A*, **195** (1993), 533–576.
- [36] Q. P. Liu, M. Mañas, *J. Nonlinear Sci.*, **9** (1999), 213–232.
- [37] W. T. Reid, *Riccati Differential Equations*, Math. Sci. Eng., **86**, Academic Press, New York, 1972.
- [38] H. Abou-Kandil, G. Freiling, V. Ionescu, G. Jank, *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*, Systems Control Found. Appl., Birkhäuser, Basel, 2003.
- [39] S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its, V. B. Matveev, *Phys. Lett. A*, **63** (1977), 205–206.
- [40] G. Biondini, S. Chakravarty, *J. Math. Phys.*, **47** (2006), 033514.
- [41] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, *Czech. J. Phys.*, **56** (2006), 1123–1130; [nlin.PS/0608017](#).