Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Грюндланд, Б. Юард, О решениях ранга k систем гидродинамического типа, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 1, 83–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6072>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 04:07:39

© 2007 г.

А. М. Грюндланд^{*†}, Б. Юард[†]

О РЕШЕНИЯХ РАНГА k СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Представлен некоторый вариант метода условных симметрий для получения решений ранга k квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка в многомерном пространстве в терминах инвариантов Римана. Детально рассмотрены примеры применения предложенного подхода к уравнениям динамики жидкости в размерности $n + 1$. Получены несколько новых типов алгебраических и рациональных решений и решений солитонного типа (в числе которых кинки, ударные решения и составные волновые решения).

Ключевые слова: условные симметрии, инварианты Римана, решения ранга k дифференциальных уравнений в частных производных.

1. УСЛОВНЫЕ СИММЕТРИИ И ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ РАНГА k

В настоящей работе изучаются условные симметрии для систем гидродинамического типа в многомерном евклидовом пространстве. Обзоры современных исследований в данной области представлены в работах [1]–[4] и в цитируемой в них литературе. Наш подход основан на конкретном варианте метода условных симметрий (МУС) в том виде, в каком он был развит в работах [5], [6]. Основой вводимой здесь модификации метода является следующий постулат: решения ранга k могут быть выражены в терминах инвариантов Римана. Давно известно, что движение гидродинамического потока в пространстве малой размерности характеризуется наличием инвариантов Римана [7], [8]. Выбор этих инвариантов в качестве новых независимых переменных приводит к существенному упрощению рассматриваемой системы уравнений, которая в некоторых случаях становится линейной. Наш подход

^{*}Université du Québec, Trois-Rivières CP500 (QC) G9A 5H7, Canada.
E-mail: grundlan@crm.umontreal.ca

[†]Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, C. P. 6128, Succ. Centre-ville, Montréal, (QC) H3C 3J7, Canada. E-mail: huard@dms.umontreal.ca

характеризуется более глубоким проникновением в метод групповой инвариантности, что дает возможность получить новые результаты, касающиеся разрешимости задачи.

Начнем с рассмотрения некоторых теоретических основ, необходимых для объяснения процедуры построения решений ранга k нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) в многомерном пространстве в терминах инвариантов Римана. Рассмотрим квазилинейную гиперболическую систему l ДУЧП первого порядка в пространстве p независимых и q зависимых переменных

$$\mathcal{A}^1(u)u_1 + \dots + \mathcal{A}^p(u)u_p = 0, \quad (1.1)$$

где $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^p$ – вещественные $(l \times q)$ -матричные функции, зависящие от переменных $u = (u^1, \dots, u^q) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^q$, а через u_i обозначены частные производные первого порядка от u , т.е. $u_i \equiv \partial u / \partial x^i$, $x = (x^1, \dots, x^p) \in X \subset \mathbb{R}^p$. Все рассмотрения носят локальный характер. Достаточно искать решения, определенные в некоторой окрестности начала координат $x = 0$. Для любых заданных линейно независимых вещественных волновых векторов $\lambda^A(u) = (\lambda_1^A(u), \dots, \lambda_p^A(u))$ системы (1.1), удовлетворяющих условиям

$$\ker(\lambda_1^A \mathcal{A}^1 + \dots + \lambda_p^A \mathcal{A}^p) \neq 0, \quad A = 1, \dots, k < p, \quad (1.2)$$

рассмотрим семейство дифференциальных операторов X_a первого порядка, определенных в области $X \times U$,

$$X_a = \xi_a^1(u) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \xi_a^p(u) \frac{\partial}{\partial x^p}, \quad a = 1, \dots, p - k, \quad (1.3)$$

где ξ_a^i – некоторые непрерывно дифференцируемые функции от u в открытой области U пространства $\mathbb{R}^q$ такие, что

$$\lambda_1^A \xi_a^1 + \dots + \lambda_p^A \xi_a^p = 0, \quad A = 1, \dots, k. \quad (1.4)$$

Заметим, что векторные поля X_a не содержат векторов, касательных к направлению u . Таким образом, поля X_a образуют абелево распределение на области $X \times U$, т.е. $[X_a, X_b] = 0$ при $a, b = 1, \dots, p - k$.

Уравнения

$$u = f(r^1(x, u), \dots, r^k(x, u)), \quad r^A = \lambda_i^A(u)x^i, \quad A = 1, \dots, k, \quad (1.5)$$

для любой функции $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^q$ определяют единственную функцию $u(x)$ в окрестности точки $x = 0$. Вещественнозначная функция $r^A: X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ называется инвариантом Римана, ассоциированным с волновым вектором λ^A .

Целью настоящей работы является построение и исследование решений ранга k вида (1.5), которое можно осуществить с помощью переопределенной системы (1.1), дополненной характеристиками векторных полей X_a

$$\xi_a^i(u)u_i^\alpha = 0. \quad (1.6)$$

Матрица Якоби уравнений (1.5) может быть представлена в матричной записи как

$$\partial u = (u_i^\alpha) = \left(\mathcal{I}_q - \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial r} \lambda \in \mathbb{R}^{q \times p} \quad (1.7)$$

или, эквивалентно, как

$$\partial u = \frac{\partial f}{\partial r} \left(\mathcal{I}_k - \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right)^{-1} \lambda \in \mathbb{R}^{q \times p}, \quad (1.8)$$

где $\mathcal{I}_q$ и $\mathcal{I}_k$ – единичные матрицы размера $q \times q$ и $k \times k$, соответственно,

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial r^A} \right) \in \mathbb{R}^{q \times k}, \quad \lambda = (\lambda_i^A) \in \mathbb{R}^{k \times p}, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \left(\frac{\partial r^A}{\partial u^\alpha} \right) = \left(\frac{\partial \lambda_i^A}{\partial u^\alpha} x^i \right) \in \mathbb{R}^{k \times q}, \quad r = (r^1, \dots, r^k) \in \mathbb{R}^k. \quad (1.10)$$

Подстановка (1.7) (или (1.8)) в (1.1) дает

$$\text{tr} \left(\mathcal{A}^\mu \left(\mathcal{I}_q - \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial r} \lambda \right) = 0, \quad \mu = 1, \dots, l, \quad (1.11)$$

или

$$\text{tr} \left(\mathcal{A}^\mu \frac{\partial f}{\partial r} \left(\mathcal{I}_k - \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right)^{-1} \lambda \right) = 0, \quad \mu = 1, \dots, l, \quad (1.12)$$

где $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^l$ – $(p \times q)$ -матричные функции от u , т.е. $\mathcal{A}^\mu = (\mathcal{A}^\mu)_\alpha^i(u) \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $\mu = 1, \dots, l$. Для заданной системы уравнений (1.1) матрицы $\mathcal{A}^\mu$ являются известными функциями от u , и уравнения (1.11) (или (1.12)) представляют собой условия на функции $f^\alpha(r)$ и λ^A (или на $\xi_a(u)$ в силу (1.4)). С вычислительной точки зрения удобно разделить переменные x^i на группы x^{i_A} и x^{i_a} и выбрать базис для волновых векторов λ^A так, что

$$\lambda^A = dx^{i_A} + \lambda_{i_a}^A dx^{i_a}, \quad A = 1, \dots, k, \quad (1.13)$$

где (i_A, i_a) – некоторая перестановка индексов $(1, \dots, p)$. При этом выражение (1.10) принимает вид

$$\frac{\partial r^A}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial \lambda_{i_a}^A}{\partial u^\alpha} x^{i_a}. \quad (1.14)$$

Подстановка (1.14) в (1.11) (или в (1.12)) дает

$$\text{tr} \left(\mathcal{A}^\mu (\mathcal{I}_q - Q_a x^{i_a})^{-1} \frac{\partial f}{\partial r} \lambda \right) = 0, \quad \mu = 1, \dots, l, \quad (1.15)$$

или

$$\text{tr} \left(\mathcal{A}^\mu \frac{\partial f}{\partial r} (\mathcal{I}_k - K_a x^{i_a})^{-1} \lambda \right) = 0, \quad \mu = 1, \dots, l, \quad (1.16)$$

где

$$Q_a = \frac{\partial f}{\partial r} \eta_a \in \mathbb{R}^{q \times q}, \quad K_a = \eta_a \frac{\partial f}{\partial r} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad \eta_a = \left(\frac{\partial \lambda_{i_a}^A}{\partial u^\beta} \right) \in \mathbb{R}^{k \times q} \quad (1.17)$$

для фиксированной перестановки i_A и для $i_a = 1, \dots, p-1$. Отметим, что функции r^A и x^{i_a} в окрестности начала координат являются функционально независимыми. Матричные функции $\mathcal{A}^\mu$, $\partial f / \partial r$, Q_a и K_a зависят только от r . Следовательно, уравнения (1.15) (или (1.16)) должны выполняться для любых значений координат x^{i_a} . Данное требование приводит к некоторым ограничениям на эти матричные функции.

Согласно теореме Кэли–Гамильтона для любой обратимой $(n \times n)$ -матрицы M выражение $M^{-1} \det M$ является полиномом по M степени $n-1$. Поэтому, используя то обстоятельство, что след выражения $\mathcal{A}^\mu (\mathcal{I}_q - Q_a x^{i_a})^{-1} \frac{\partial f}{\partial r} \lambda$ равен нулю, мы можем заменить уравнения (1.15) следующими уравнениями:

$$\operatorname{tr} \left(\mathcal{A}^\mu Q \frac{\partial f}{\partial r} \lambda \right) = 0, \quad \mu = 1, \dots, l, \quad \text{где} \quad Q = \operatorname{adj}(\mathcal{I}_q - Q_a x^{i_a}) \in \mathbb{R}^{q \times q}. \quad (1.18)$$

Здесь через $\operatorname{adj} M$ обозначена матрица, сопряженная матрице M . Заметим, что Q есть полином степени $q-1$ по x^{i_a} . Рассмотрев уравнения (1.18) и все их частные производные по переменным x^{i_a} (r фиксировано в начале координат $x = 0$), получаем следующие условия для матричных функций $f(r)$ и $\lambda(f)$:

$$\operatorname{tr} \left(\mathcal{A}^\mu \frac{\partial f}{\partial r} \lambda \right) = 0, \quad (1.19)$$

$$\operatorname{tr} \left(\mathcal{A}^\mu Q_{(a_1} \dots Q_{a_s)} \frac{\partial f}{\partial r} \lambda \right) = 0, \quad \mu = 1, \dots, l, \quad (1.20)$$

где $s = 1, \dots, q-1$ и $Q_{(a_1} \dots Q_{a_s)}$ обозначает результат симметризации Q по всем индексам в скобках. Аналогичная процедура может быть применена к системе (1.16), в результате мы получим условия (1.19) и соотношения

$$\operatorname{tr} \left(A^\mu \frac{\partial f}{\partial r} K_{(a_1} \dots K_{a_s)} \lambda \right) = 0, \quad K = \operatorname{adj}(\mathcal{I}_k - K_a x^{i_a}) \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad (1.21)$$

причем теперь $s = 1, \dots, k-1$. Уравнения (1.19) представляют собой начальные условия на поверхность в пространстве независимых переменных X , заданную условиями $x^{i_a} = 0$. Заметим, что в силу (1.13) поля X_a можно представить в виде

$$X_a = \partial_{i_a} - \lambda_{i_a}^A \partial_{i_A}. \quad (1.22)$$

Таким образом, если уравнение (1.20) (или (1.21)) выполнено, то условия (1.19) на следы матричных функций также выполнены вдоль траекторий векторных полей (1.22)

Подстановка выражений (1.17) в (1.20) или в (1.21) и последующие упрощения дают единообразное выражение

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left(A^\mu \frac{\partial f}{\partial r} \eta_{(a_1} \frac{\partial f}{\partial r} \dots \eta_{a_s)} \frac{\partial f}{\partial r} \lambda \right) &= 0, \quad \eta_{a_t} = \left(\frac{\partial \lambda_{a_t}^A}{\partial u^\beta} \right) \in \mathbb{R}^{k \times q}, \\ \mu &= 1, \dots, l, \quad t = 1, \dots, s, \quad s \leq \max(q-1, k-1). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Отметим, что любая $(n \times n)$ -матрица b является корнем полинома Кэли–Гамильтона

$$\det(\lambda \mathcal{I}_n - b) = \lambda^n - \sum_{i=1}^n p_i(b) \lambda^{n-i}. \quad (1.24)$$

Подход Фаддеева (см. книгу [9]) предоставляет рекуррентный метод для вычисления коэффициентов $p_i(b)$ на основе формул Ньютона:

$$kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \dots - p_{k-1} s_1, \quad s_k = \operatorname{tr}(b^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.25)$$

Нетрудно, например, вычислить

$$\begin{aligned} p_1 &= \operatorname{tr} b, & p_2 &= \frac{1}{2} [\operatorname{tr} b^2 - (\operatorname{tr} b)^2], & p_3 &= \frac{1}{6} [(\operatorname{tr} b)^3 - 3 \operatorname{tr} b \cdot \operatorname{tr} b^2 + 2 \operatorname{tr} b^3], \\ p_4 &= \frac{1}{24} [6 \operatorname{tr} b^4 - (\operatorname{tr} b)^4 - 8 \operatorname{tr} b \cdot \operatorname{tr} b^3 - 3(\operatorname{tr} b^2)^2 + 6(\operatorname{tr} b)^2 \operatorname{tr} b^2], & \dots, \\ p_n &= (-1)^{n+1} \det b. \end{aligned} \quad (1.26)$$

По теореме Кэли–Гамильтона имеем

$$b^n - \sum_{i=1}^n p_i(b) b^{n-i} = 0. \quad (1.27)$$

Используя это тождество, можно упростить выражения (1.19) и (1.23) в зависимости от размерности матрицы b . Более детально этот вопрос рассмотрен в работе [6].

Системы (1.19) и (1.23) являются в общем случае нелинейными, и нельзя ожидать, что их удастся решить в замкнутом виде за исключением некоторых частных случаев. Несмотря на это поиск частных решений ранга k для многих физически интересных систем ДУЧП – это деятельность, вполне заслуживающая внимания. В разделах 3 и 4 продемонстрировано, что наш подход облегчает построение подобных решений. Такие частные решения систем (1.19) и (1.23) могут быть получены в предположении, что функция f представляет собой рациональную функцию, которую можно также интерпретировать как усеченный ряд Лорана по переменным r^A . Этот метод работает только для уравнений, обладающих свойством Пенлеве. Следовательно, такие уравнения очень часто могут быть проинтегрированы в терминах известных функций.

2. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

Мы хотели бы продемонстрировать предложенный метод построения решений ранга k на примере уравнений гидродинамики. Жидкость предполагается идеальной, нестационарной, изэнтропической и сжимаемой. Ограничим рассмотрение случаем, когда влиянием диссипативных факторов типа вязкости и теплопроводности можно пренебречь, и будем считать, что внешние силы отсутствуют. При сделанных предположениях классическая гидродинамическая модель подчиняется системе

уравнений размерности $(3 + 1)$, которая может быть записана в матричном эволюционном виде как [7], [8]

$$u_t + \sum_{i=1}^3 \mathcal{A}^i(u) u_{x^i} = 0, \quad (2.1)$$

где матричные функции $\mathcal{A}^1$, $\mathcal{A}^2$ и $\mathcal{A}^3$ задаются выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^1 &= \begin{pmatrix} u^1 & k^{-1}a & 0 & 0 \\ ka & u^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^1 \end{pmatrix}, & \mathcal{A}^2 &= \begin{pmatrix} u^2 & 0 & k^{-1}a & 0 \\ 0 & u^2 & 0 & 0 \\ ka & 0 & u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^2 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}^3 &= \begin{pmatrix} u^3 & 0 & 0 & k^{-1}a \\ 0 & u^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^3 & 0 \\ ka & 0 & 0 & u^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Уравнения (2.1) образуют квазилинейную гиперболическую однородную систему из четырех уравнений для четырех неизвестных функций $u = (u^\alpha) = (a, \vec{u}) \in \mathbb{R}^4$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, где $\vec{u} = (u^1, u^2, u^3)$ – векторное поле скоростей жидкости и a – скорость звука. Независимые переменные обозначены как $(x^\mu) = (t, x, y, z) \in X \subset \mathbb{R}^4$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Алгебра классических точечных симметрий Ли уравнений (2.1) была исследована в [10]. Она составляет алгебру подобия Галилея, которая порождается двенадцатью дифференциальными операторами

$$\begin{aligned} P_\mu &= \partial_{x^\mu}, & J_k &= \epsilon_{kij}(x^i \partial_{x^j} + u^i \partial_{u^j}), & K_i &= t \partial_{x^i} + \partial_{u^i}, \\ F &= t \partial_t + x^i \partial_{x^i}, & G &= -t \partial_t + a \partial_a + u^i \partial_{u^i}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В частном случае, когда показатель адиабаты равен $\gamma = 5/3$, эта алгебра порождается тринадцатью инфинитезимальными дифференциальными операторами, а именно двенадцатью операторами, порождающими алгебру подобия Галилея (2.2), и проективным преобразованием

$$C = t(t \partial_t + x^i \partial_{x^i} - a \partial_a) + (x^i - x^0 u^i) \partial_{u^i}. \quad (2.3)$$

Классификация подалгебр этих алгебр по классам сопряженности представлена в работе [10]. Большие классы инвариантных и частично инвариантных решений системы (2.1) детально исследованы в работе [11].

Волновой вектор λ может быть записан в виде $(\lambda_0, \vec{\lambda})$, где вектор $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ обозначает направление распространения волны, а собственное значение λ_0 есть фазовая скорость рассматриваемой волны. Дисперсионное соотношение для изэнтропических уравнений (2.1) принимает вид

$$\det(\lambda_0(u) \mathcal{I}_4 + \lambda_i(u) \mathcal{A}^i(u)) = (\lambda_0 + \vec{u} \cdot \vec{\lambda})^2 [(\lambda_0 + \vec{u} \cdot \vec{\lambda})^2 - a^2 \vec{\lambda}^2] = 0. \quad (2.4)$$

Решение дисперсионного уравнения (2.4) дает два типа волновых векторов, которые отвечают различным собственным значениям системы (2.1) – потенциальные и вихревые волновые векторы [12]. Мы обозначим их λ^E и λ^S , соответственно,

$$\lambda^E = (\epsilon a + \vec{u} \cdot \vec{e}, -\vec{e}), \quad \epsilon = \pm 1, \quad (2.5)$$

$$\lambda^S = ([\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}], -\vec{e} \times \vec{m}), \quad |\vec{e}|^2 = 1, \quad (2.6)$$

где $\vec{e}$ и $\vec{m}$ суть единичный и произвольный векторы, соответственно. Уравнение (2.6) здесь имеет кратность 2. Величина $[\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}]$ обозначает детерминант матрицы, составленной из этих векторов, т.е. $[\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}] = \det(\vec{u}, \vec{e}, \vec{m})$. Известно несколько классов k -волновых решений изэнтропической системы (2.1), полученных с помощью обобщенного метода характеристик (ОМХ) [12], [13]. Можно ожидать, что применение МУС к этой системе даст некоторые новые результаты, поскольку условия (1.6) и (1.4) слабее условий

$$u_i^\alpha = \sum_{s=1}^k h^s(x) \gamma_s^\alpha(u) \lambda_i^s(u), \quad (2.7)$$

$$\mathcal{A}^{\mu i}_\alpha \lambda_i^s \gamma_{(s)}^\alpha = 0, \quad s = 1, \dots, k, \quad (2.8)$$

которые требуются для ОМХ. Уравнения (1.6) и (1.4) означают просто, что существует вещественнозначная матричная функция Φ_s^α , определенная на первом пространстве струй $J^1 = J^1(X \times U)$, для которой выполнено

$$u_i^\alpha = \Phi_s^\alpha \lambda_i^s.$$

Первые производные u_i^α , определяемые этим уравнением, не обязательно разложимы в соответствии с (2.7) и не обязательно удовлетворяют волновому соотношению (2.8).

3. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ РАНГА 2 И 3

Намеченный в разделе 1 конструктивный подход применен нами к уравнениям изэнтропического потока (2.1) для построения решений ранга 2 и ранга 3. Результаты проведенных исследований, часть из которых являются новыми, представлены в табл. 1, 2, которые демонстрируют диапазон таких решений, полученных из различных комбинаций векторных полей X_a . Для удобства мы обозначили через $(E_i E_j, E_i S_j, S_i S_j, E_i E_j E_k), \dots$, $i, j, k = 1, 2, 3$, решения, возникающие в результате нелинейной суперпозиции заданных решений ранга 1. Через r^1 , r^2 и r^3 обозначены инварианты Римана, совпадающие с групповыми инвариантами векторных полей X_a рассматриваемого решения.

Здесь мы не будем подробно обсуждать представленные в табл. 1, 2 решения. Вместо этого сконцентрируем внимание на подклассе решений, которые могут быть выведены из большинства представленных решений, а именно на ограниченных решениях солитонного типа. С этой целью полезно выбрать дифференциальные связи

ТАБЛИЦА 1. Решения ранга 2

№	Тип	Векторные поля	Инварианты Римана
1	$E_1 E_2$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial x^1},$ $X_2 = \frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\sigma_3}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial x^1},$ $\beta_i = e_2^i(a + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}) - e_1^i(a + \vec{e}_2 \cdot \vec{u}),$ $\sigma_j = e_1^1 e_2^j - e_1^j e_2^1.$	$r_1 = (1+k)\bar{a}_1(r^1)t - \vec{e}_1 \cdot \vec{x},$ $r_2 = (1+k)\bar{a}_2(r^2)t - \vec{e}_2 \cdot \vec{x},$ $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -1/k.$
			<p>Решение</p> $\bar{a} = \bar{a}_1(r^1) + \bar{a}_2(r^2)$ $\vec{u} = k(\vec{e}_1 \bar{a}_1(r^1) + \vec{e}_2 \bar{a}_2(r^2))$
2	$E_1 S_1$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial x^1},$ $X_2 = \frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\sigma_3}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial x^1},$ $\beta_i = -(\vec{e}_2 \times \vec{m})^i(a + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}) +$ $+ e_1^i[\vec{u}, \vec{e}_2, \vec{m}],$ $\sigma_j = -e_1^1(\vec{e}_2 \times \vec{m})^j +$ $+ e_1^j(\vec{e}_2 \times \vec{m})^1, j = 2, 3.$	<p>Инварианты Римана</p> $r_1 = ((1+k)\bar{a}_1(r^1) + C^2)t - \vec{e}_1 \cdot \vec{x},$ $r_2 = Ct - [\vec{x}, \vec{e}_2, \vec{m}],$ $C^2 = (C^1 e_1^1 - e_1^3)^{-1}.$
			<p>Решение</p> $\bar{a} = \bar{a}_1(r^1) + a_0,$ $[\vec{u}_2, \vec{e}_2, \vec{m}] = C,$ $\vec{u} = k\bar{a}_1(r^1) + \vec{u}_2(r^2),$ $\bar{u}_2^3(r^2) = C^1 \bar{u}_2^1(r^2).$
3А	$S_1 S_2$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} + u^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + u^2 \frac{\partial}{\partial x^2},$ $X_2 = \frac{\partial}{\partial x^3}.$	<p>Инварианты Римана</p> $r^1 = x^1 - u^1 t,$ $r^2 = x^2 - u^2 t.$
			<p>Решение</p> $\bar{a} = a_0, \bar{u}^1 = -\phi_{r^2}, \bar{u}^2 = \phi_{r^1},$ $\bar{u}^3 = \bar{u}^3(r^1, r^2),$ $\phi_{r^1 r^1} \phi_{r^2 r^2} - \phi_{r^1 r^2}^2 = 0.$
3Б	$S_1 S_2$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} + u^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + u^2 \frac{\partial}{\partial x^2},$ $X_2 = \frac{\partial}{\partial x^3}.$	<p>Инварианты Римана</p> $r^1 = x^1 - u^1 t,$ $r^2 = x^2 - u^2 t.$
			<p>Решение</p> $\bar{a} = a_0, \bar{u}^2 = \bar{u}^3 = g(x^1 - x^2),$ $\bar{u}^1 = b(x^1 - tg(x^1 - x^2), x^2 -$ $-tg(x^1 - x^2))$

Продолжение табл. 1

3В	$S_1 S_2$	$X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial x^1},$ $X_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\sigma_3}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial x^1},$ $\beta_j = \lambda_j^2 [\vec{u}, \vec{e}_1, \vec{m}_1] -$ $- \lambda_j^1 [\vec{u}, \vec{e}_2, \vec{m}_2],$ $\sigma_i = \lambda_1^1 \lambda_i^2 - \lambda_i^1 \lambda_1^2.$	<p>Инварианты Римана</p> $r^1 = (C_1 + \frac{\lambda_1^1}{\lambda_1^2} C_2) t - \vec{\lambda}^1 \cdot \vec{x},$ $r^2 = (C_2 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^1} C_1 + G(r^1)) t - \vec{\lambda}^2 \cdot \vec{x},$ $\lambda_i^j = -(\vec{e}_j \times \vec{m}_j)^i,$ $G(r^1) = ((\lambda_1^1 \lambda_2^2 - \lambda_2^1 \lambda_1^2) \bar{u}_1^2(r^1) +$ $+ (\lambda_1^1 \lambda_3^2 - \lambda_3^1 \lambda_1^2) \bar{u}_1^3(r^1)) / \lambda_1^1.$
			<p>Решение</p> $\bar{a} = a_0,$ $\bar{u}^1 = \frac{1}{\lambda_1^1} (C_1 - \lambda_2^1 \bar{u}_1^2(r^1) - \lambda_3^1 \bar{u}_1^3(r^1)) -$ $- (\frac{\lambda_3^2}{\lambda_1^2} \eta + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^1}) \bar{u}_2^2(r^2) + \frac{C^2}{\lambda_1^2},$ $\bar{u}^2 = \bar{u}_1^2(r^1) + \bar{u}_2^2(r^2),$ $\bar{u}^3 = \bar{u}_1^3(r^1) + \eta \bar{u}_2^2(r^2),$ $\eta = \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^1 - \lambda_1^1 \lambda_2^2}{\lambda_1^1 \lambda_3^2 - \lambda_3^1 \lambda_1^2}.$
4	$E_1 E_2 S_1$	$X = \frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\sigma_1}{\beta_{12}} \frac{\partial}{\partial t} +$ $+ \frac{\beta_{23}}{\beta_{12}} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\beta_{31}}{\beta_{12}} \frac{\partial}{\partial x^2},$ $\sigma_1 = \epsilon_{ijk} e_1^i e_2^j (\vec{e}_3 \times \vec{m})^k,$ $\beta_{ij} = (e_1^j e_2^i - e_1^i e_2^j) \times$ $\times [\vec{u}, \vec{e}_3, \vec{m}] + (e_2^j (\vec{e}_3 \times \vec{m})^i -$ $- e_2^i (\vec{e}_3 \times \vec{m})^j) (a + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}) +$ $+ (e_1^i (\vec{e}_3 \times \vec{m})^j - e_1^j (\vec{e}_3 \times \vec{m})^i) \times$ $\times (a + \vec{e}_2 \cdot \vec{u}).$	<p>Инварианты Римана</p> $r^1 = \frac{\beta \bar{u}_3^1(r^3) t - e_1^1 x^1 - e_2^1 x^2}{1 - \alpha(1+k)t},$ $r^2 = \frac{-\beta \bar{u}_3^1(r^3) t - e_2^1 x^1 - e_2^2 x^2}{1 - \alpha(1+k)t},$ $r^3 = x^3 - u_0^3 t,$ $\beta = (1 + k^{-1}) / (e_1^1 - e_2^1).$
			<p>Решение</p> $\bar{a} = \frac{\alpha((e_1^1 + e_2^1)x^1 + (e_2^1 + e_2^2)x^2)}{1 - \alpha(1+k)t}, \quad \bar{u}^3 = u_0^3,$ $\bar{u}^1 = -\frac{1}{1 - \alpha(1+k)t} (k\alpha(((e_1^1)^2 + (e_2^1)^2)x^1 +$ $+ (e_1^1 e_1^1 + e_2^1 e_2^2)x^2) - \bar{u}_3^1(r^3)),$ $\bar{u}_2 = k\alpha \left(\frac{e_1^2 (\beta \bar{u}_3^1(r^3) t - e_1^1 x^1 - e_2^1 x^2)}{1 - \alpha(1+k)t} + \right.$ $+ \left. \frac{e_2^2 (-\beta \bar{u}_3^1(r^3) t - e_2^1 x^1 - e_2^2 x^2)}{1 - \alpha(1+k)t} \right) +$ $+ \frac{e_2^2 - e_1^2}{e_2^1 - e_1^1} \bar{u}_3^1(r^3).$

(ДС), соответствующие некоторому классу нелинейных уравнений Клейна–Гордона, которые, как известно, обладают богатыми совокупностями решений солитонного типа [1], [2], [14]. Заметим, что общие решения системы (2.1) обладают степенями свободы, которые в различных случаях представляют собой одну или две произвольные функции (инварианты Римана). Поэтому наложим на произвольные функции, например, на v , ДС, зависящие от двух независимых переменных r^1 и r^2 и имеющие вид

$$\square_{r^1, r^2} v = c v^5, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Продолжение табл. 1

		Векторные поля	Инварианты Римана
5	$E_1 S_1 S_2$	$X = \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\sigma_1}{\beta_{12}} \frac{\partial}{\partial x^1} +$ $+ \frac{\beta_{23}}{\beta_{12}} \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\beta_{31}}{\beta_{12}} \frac{\partial}{\partial x^3},$ $\sigma_1 = \epsilon_{ijk} e_1^i (\vec{e}_2 \times \vec{m}_2)^j \times$ $\times (\vec{e}_3 \times \vec{m}_3)^k,$ $\beta_{ij} = [e_1^j (\vec{e}_3 \times \vec{m}_3)^i -$ $- e_1^i (\vec{e}_3 \times \vec{m}_3)^j] [\vec{u}, \vec{e}_2, \vec{m}_2] +$ $+ [e_1^i (\vec{e}_2 \times \vec{m}_2)^j -$ $- e_1^j (\vec{e}_2 \times \vec{m}_2)^i] [\vec{u}, \vec{e}_3, \vec{m}_3] +$ $+ [(\vec{e}_2 \times \vec{m}_2)^i (\vec{e}_3 \times \vec{m}_3)^j -$ $- (\vec{e}_2 \times \vec{m}_2)^j (\vec{e}_3 \times \vec{m}_3)^i] \times$ $\times (a + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}).$	$r^1 = \frac{(C_2/\lambda_1^2 + C_3/\lambda_1^3)t - x^1}{1 - \alpha(1+k)t},$ $r^2 = (\lambda_1^2 k \alpha r^1 + C_2 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^3} C_3)t -$ $- \vec{\lambda}^2 \cdot \vec{x},$ $r^3 = (\lambda_1^3 k \alpha r^1 + \frac{\lambda_1^3}{\lambda_1^2} C_2 + C_3)t -$ $- \vec{\lambda}^3 \cdot \vec{x},$ $\lambda^3 = (\lambda_1^3, b\lambda_2^2, b\lambda_3^2).$
			Решение $\bar{a} = \alpha \frac{(C_2/\lambda_1^2 + C_3/\lambda_1^3)t - x^1}{1 - \alpha(1+k)t},$ $\bar{u}^1 = \frac{(C_2/\lambda_1^2 + C_3/\lambda_1^3)(1 - \alpha t) - k\alpha x^1}{1 - \alpha(1+k)t},$ $\bar{u}^2 = C(b\lambda_1^2 - \lambda_1^3)(\lambda_2^2 x^2 + \lambda_3^2 x^3),$ $\bar{u}^3 = -\frac{C\lambda_2^2(b\lambda_1^2 - \lambda_1^3)}{\lambda_3^2 \lambda_1^3}(\lambda_2^2 x^2 + \lambda_3^2 x^3).$

Перечень решений ранга 2 солитонного типа, полученных из этой переопределенной системы, представлен ниже.

1. СЛУЧАЙ $(E_1 E_2)$. Следующее ограниченное решение может быть получено с использованием составных ДС (3.1):

$$a = \sum_{i=1}^2 A_i r^i (1 + B_i (r^i)^2)^{-1/2}, \quad A_i, B_i \in \mathbb{R}, \quad B_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.2)$$

$$\vec{u} = k \left[\sum_{i=1}^2 A_i r^i (1 + B_i (r^i)^2)^{-1/2} \vec{e}_i \right];$$

инварианты Римана даются формулой

$$r^i = [(1+k)A_i r^i (1 + B_i (r^i)^2)^{-1/2}]t - \vec{e}_i \cdot \vec{x}, \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

Результат (3.2) представляет алгебраическое решение типа кинка, которое является ограниченным при $t > 0$, в то время как каждый инвариант Римана r^i претерпевает разрыв в момент времени $T = (A_i(1+k))^{-1}$.

2. СЛУЧАЙ $(E_1 S_1)$. Другой интересный случай условно инвариантного решения будет иметь место, если потребовать, чтобы вектор $\vec{u}$ имел вид $\vec{u} = k a_1(r^1) \vec{e}_1 + \vec{u}_2(r^2)$ и наложить условия $[\vec{u}_2, \vec{e}_2, \vec{m}_2] = C$ (на функцию $\vec{u}_2$) и $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{m}] = 0$, где $|\vec{e}_i| = 1$, $i = 1, 2$. Тогда решение является ограниченным и представляет собой уединенную двойную волну типа $(E_1 S_1)$:

$$a = A_1 (1 + B_1 (r^1 - 1)^2)^{-1/2} + a_0, \quad (3.4)$$

$$\vec{u} = k A_1 (1 + B_1 (r^1 - 1)^2)^{-1/2} \vec{e}_1 + (u_2^1(r^2), Du_2^1(r^2) - E, Ku_2^1(r^2))^T,$$

ТАБЛИЦА 2. Решения ранга 2

№	Тип	Векторные поля	Инварианты Римана
1	$E_1 E_2 E_3$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\sigma_1}{\beta_3} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\beta_1}{\beta_3} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\beta_2}{\beta_3} \frac{\partial}{\partial x^2},$ $\sigma_1 = -[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3],$ $\beta_i = (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)^i (a + \vec{e}_1 \cdot \vec{u}) +$ $+ (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)^i (a + \vec{e}_2 \cdot \vec{u}) +$ $+ (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)^i (a + \vec{e}_3 \cdot \vec{u}).$	$r^i = (1+k)a_i(r^i)t - \vec{e}_i \cdot \vec{x},$ $i = 1, 2, 3,$ $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = -1/k,$ $i \neq j = 1, 2, 3.$
			Решение $\bar{a} = \bar{a}_1(r^1) + \bar{a}_2(r^2) + \bar{a}_3(r^3),$ $\vec{u} = k(\vec{e}_1 \bar{a}_1(r^1) +$ $+ \vec{e}_2 \bar{a}_2(r^2) + \vec{e}_3 \bar{a}_3(r^3)).$
2А	$E_1 S_1 S_2$	$X = e_2^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + e_2^2 \frac{\partial}{\partial x^2}.$	Инварианты Римана $r^1 = ((1+k^{-1})f(r^1) +$ $+ a_0 + u_0^3)t - x^3,$ $r^2 = t - x^1 \sin g(r^2, r^3) +$ $+ x^2 \cos g(r^2, r^3),$ $\partial r^3 / \partial t +$ $+ (f(r^1) + u_0^3) \partial r^3 / \partial x^3 = 0.$
			Решение $\bar{a} = k^{-1} f(r^1) + a_0,$ $\bar{u}^1 = \sin g(r^2, r^3),$ $\bar{u}^2 = -\cos g(r^2, r^3),$ $\bar{u}^3 = f(r^1) + u_0^3.$
2Б	$E_1 S_1 S_2$	$X = e_2^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + e_2^2 \frac{\partial}{\partial x^2}.$	Инварианты Римана $r^1 = \frac{((1+k^{-1})B + a_0 + u_0^3)t - x^3}{1 - (1+k^{-1})At},$ $r^2 = t - x^1 \sin g(r^2, r^3) +$ $+ x^2 \cos g(r^2, r^3),$ $r^3 = \Psi \left[\frac{1}{A} (A(ka_0 - u_0^3)t + \right.$ $+ x^3 - ka_0 - B) \times$ $\left. \times ((1+k)At - k)^{-k/(k+1)} \right].$
			Решение $\bar{a} = k^{-1} (Ar^1 + B) + a_0,$ $\bar{u}^1 = \sin g(r^2, r^3),$ $\bar{u}^2 = -\cos g(r^2, r^3),$ $\bar{u}^3 = Ar^1 + B + u_0^3.$

Продолжение табл. 2

2B	$E_1 S_1 S_2$	$X = \frac{\partial}{\partial x^3}$.	Инварианты Римана $r^1 = (k^{-1} f(r^1) + a_0)t -$ $-x^1 \cos f(r^1) - x^2 \sin f(r^1),$ $r^2 = -t \cos f(r^1) - x^2,$ $r^3 = -t \sin f(r^1) + x^1.$
			Решение $\bar{a} = k^{-1} f(r^1) + a_0,$ $\bar{u}^1 = \sin f(r^1),$ $\bar{u}^2 = -\cos f(r^1),$ $\bar{u}^3 = g(r^2 \cos f(r^1) +$ $+ r^3 \sin f(r^1)).$

где

$$u_2^1(r^2) = A_2(1 + B_2 \operatorname{ch} D(r^2 - 1))^{-1/2}, \quad A_2, B_2, D, K \in \mathbb{R}, \quad B_2 > 0, \quad (3.5)$$

$$E = dC, \quad d = (e_2^1 m^3 - e_2^3 m^1)^{-1}, \quad D = d(K(e_2^1 m^2 - e_2^2 m^1) + (e_2^2 m^3 - e_2^3 m^1)).$$

Инварианты Римана принимают вид

$$r^1 = (1 + k)(A_1(1 + B_1(r^1 - 1)^2)^{-1/2} + C^2)t - \vec{e}_1 \cdot \vec{x}, \quad r^2 = Ct - [\vec{x}, \vec{e}_2, \vec{m}], \quad (3.6)$$

где $C^2 = C(C^1 e_1^1 - e_1^3)^{-1}$. Функция r^1 претерпевает градиентную катастрофу в момент времени $T = ((1 + k)A_1 B_1)^{-1}(1 + B_1)^{3/2}$.

3. СЛУЧАЙ $(S_1 S_2)$. **А.** Если $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, то решение в неявном виде определяется уравнениями

$$a(t, x) = a_0, \quad u^1 = (1 - n) \left(\frac{x^1 - u^1 t}{x^2 - u^2 t} \right)^n, \quad u^2 = -n \left(\frac{x^2 - u^2 t}{x^1 - u^1 t} \right)^{1-n}, \quad (3.7)$$

$$u^3(t, x) = u^3(x^1 - u^1 t, x^2 - u^2 t).$$

При $n = 2$ мы получаем явное сингулярное решение вида

$$a = a_0, \quad u^1 = -2^{-1} t^{-2} [x^1 t + (x^2)^2 \pm x^2 ((x^2)^2 + 4tx^1)^{1/2}], \quad (3.8)$$

$$u^2 = t^{-1} [x^2 \pm ((x^2)^2 + 4tx^1)^{1/2}], \quad u^3 = u^3(x^1 - u^1 t, x^2 - u^2 t).$$

Решение (3.8) сингулярно при $t = 0$.

Б. Используя составные ДС (3.1), можно построить алгебраическое решение $(S_1 S_2)$ ранга 2 типа кинка:

$$\begin{aligned} a &= a_0, \\ u^1 &= (\lambda_1^1)^{-1} [C_1 - \lambda_2^1 A_2 r^1 (1 + B_2 (r^1)^2)^{-1/2} - \lambda_3^1 A_3 r^1 (1 + B_3 (r^1)^2)^{-1/2}] - \\ &\quad - (\lambda_1^2)^{-1} [-C_2 + (\lambda_3^2 C + \lambda_2^2) A_1 r^2 (1 + B_1 (r^2)^2)^{-1/2}], \\ u^2 &= A_1 r^2 (1 + B_1 (r^2)^2)^{-1/2} + A_2 r^1 (1 + B_2 (r^1)^2)^{-1/2}, \quad B_i > 0, \quad i = 2, 3, \\ u^3 &= A_3 r^1 (1 + B_3 (r^1)^2)^{-1/2} + C A_1 r^2 (1 + B_1 (r^2)^2)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где инварианты Римана даются формулами

$$\begin{aligned} r^1 &= \left(C_1 + C_2 \frac{\lambda_1^1}{\lambda_1^2} \right) t - \vec{\lambda}^1 \cdot \vec{x}, \\ r^2 &= \left[C_2 + C_1 \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^1} + \left(\lambda_2^2 - \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^1}{\lambda_1^1} \right) A_2 r^1 (1 + B_2 (r^1)^2)^{-1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\lambda_3^2 - \frac{\lambda_1^2 \lambda_3^1}{\lambda_1^1} \right) A_3 r^1 (1 + B_3 (r^1)^2)^{-1/2} \right] t - \vec{\lambda}^2 \cdot \vec{x}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отметим, что инвариант Римана r^2 функционально зависит от инварианта r^1 . Это означает, что взаимодействующие волны влияют и нелинейно накладываются друг на друга.

В. Нами было показано, что в случае $(S_1 S_2)$ уравнения (2.1) допускают ограниченные решения, выражающиеся через эллиптические функции Якоби. Например, существует решение типа двойной волны синуса амплитуды Якоби $(S_1 S_2)$, которое имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} u^1 &= A_1 [1 + B_1 \operatorname{sn}^2(\beta(x^1 + nx^2) - (n+1)[A_2 [1 + B_2 \operatorname{sn}^2(\beta(x^1 - x^2), k)]^{-1/2}], k)]^{-1/2}, \\ u^2 &= u^3 = A_2 [1 + B_2 \operatorname{sn}^2(\beta(x^1 - x^2), k)]^{-1/2} \operatorname{sn}(\beta(x^1 - x^2), k), \\ a &= a_0, \quad 0 < k^2 < 1, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad B_i > 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Инварианты Римана суть

$$r^i = x^i - u^i t, \quad i = 1, 2. \quad (3.12)$$

Представим теперь некоторые решения ранга 3 солитонного типа, которые могут быть получены при помощи той же процедуры.

1. СЛУЧАЙ $(E_1 E_2 E_3)$. В этом случае солитоноподобные решения имеют вид алгебраического триплета волн типа кинка. Здесь выделяются два отдельных случая:

$$a = \sum_{i=1}^3 A_i r^i (1 + B_i (r^i)^2)^{-1/2}, \quad \vec{u} = k \left[\sum_{i=1}^3 A_i r^i (1 + B_i (r^i)^2)^{-1/2} \vec{e}_i \right], \quad (3.13)$$

где инварианты Римана даются формулой

$$r^i = [(1+k)A_i r^i (1+B_i(r^i)^2)^{-1/2}]t - \vec{e}_i \cdot \vec{x}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (3.14)$$

и

$$a = \sum_{i=1}^3 A_i (1 + e^{B_i r^i})^{-1/2}, \quad \vec{u} = k \sum_{i=1}^3 A_i (1 + e^{B_i r^i})^{-1/2} \vec{e}_i, \quad A_i, B_i \in \mathbb{R}, \quad (3.15)$$

где инварианты Римана суть

$$r^i = [(1+k)A_i (1 + e^{B_i r^i})^{-1/2}]t - \vec{e}_i \cdot \vec{x}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.16)$$

Интересное свойство обоих решений состоит в том, что они остаются ограниченными даже тогда, когда инварианты Римана терпят градиентную катастрофу. В обоих случаях угол ϕ_{ij} между волновыми векторами $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_j$ задается выражением

$$\cos \phi_{ij} = \frac{1}{2}(1 - \gamma), \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

так что уединенные волны E_i взаимодействуют линейно [12].

2. СЛУЧАЙ $(E_1 S_1 S_2)$. **А.** Физический интерес в этом случае представляет решение

$$\begin{aligned} a &= k^{-1} A_1 [1 + B_1 (1 + \text{ch}(Cr^1))]^{-1/2} + a_0, \\ u^1 &= \sin \left[\frac{A_2(R)^{-1/2} \text{tg } y}{(B_2 + \text{tg}^2 y)^{1/2}} \right], \quad u^2 = -\cos \left[\frac{A_2(R)^{-1/2} \text{tg } y}{(B_2 + \text{tg}^2 y)^{1/2}} \right], \\ u^3 &= A_1 [1 + B_1 (1 + \text{ch}(Cr^1))]^{-1/2} + u_0^3, \quad A_i, B_i, C \in \mathbb{R}, \quad B_i > 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь были введены следующие обозначения: $R = (r^2)^2 + (r^3)^2$ и $y = (\ln |DR|)/2$, $D \in \mathbb{R}$. Инварианты Римана r^1 и r^2 равны

$$\begin{aligned} r^1 &= (1 + k^{-1}) A_1 [1 + B_1 (1 + \text{ch}(Cr^1))]^{-1/2} t - x^3, \\ r^2 &= t - x^1 \sin \left[\frac{A_2(R)^{-1/2} \text{tg } y}{(B_2 + \text{tg}^2 y)^{1/2}} \right] + x^2 \cos \left[\frac{A_2(R)^{-1/2} \text{tg } y}{(B_2 + \text{tg}^2 y)^{1/2}} \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

а r^3 удовлетворяет линейному ДУЧП

$$\frac{\partial r^3}{\partial t} + (A_1 [1 + B_1 (1 + \text{ch}(Cr^1))]^{-1/2} + u_0^3) \frac{\partial r^3}{\partial x^3} = 0. \quad (3.19)$$

Это решение является конечным везде, кроме $R = 0$, но имеет разрывы при $\ln |CR| = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Оно остается ограниченным, даже когда инварианты Римана r^1 , r^2 и r^3 обращаются в бесконечность. Физически решение представляет собой нестационарные концентрические волны с коэффициентом затухания $R^{-1/2}$.

Б. Другое алгебраическое решение типа уединенной волны принимает вид

$$\begin{aligned} a &= k^{-1}A[1 + B(1 + \operatorname{ch} Cr^1)]^{-1/2} + a_0, \quad B, C > 0, \\ u^1 &= \sin(E[1 + e^{h(r^2, r^3)}]^{-1/2}), \quad u^2 = \cos(E[1 + e^{h(r^2, r^3)}]^{-1/2}), \\ u^3 &= A[1 + B(1 + \operatorname{ch} Cr^1)]^{-1/2} + u_0^3, \quad A, E \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где h – произвольная функция инвариантов Римана (r^2, r^3) . Сами инварианты Римана суть

$$\begin{aligned} r^1 &= (1 + k^{-1})A[1 + B(1 + \operatorname{ch}(Cr^1))]^{-1/2}t - x^3, \\ r^2 &= t - x^1 \sin E[1 + e^{h(r^2, r^3)}]^{-1/2} + x^2 \cos E[1 + e^{h(r^2, r^3)}]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

а r^3 удовлетворяет ДУЧП (3.19).

В. Интересным примером ограниченного решения в случае $(E_1 S_1 S_2)$ является периодическое решение

$$\begin{aligned} a &= k^{-1}A(1 - B \cos Cr^1)^{-1/2} + a_0, \quad A, B, C \in \mathbb{R}, \\ u^1 &= \sin A(1 - B \cos Cr^1)^{-1/2}, \quad u^2 = -\cos A(1 - B \cos Cr^1)^{-1/2}, \quad |B| < 1, \\ u^3 &= g(r^2 \cos A(1 - B \cos Cr^1)^{-1/2} + r^3 \sin A(1 - B \cos Cr^1)^{-1/2}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

с инвариантами Римана

$$\begin{aligned} r^1 &= (k^{-1}A(1 - B \cos Cr^1)^{-1/2} + a_0)t - x^1 \cos A(1 - B \cos Cr^1)^{-1/2} - \\ &\quad - x^2 \sin A(1 - B \cos Cr^1)^{-1/2}, \\ r^2 &= -t \cos A(1 - B \cos Cr^1)^{-1/2} - x^2, \\ r^3 &= -t \sin A(1 - B \cos Cr^1)^{-1/2} + x^1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Это решение ограничено даже тогда, когда инварианты Римана терпят градиентную катастрофу.

4. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ РАНГА n

Рассмотрим теперь изэнтропический поток идеальной сжимаемой жидкости в случае, когда скорость звука зависит только от времени t . Система (2.1) принимает вид

$$u_t + (u \cdot \nabla)u = 0, \quad a_t + k^{-1}a \operatorname{div} u = 0, \quad a_x = 0, \quad a > 0, \quad k = 2(\gamma - 1)^{-1}. \quad (4.1)$$

Покажем, что в этом случае наша процедура позволяет построить решения произвольного ранга. Следующая замена координат в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x}^i = x^i - u^i t, \quad i = 1, \dots, n, \quad \bar{a} = a, \quad \bar{u} = u \in \mathbb{R}^n, \quad (4.2)$$

преобразует систему (4.1) в систему

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{t}} + k^{-1}\bar{a} \cdot \operatorname{tr}((\mathcal{I}_n + \bar{t}D\bar{u}(\bar{x}))^{-1}D\bar{u}(\bar{x})) = 0, \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (4.3)$$

где $D\bar{u}(\bar{x}) = \partial\bar{u}/\partial\bar{x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица Якоби и $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \in \mathbb{R}^n$. Общее решение уравнений $\partial\bar{u}/\partial\bar{t} = 0$ и $\partial\bar{a}/\partial\bar{x} = 0$ есть

$$\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) = f(\bar{x}), \quad \bar{a}(\bar{t}, \bar{x}) = \bar{a}(\bar{t}) > 0 \quad (4.4)$$

с произвольными функциями $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, соответственно. Тогда, используя тождество для следа

$$\frac{\partial}{\partial\bar{t}}(\ln \det B) = \text{tr} \left(B^{-1} \frac{\partial B}{\partial\bar{t}} \right), \quad (4.5)$$

где $B = \mathcal{I}_n + \bar{t}Df(\bar{x})$ и $Df(\bar{x}) = \partial(\mathcal{I}_n + \bar{t}Df(\bar{x}))/\partial\bar{t}$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\bar{t}}(|\bar{a}(\bar{t})|^k \det(\mathcal{I}_n + \bar{t}Df(\bar{x}))) = 0. \quad (4.6)$$

Дифференцирование (4.6) по $\bar{x}$ дает условие на скорость потока $f(\bar{x})$:

$$\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}\partial\bar{t}}(\det(\mathcal{I}_n + \bar{t}Df(\bar{x}))) = 0. \quad (4.7)$$

Это условие выполнено тогда и только тогда, когда

$$\det(\mathcal{I}_n + \bar{t}Df(\bar{x})) = \alpha(\bar{x})\beta(\bar{t}), \quad (4.8)$$

где α и β – произвольные функции своих аргументов. Равенство (4.8), взятое при $\bar{t} = 0$, означает, что $\alpha(\bar{x}) = \beta(0)^{-1}$. Поэтому

$$\det(\mathcal{I}_n + \bar{t}Df(\bar{x})) = \frac{\beta(\bar{t})}{\beta(0)},$$

и мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}} \det(\mathcal{I}_n + \bar{t}Df(\bar{x})) = 0. \quad (4.9)$$

Это уравнение справедливо тогда и только тогда, когда коэффициенты характеристического полинома матрицы $Df(\bar{x})$ постоянны. Таким образом, общее решение системы (4.1) имеет вид

$$\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) = f(\bar{x}), \quad \bar{a}(\bar{t}) = \gamma(1 + p_{n-1}\bar{t} + \dots + p_0\bar{t}^n)^{-1/k}, \quad \gamma \neq 0, \quad (4.10)$$

где p_k являются постоянными коэффициентами характеристического полинома. Это влечет за собой некоторые ограничения на функцию f и данные Коши, а именно

$$t = 0: \quad u(0, x) = f(x), \quad a(0) = \gamma > 0, \quad (4.11)$$

и $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – произвольная функция. Таким образом, единственное решение $u(t, x)$ и $a(t, x)$ системы (4.1) с начальными данными (4.11) есть

$$u = f(x^1 - u^1 t, \dots, x^n - u^n t), \quad a(t) = \gamma(1 + p_{n-1}t + \dots + p_0 t^n)^{-1/k}. \quad (4.12)$$

Отметим, что a есть постоянная скорость звука тогда и только тогда, когда матрица Якоби нильпотентна и имеет постоянный характеристический полином. В частности, при $n = 2$ общее решение системы (4.1) зависит от одной функции двух переменных и определяется неявно уравнениями

$$\begin{aligned} u^1(t, x, y) &= C(x - u^1 t) + \frac{\partial h}{\partial r^1}(x - u^1 t, y - u^2 t), \\ u^2(t, x, y) &= C(y - u^2 t) - \frac{\partial h}{\partial r^2}(x - u^1 t, y - u^2 t), \\ a(t) &= \gamma((1 + Ct)^2 + bt^2)^{-1/k}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где функция h переменных $r^1 = x - u^1 t$ и $r^2 = y - u^2 t$ должна удовлетворять уравнению Монжа–Ампера

$$h_{r^1 r^1} h_{r^2 r^2} - h_{r^1 r^2}^2 = b, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей работе получен новый вариант МУС, задача которого – облегчить построение и исследование инвариантных решений ранга k , включая k -волны Римана. Алгоритм построения таких решений для уравнений гидродинамического типа основан на модуле Ли векторных полей X_a . Основной особенностью алгоритма является требование, чтобы набор групповых инвариантов этих векторных полей совпадал с инвариантами Римана. В результате векторные поля X_a образуют абелеву алгебру, что очевидно облегчает интегрирование исходной системы. Важно отметить, что нам нет необходимости обращаться к какому-либо дополнительному анализу, а можно исходить прямо из системы ДУЧП.

Интересно, что хотя наш подход был разработан для уравнений гидродинамического типа общего вида, он оказался в высшей степени подходящим для поиска солитоноподобных решений многомерных гидродинамических систем. Это важно, поскольку свойства интегрируемости солитонных теорий непросто обобщить на случаи более чем двух измерений. Мы можем работать в размерностях $(n + 1)$ именно потому, что опускаем связанный с интегрируемостью анализ.

Отметим, наконец, что в случае уравнений для изэнтропических потоков нам удалось построить решения произвольного ранга, которые, насколько нам известно, являются новыми. Это заметный результат, поскольку существует очень немного систематических методов построения решений высокого ранга, и для физических систем к настоящему моменту известно лишь несколько примеров решений типа составных римановых волн. Таким образом, кажется весьма привлекательным применить возможности нашего подхода к другим типам гидродинамических систем.

Благодарности. Эта работа была частично поддержана исследовательскими грантами NSERC (Канада) и FQRNT (Квебек, Канада).

Список литературы

- [1] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Math. Soc. Lect. Note Ser., **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [2] P. A. Clarkson, P. Winternitz, “Symmetry reduction and exact solutions of nonlinear partial differential equations”, *The Painlevé Property. One Century Later*, CRM Ser. Math. Phys., **26**, ed. R. Conte, Springer, New York, 1999, 597–669.
- [3] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, *Comm. Math. Phys.*, **248** (2004), 187–206.
- [4] P. J. Olver, E. M. Vorobev, “Nonclassical and conditional symmetries”, CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 3. New Trends in Theoretical Development and Computational Methods, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [5] A. M. Grundland, J. Tafel, *J. Math. Anal. Appl.*, **198** (1996), 879–892.
- [6] A. M. Grundland, B. Huard, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **13**:3 (2006), 393–419.
- [7] R. von Mises, *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Appl. Math. Mech., **3**, Academic Press, New York, 1958.
- [8] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М., 1978.
- [9] Ф. П. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [10] A. M. Grundland, L. Lalague, *Canad. J. Phys.*, **72**:7–8 (1994), 362–374.
- [11] A. M. Grundland, L. Lalague, *J. Phys. A*, **29** (1996), 1723–1739.
- [12] Z. Peradzynski, *Arch. Mech.*, **9**:2 (1972), 287–303.
- [13] A. Jeffrey, *Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves*, Res. Notes Math., **5**, Pitman Publ., London–San Francisco–Melbourne, 1976.
- [14] P. Winternitz, A. M. Grundland, J. A. Tuszynski, *J. Math. Phys.*, **28**:9 (1987), 2194–2212.