Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Киселев, Алгебраические свойства деформаций по Гарднеру интегрируемых систем, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 1, 101–117

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6073>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 07:18:57

© 2007 г.

А. В. Киселев*

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДЕФОРМАЦИЙ ПО ГАРДНЕРУ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Сформулировано алгебраическое определение деформаций по Гарднеру вполне интегрируемых бигамильтоновых эволюционных систем. Предложенный подход расширяет класс деформируемых уравнений и дает примеры новых интегрируемых систем – эволюционные уравнения и гиперболические системы Лиувиллева типа. Найдено точно решаемое двухкомпонентное обобщение уравнения Лиувилля.

Ключевые слова: деформации по Гарднеру, интегрируемые семейства, сопряженные системы, гамильтонианы, рекуррентные соотношения.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается задача построения деформаций по Гарднеру вполне интегрируемых бигамильтоновых эволюционных (супер)систем, см. [1]–[4] или обзор [5] и ссылки в них. Суть данной процедуры заключается в том, что производящие вектор-функции для гамильтонианов интегрируемых систем удовлетворяют вспомогательным дифференциальным уравнениям, заданным определенными условиями. Деформации описывают рекуррентные соотношения между плотностями гамильтонианов и задают параметрические продолжения известных систем.

В данной статье предложено алгебраическое определение деформаций по Гарднеру с помощью диаграмм (8); оно расширяет класс деформируемых систем. В рамках инфинитезимального подхода показано, что деформации по Гарднеру суть неоднородные обобщения высших симметрий уравнений с частными производными. Используя недавно развитые геометрические идеи [6], мы интерпретируем соответствующие деформационные кохомологии как частный случай кохомологий Картана [7]. Вводимый таким образом инвариант интегрируемых систем связан с задачей классификации допустимых преобразований Миуры между ними.

Предложенный в [8] метод построения подстановок, основанный на использовании объемлющих систем Эйлера–Лагранжа Лиувиллева типа, определяет несколько

*Max-Planck Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, D-53111 Bonn, Germany; Institut des Hautes Études Scientifiques, Le Bois-Marie 35, Route de Chartres, F-91440 Bures-sur-Yvette, France. E-mail: arthemy@mpim-bonn.mpg.de

механизмов, которые задают новые интегрируемые системы посредством деформаций. Во-первых, соответствие между интегралами уравнений лиувиллева типа и необратимыми дифференциальными подстановками приводит к новым гиперболическим системам, например, система (16) есть обобщение уравнения Лиувилля. Во-вторых, трактовка лиувиллевых систем как диаграмм (20) сопоставляет новые интегрируемые потоки на данных Коши для их общих решений иерархиям симметрий этих точно решаемых гиперболических уравнений. Кроме того, показано, что задача построения деформаций по Гарднеру, понимаемая в классическом смысле, упрощается, если расширить упомянутые выше системы лиувиллева типа до параметрических семейств. Наконец, вводится понятие сопряженных вполне интегрируемых систем таких, что продолжения являются интерполяциями между исходными и сопряженными уравнениями. Изложение иллюстрируется новыми деформациями систем (Каупа–)Буссинеска и общеизвестными расширениями скалярных уравнений типа КдФ.

Деформации по Гарднеру не являются единственным способом получать расширения, модификации или обобщения систем типа КдФ, см., например, работы [9], [10] и ссылки в них. С другой стороны, предложенное в этой работе определение деформаций позволяет увеличить класс деформируемых уравнений (в частности, включить в него системы, не представимые в виде законов сохранения). Отметим также, что алгебраические аспекты деформаций интегрируемых систем изучались в [11] в схожем, но ином контексте.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ СХЕМА ДЕФОРМАЦИЙ ПО ГАРДНЕРУ

Введем некоторые обозначения и напомним необходимые конструкции. По определению, положим $f[u] = f(u, u_x, \dots)$, где под u понимаются набор компонент вектора $(u^1, \dots, u^m)^T$; обозначим вариационную производную по u через $\mathbf{E}$. Рассмотрим пространство функционалов вида $\mathcal{H} = \int H[u] dx$, причем будем считать, что элементы пространства эквивалентны, если они различаются на точные члены вида $H[u] = D_x(G[u])$. Оператор A в полных производных называется гамильтоновым, если скобка $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\} = \langle \mathbf{E}(\mathcal{H}_1), A(\mathbf{E}(\mathcal{H}_2)) \rangle$ наделяет пространство функционалов структурой алгебры Ли. Пусть гамильтоновы операторы A_1, A_2 совместны, т.е. любая их линейная комбинация также гамильтонова. Предположим далее, что существуют m бесконечных последовательностей функционалов $\{\mathcal{H}_j^i; i = 1, \dots, m; j \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющих соотношению

$$A_2(\mathbf{E}(\mathcal{H}_j^i)) = A_1(\mathbf{E}(\mathcal{H}_{j+1}^i)) \quad (1)$$

при всех i, j . Выберем некоторые i и j и рассмотрим эволюционную систему $\mathcal{E} = \{u_t = A_1(\mathbf{E}(\mathcal{H}_{j+1}^i)) = A_2(\mathbf{E}(\mathcal{H}_j^i))\}$. Система $\mathcal{E}$ называется вполне интегрируемой; она допускает m бесконечных последовательностей коммутирующих симметрий $u_{t_k}^l = A_1(\mathbf{E}(\mathcal{H}_k^l))$, заданных гамильтонианами. Все плотности H_k^l сохраняются на $\mathcal{E}$: $D_t(H_k^l) \doteq D_x(\dots)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Чтобы сделать изложение более ясным, мы не используем чисто алгебраическое определение вполне интегрируемой бигамильтоновой системы, заданной парой совместных гамильтоновых операторов таких, что пуассоновы когомологии [12], [13] относительно одного из них тривиальны, и потому соотношение (1) всегда можно разрешить относительно $\mathcal{H}_{j+1}^i$. Таким образом, мы вынуждены постулировать существование гамильтонианов.

Рассмотрим вполне интегрируемую систему $\mathcal{E} = \{F \equiv u_t - f[u] = 0\}$. Пусть $\mathcal{E}_\varepsilon = \{F_\varepsilon \equiv \tilde{u}_t - f_\varepsilon([\tilde{u}], \varepsilon)\}$ – деформация $\mathcal{E}$, причем в каждой точке $\varepsilon \in \mathcal{I}$ интервала $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ существует редукция $\mathfrak{m}_\varepsilon = \{u = u([\tilde{u}], \varepsilon)\}: \mathcal{E}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{E}$. Предположим также, что $f_\varepsilon \in \text{im } D_x$ при всех ε . Тогда пара $(\mathcal{E}_\varepsilon, \mathfrak{m}_\varepsilon)$ называется *деформацией по Гарднеру* уравнения $\mathcal{E}$ в классическом понимании [1], [2], [5]. Используя разложения по ε производящей вектор-функции $\tilde{u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{u}_n \varepsilon^n$ и редукции $\mathfrak{m}_\varepsilon$, мы получаем рекуррентные соотношения между почленно сохраняющимися на $\mathcal{E}$ плотностями $\tilde{u}_n[u]$; эти бесконечные последовательности содержат гамильтонианы высших потоков уравнения $\mathcal{E}$.

ПРИМЕР 1 (см. [1], [5]). Уравнение КдФ с параметром,

$$\tilde{u}_t = -\frac{1}{2}\tilde{u}_{xxx} + 3\tilde{u}\tilde{u}_x + 3\varepsilon^2\tilde{u}^2\tilde{u}_x, \quad (2a)$$

приводится к уравнению КдФ $u_t = -\frac{1}{2}u_{xxx} + 3uu_x$ преобразованием Миуры

$$\mathfrak{m}_\varepsilon = \{u = \tilde{u} \pm \varepsilon\tilde{u}_x + \varepsilon^2\tilde{u}^2\}. \quad (2b)$$

Отметим, что уравнение КдФ инвариантно относительно преобразования Галилея $x \mapsto x + 3\lambda t$, $t \mapsto t$, $u \mapsto u + \lambda$. Рассмотрим теперь модифицированное уравнение КдФ

$$v_t = -\frac{1}{2}v_{xxx} + 3v^2v_x \quad (3)$$

и подстановку Миуры $u = v^2 \pm v_x$. Положим $v = \varepsilon\tilde{u} + (2\varepsilon)^{-1}$; это определяет редукцию $u = (\tilde{u} \pm \varepsilon\tilde{u}_x + \varepsilon^2\tilde{u}^2) + 1/(4\varepsilon^2) = \mathfrak{m}_\varepsilon + \lambda$ уравнения (2a) к уравнению КдФ (следует положить $\lambda = 1/(4\varepsilon^2)$ и исключить сдвиг переменной u за счет движения вдоль x). Итак, мы видим, что галилеева инвариантность КдФ порождает семейство (2a) из модифицированного уравнения КдФ (3).

В свою очередь, уравнение (3) можно расширить так:

$$\tilde{v}_t = -\frac{1}{2}\tilde{v}_{xxx} + 3\tilde{v}^2\tilde{v}_x + D_x \left(\frac{3\varepsilon^2\tilde{v}\tilde{v}_x^2}{1 + 4\varepsilon^2\tilde{v}^2} \right), \quad (4)$$

и редукция $\mathfrak{m}_\varepsilon$ есть $\{v = \tilde{v} + \varepsilon\tilde{v}_x/\sqrt{1 + 4\varepsilon^2\tilde{v}^2}\}$. Расширенное уравнение КдФ (2a) и расширенное модифицированное уравнение (4) связаны подстановкой

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2\tilde{v}^2} - 1}{2\varepsilon^2} + \frac{\tilde{v}_x}{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2\tilde{v}^2}}.$$

ПРИМЕР 2. Расширением $\mathcal{E}_\varepsilon$ уравнений Каупа–Буссинеска

$$\mathcal{E} = \{u_t = uu_x + v_x, \quad v_t = (uv)_x + u_{xxx}\} \quad (5)$$

является система

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t &= \tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{v}_x + \varepsilon(\tilde{u}\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_x^2 + (\tilde{u}\tilde{v})_x), \\ \tilde{v}_t &= (\tilde{u}\tilde{v})_x + \tilde{u}_{xxx} - \varepsilon(2\tilde{u}_x\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}\tilde{u}_{xxx} + \tilde{u}_x\tilde{v}_x + \tilde{u}\tilde{v}_{xx} - \tilde{v}\tilde{v}_x). \end{aligned} \quad (6a)$$

Редукция $\mathcal{E}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{E}$ задана формулами

$$u = \tilde{u} + \varepsilon(\tilde{u}_x + \tilde{v}), \quad v = \tilde{v} + \varepsilon(\tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{u}_{xx} + \tilde{u}\tilde{v} + \tilde{v}_x). \quad (6b)$$

Рекуррентные соотношения между плотностями гамильтонианов уравнения (5) оказываются такими:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0 &= u, \quad \tilde{v}_0 = v, \quad \tilde{u}_k = -D_x(\tilde{u}_{k-1}) - \tilde{v}_{k-1}, \\ \tilde{v}_k &= -D_x^2(\tilde{u}_{k-1}) - D_x(\tilde{v}_{k-1}) - \sum_{\ell+m=k-1} [\tilde{u}_\ell D_x(\tilde{u}_m) + \tilde{u}_\ell \tilde{v}_m], \quad k > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя деформацию по Гарднеру (6) уравнения Каупа–Буссинеска, мы построим новую точно интегрируемую систему лиувиллева типа, а также бигамильтонову сопряженную систему (см. ниже формулы (16) и (23), соответственно).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПО ГАРДНЕРУ С ПОМОЩЬЮ ДИАГРАММ

Суммируя свойства деформаций по Гарднеру (не)модифицированных интегрируемых систем [2], [5], мы приходим к выводу, что классы задающих деформации дифференциальных функций нужно расширять, если существует преобразование типа Миуры τ , действующее из рассматриваемой системы (скажем, вместо полиномов возникают иррациональные выражения, см. пример 1). Очевидно, деформации в классическом понимании $(\mathcal{E}_\varepsilon, \mathfrak{m}_\varepsilon)$ не существуют для уравнений, не приводимых к дивергентному виду. Предположим однако, что две вполне интегрируемые системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$, равно как и их высшие симметрии, связаны преобразованием типа Миуры $\tau: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$; в этом случае $\tau^*: \mathcal{H}[u] \mapsto \mathcal{H}[u[v]]$ задает соответствие между их гамильтонианами при помощи подстановки $u = \tau[v]$. Таким образом, задача восстановления рекуррентных соотношений между гамильтонианами иерархии уравнения $\mathcal{E}'$ естественным образом сводится к построению деформации по Гарднеру уравнения $\mathcal{E}$ при условии, что $\mathcal{E}'$ допускает лишь конечное число своих гамильтонианов, не лежащих в образе τ^* . В частности, применительно к расширениям $\mathcal{E}_\varepsilon$ задача построения деформаций по Гарднеру тавтологична (тем не менее, два таких примера содержатся в [5]). Сформулированное ниже определение деформации по Гарднеру учитывает сделанные замечания.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Деформацией по Гарднеру вполне интегрируемой эволюционной системы $\mathcal{E}'$ называется диаграмма

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{\tau} \mathcal{E} \xleftarrow{\mathfrak{m}_\varepsilon} \mathcal{E}_\varepsilon, \quad (8)$$

в которой τ есть преобразование типа Миуры, а редукция $\mathbf{m}_\varepsilon = \{u = u([\tilde{u}], \varepsilon)\}$ отображает расширение $\mathcal{E}_\varepsilon = \{F_\varepsilon \equiv \tilde{u}_t - f_\varepsilon([\tilde{u}], \varepsilon), f_\varepsilon \in \text{im } D_x\}$ в $\mathcal{E}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Стандартный подход [1], [3], [5], [14] соответствует тождественному преобразованию $\tau = \text{id}$. Кроме того, преобразование τ может быть обратимым, это означает, что система координат, описывающая $\mathcal{E}' \simeq \mathcal{E}$, “неудобна”. Обратимые замены координат могут разрушить форму $u = \tilde{u} + \varepsilon[\dots]$ редукции $\mathbf{m}_\varepsilon: \mathcal{E}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{E}$, и кривая $\mathcal{E}_\varepsilon$ уже не будет содержать $\mathcal{E}$ при $\varepsilon = 0$. Было бы интересно формализовать такое препятствие, заданное на множестве всех систем координат на уравнении $\mathcal{E}'$, что его равенство нулю обеспечивает форму $u = \tilde{u} + \varepsilon[\dots]$ редукции $\mathbf{m}_\varepsilon$.

ПРИМЕР 3. Уравнение Каупа–Буссинеска (5) переводится подстановкой $w = v - u_x$ в систему Каупа–Бруера

$$u_t = u_{xx} + uu_x + w_x, \quad w_t = (uw)_x - w_{xx}. \quad (9)$$

Следовательно, используя (6), мы получаем деформацию по Гарднеру для (9); редукция из (6a) в (9) имеет вид

$$u = \tilde{u} + \varepsilon(\tilde{u}_x + \tilde{v}), \quad w = [\tilde{v} - \tilde{u}_x] + \varepsilon\tilde{u}(\tilde{u}_x + \tilde{v}).$$

Еще один пример деформации, при которой уравнение $\mathcal{E}_\varepsilon$ приводится обратимой подстановкой к виду, выражающему закон сохранения, содержится в работе [15] и связан с $N = 1$ суперсимметричным уравнением КдФ.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из диаграммы (8) следует, что деформации по Гарднеру являются в некотором смысле двойственными к преобразованиям Беклунда $\mathcal{E}' \xleftarrow{\tau} \mathcal{E} \xrightarrow{\tau'} \mathcal{E}''$, связывающими дифференциальные уравнения $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$, см. [7]. Понятно, что дискретные симметрии σ расширений $\mathcal{E}_\varepsilon$ задают автопреобразования Беклунда $\mathcal{E} \xleftarrow{\mathbf{m}_\varepsilon} \mathcal{E}_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{m}_\varepsilon \circ \sigma} \mathcal{E}$ для уравнения $\mathcal{E}$. Например, перемена знака в редукции (26) и последующее исключение переменной $\tilde{u}$ приводят к известному однопараметрическому автопреобразованию Беклунда для уравнения КдФ [5].

Оказывается, деформации по Гарднеру можно трактовать как неоднородные обобщения высших симметрий. Это легко установить, если перейти к инфинитезимальному описанию.

ЛЕММА. Пусть при некотором $\varepsilon_0 \in \mathcal{I}$ существует отображение $\mathbf{m}_{\varepsilon_0}: \mathcal{E}_{\varepsilon_0} \rightarrow \mathcal{E} = \{F = 0\}$; введем обозначение $\varphi(\varepsilon) = \partial \mathbf{m}_\varepsilon / \partial \varepsilon$. Тогда редукция $\mathbf{m}_\varepsilon$ удовлетворяет следующему соотношению, выполненному в силу ($\doteq$) уравнения $\mathcal{E}_{\varepsilon_0} = \{F_{\varepsilon_0} = 0\}$:

$$\text{Ev}_{\varphi(\varepsilon_0)}(F) \doteq \text{Ev}_{\partial F_\varepsilon / \partial \varepsilon}(\mathbf{m}_\varepsilon)|_{\varepsilon=\varepsilon_0}. \quad (10)$$

Это уравнение справедливо и для деформаций неэволюционных систем.

Инфинитезимальный подход приводит к деформационным когомологиям Гарднера, которые определяются в соответствии со стандартной схемой [6], [7], [16]. Предварительно следует вспомнить понятие когомологий Картана (подробности см.

в [7]). Пусть $\mathcal{E}$ – дифференциальное уравнение и $U(\mathcal{E})$ – форма связности Картана на нем; в координатной записи имеем $U(\mathcal{E}) = \sum_{\sigma} d\mathcal{C}(u_{\sigma}) \otimes \partial/\partial u_{\sigma}$, где u_{σ} пробегает все производные u , являющиеся координатами на $\mathcal{E}$, а $d\mathcal{C}: u_{\sigma} \mapsto du_{\sigma} - u_{\sigma+1_i} dx^i$ есть картановский дифференциал. Положим $\mu = \deg \Omega$, если $\Omega \in D(\Lambda^{\mu}(\mathcal{E}))$ – дифференцирование со значениями в формах. Далее, пусть $i_{\Omega}: \Lambda^k(\mathcal{E}) \rightarrow \Lambda^{k+\deg \Omega-1}(\mathcal{E})$ – внутреннее произведение (подстановка), $L_{\Omega}: \Lambda^k(\mathcal{E}) \rightarrow \Lambda^{k+\deg \Omega}(\mathcal{E})$ – производная Ли и $[\![\cdot, \cdot]\!]^{\text{FN}}$ – скобка Фрелихера–Нийенхейса, определяемая равенством $[\![\Omega, \Theta]\!]^{\text{FN}}(f) = L_{\Omega}(\Theta(f)) - (-1)^{\mu\nu} L_{\Theta}(\Omega(f))$, в котором формы $\Omega \in D(\Lambda^{\mu}(\mathcal{E}))$, $\Theta \in D(\Lambda^{\nu}(\mathcal{E}))$ и функция $f \in C^{\infty}(\mathcal{E})$ произвольны. Замысловатая координатная формула для $[\![\cdot, \cdot]\!]^{\text{FN}}$ содержится в [16], [17]. Связность Картана $U(\mathcal{E})$ удовлетворяет условию плоскостности $[\![U(\mathcal{E}), U(\mathcal{E})]\!]^{\text{FN}} = 0$, откуда следует, что $\partial_{\mathcal{C}} = [\![\cdot, U(\mathcal{E})]\!]^{\text{FN}}$ – дифференциал. Когомологии Картана относительно $\partial_{\mathcal{C}}$ содержат симметрии $\mathcal{E}$ в нулевом члене, рекурсии для $\mathcal{E}$ – в первом и т.д. [6], [7].

Указанную алгебраическую конструкцию можно переформулировать [6], в частности, применительно к семействам уравнений $\mathcal{E}_{\varepsilon}$, допускающим редукции $\mathbf{m}_{\varepsilon}: \mathcal{E}_{\varepsilon} \rightarrow \mathcal{E}$; в этом случае когомологии Картана описывают симметрии (более строго, тени симметрий [7]), нелокальные по отношению к исходному уравнению $\mathcal{E}$ и зависящие от преобразований $\mathbf{m}_{\varepsilon}$.

Рассмотрим теперь все допустимые деформации $U_{\varepsilon}(\mathcal{E}_{\varepsilon})$ формы связности. Предположим, что при всех ε распределение Картана в каждой точке уравнения $\mathcal{E}_{\varepsilon}$ остается изоморфным распределению в соответствующей точке $\mathcal{E}$, заданной некоторой проекцией, которая не обязательно есть явная глобально определенная подстановка $\mathbf{m}_{\varepsilon}$. Точные деформации порождены теми симметриями (строго говоря, их теньями) X_{ε_0} уравнения $\mathcal{E}$, которые нельзя поднять на соответствующее $\mathcal{E}_{\varepsilon_0}$ и которые, следовательно, не оставляют накрывающее уравнение инвариантным, но превращают его в семейство с параметром ε . В этом случае эволюция связности Картана U_{ε} на $\mathcal{E}_{\varepsilon}$ описывается уравнением [6], [7]

$$\frac{dU_{\varepsilon}}{d\varepsilon} = [\![X_{\varepsilon}, U_{\varepsilon}]\!]^{\text{FN}}, \quad (11)$$

иллюстрация к которому приведена в [17]. Тем не менее *все* деформации формы U_{ε} замкнуты относительно $\partial_{\mathcal{C}}$, т.е. всегда выполнено равенство $[\![\frac{dU_{\varepsilon}}{d\varepsilon}, U_{\varepsilon}]\!]^{\text{FN}} = 0$. Поэтому данная группа когомологий Картана бесконечна, и оперировать с ними трудно, если не принимать во внимание требование существования редукций $\mathbf{m}_{\varepsilon}: \mathcal{E}_{\varepsilon} \rightarrow \mathcal{E}$ при всех ε .

Понятие деформационных когомологий Гарднера для вполне интегрируемой системы $\mathcal{E}$ состоит в следующем. Рассмотрим все семейства $\{\mathcal{E}_{\varepsilon_{\alpha}}\}$ систем, допускающие преобразования типа Миуры $\mathbf{m}_{\varepsilon_{\alpha}}: \mathcal{E}_{\varepsilon_{\alpha}} \rightarrow \mathcal{E}$. При всяком α соответствующее семейство $\mathbf{m}_{\varepsilon_{\alpha}}$ задает деформационные когомологии Картана в соответствии со стандартной схемой [6], [7], причем в каждом случае возникающие конструкции зависят от правила преобразования $\mathbf{m}_{\varepsilon_{\alpha}}$. Вместе с тем формы связности $U_{\varepsilon_{\alpha}}$ и дифференциалы $\partial_{\mathcal{C}}^{(\alpha)}$ определены единообразно и могут быть продолжены на сумму $\bigoplus_{\alpha} \mathbf{m}_{\varepsilon_{\alpha}}$ накрытий $\mathcal{E}_{\varepsilon_{\alpha}} \rightarrow \mathcal{E}$. Таким образом, используя связность Картана $\tilde{U}$ на сумме,

мы получаем дифференциал $\partial_{\mathcal{C}} = [\![\cdot, \tilde{U}]\!]^{\text{FN}}$ и, следовательно, деформационные когомологии относительно $\partial_{\mathcal{C}}$ в соответствии с результатами работы [6]; это и есть когомологии Гарднера вполне интегрируемой системы $\mathcal{E}$.

Их существенное отличие от когомологий Картана состоит в том, что деформации по Гарднеру, даже понимаемые в классическом смысле как $(\mathcal{E}_{\varepsilon}, \mathfrak{m}_{\varepsilon})$, налагают жесткое ограничение на допустимые расширения U_{ε} в силу леммы, приведенной выше: должно сохраняться условие существования редукций $\mathfrak{m}_{\varepsilon}$. Классы точных деформаций¹⁾ оказываются во взаимно однозначном соответствии с симметриями $\mathcal{E}$, которые не поднимаются на $\mathcal{E}_{\varepsilon}$, но зато продолжают его до семейства с учетом соотношения (10). Относительно коциклов мы предполагаем, что когомологии Гарднера для систем типа КдФ, происходящих из алгебр Ли [9], конечномерны, иными словами, такие системы допускают конечное число рекуррентных соотношений между гамильтонианами. С практической точки зрения это предположение означает, что когомологии Гарднера являются инвариантом, который может оказаться полезным в задачах классификации.

В примере 1 описана точная деформация (2) уравнения КдФ, основанная на его галилеевой симметрии. Именно эта симметрия задает деформации многих систем типа КдФ [5], однако не всех [14]. В самом деле, данная симметрия нарушена в случае модифицированного уравнения КдФ, расширение которого есть (4). Отметим также, что при отображении $\tau: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$ алгебра $\text{sum } \mathcal{E}'$ вкладывается в $\text{sum } \mathcal{E}$, следовательно, если включение $\tau_*: \text{sum } \mathcal{E}' \subseteq \text{sum } \mathcal{E}$ строгое, а симметрия уравнения $\mathcal{E}$, порождающая семейство $\mathcal{E}_{\varepsilon}$, принадлежит сокету τ_* , то соответствующую деформацию по Гарднеру для $\mathcal{E}$ нельзя перенести на $\mathcal{E}'$ в рамках классической схемы. В более общем смысле, наличие когомологий Гарднера опровергает распространенное представление, гласящее, что для построения семейства $\mathcal{E}_{\varepsilon}$ всегда используется симметрия $\mathcal{E}$. Контрпримерами, т.е. коциклами, не являющимися кограницами, служат, в частности, модифицированное уравнение КдФ (см. пример 1), $N = 1$ суперуравнение КдФ [14], равно как и приведенное в примере 2 уравнение Каупа–Буссинеска, а также система Буссинеска.

ПРИМЕР 4. Существуют две деформации по Гарднеру уравнений Буссинеска $u_t = v_x$, $v_t = u_{xxx} + uv_x$. Расширенные уравнения Буссинеска $\mathcal{E}_{\varepsilon}^{\pm}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t &= \tilde{v}_x + \varepsilon^3(\tilde{u}_x\tilde{u}_{xx} \pm \tilde{u}_{xx}\tilde{v} \pm \tilde{u}_x\tilde{v}_x + \tilde{v}\tilde{v}_x), \\ \tilde{v}_t &= \tilde{u}_{xxx} + \tilde{u}\tilde{u}_x - \varepsilon^3(\tilde{u}_{xx}\tilde{v} + 2\tilde{u}_{xx}\tilde{v}_x + \tilde{u}_x\tilde{v}_{xx} \pm \tilde{u}_{xx}^2 \pm \tilde{u}_x\tilde{u}_{xxx} \pm \tilde{v}_x^2 \pm \tilde{v}\tilde{v}_{xx}).\end{aligned}\quad (12a)$$

Соответствующие им редукции $\mathfrak{m}_{\varepsilon}^{\pm}: \mathcal{E}_{\varepsilon}^{\pm} \rightarrow \mathcal{E}$ таковы:

$$\begin{aligned}u &= \tilde{u} \mp 2\varepsilon\tilde{u}_x + 2\varepsilon^2(\tilde{u}_{xx} \pm \tilde{v}_x) + \varepsilon^3(\tilde{u}\tilde{v} \pm \tilde{u}\tilde{u}_x), \\ v &= \tilde{v} \mp 2\varepsilon\tilde{v}_x + 2\varepsilon^2(\tilde{v}_{xx} \pm \tilde{u}_{xx} \pm \tilde{u}\tilde{u}_x) + \varepsilon^3\left(\frac{1}{3}\tilde{u}^3 + \tilde{v}^2 + \tilde{u}\tilde{u}_{xx} \pm \tilde{v}\tilde{v}_x \pm \tilde{u}_x\tilde{v}\right) \mp\end{aligned}\quad (12b)$$

¹⁾ Следует различать точные деформации, описываемые уравнением (11), и тривиальные деформации, порождающие лишь конечное число нетривиальных сохраняющихся плотностей при помощи рекуррентных соотношений. Тривиальная деформация уравнения “минус”-Каупа–Буссинеска найдена в [4]. Соответственно (2) служит примером нетривиальной точной деформации, а деформация (6) – примером нетривиальной и неточной деформации.

$$\mp 2\varepsilon^4(\tilde{u}_x\tilde{u}_{xx} \pm \tilde{u}_x\tilde{v}_x \pm \tilde{u}_{xx}\tilde{v} + \tilde{v}\tilde{v}_x) + \varepsilon^6\left(\frac{1}{3}\tilde{v}^3 \pm \frac{1}{3}\tilde{u}_x^3 + \tilde{u}_x^2\tilde{v} \pm \tilde{u}_x\tilde{v}^2\right).$$

Набор классических симметрий уравнений Буссинеска исчерпывается трансляциями и растяжением. Ни одна из них не порождает семейство (12a) путем продолжения системы $\mathcal{E}_{\varepsilon_0}$ при каком-либо ε_0 , поэтому деформация (12) не является точной.

Разлагая поля $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ и редукции $\mathbf{m}_\varepsilon^\pm$ в ряд по ε , мы получаем рекуррентные соотношения между двумя последовательностями гамильтонианов уравнений Буссинеска (таким образом, мы получаем обобщение результата работы [5], в которой установлено лишь одно соотношение для одной последовательности). Они имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0 &= u, & \tilde{v}_0 &= v, & \tilde{u}_1 &= \pm 2u_x, \\ \tilde{v}_1 &= \pm 2v_x, & \tilde{u}_2 &= 2u_{xx} \mp 2v_x, & \tilde{v}_2 &= 2v_{xx} \mp 2u_{xx} \mp 2uu_x, \\ \tilde{u}_n &= \pm 2D_x(\tilde{u}_{n-1}) - 2D_x^2(\tilde{u}_{n-2}) \mp 2D_x(\tilde{v}_{n-2}) + \\ &+ \sum_{k+\ell=n-3} [-\tilde{u}_k\tilde{v}_\ell \mp \tilde{u}_k D_x(\tilde{u}_\ell)], & n &\geq 3, \\ \tilde{v}_3 &= \pm 2D_x(\tilde{v}_2) \mp 2D_x^3(\tilde{u}_1) - 2D_x^2(\tilde{v}_1) \mp [uD_x(\tilde{u}_1) + \tilde{u}_1 u_x] - \\ &- \frac{1}{3}u^3 - v^2 - uu_{xx} \mp uv_x \mp u_x v, \\ \tilde{v}_n &= \pm 2D_x(\tilde{v}_{n-1}) \mp 2D_x^3(\tilde{u}_{n-2}) - 2D_x^2(\tilde{v}_{n-2}) \mp \\ &\mp \sum_{k+\ell=n-2} 2\tilde{u}_k D_x(\tilde{u}_\ell) - \sum_{k+\ell+m=n-3} \frac{1}{3}\tilde{u}_k\tilde{u}_\ell\tilde{u}_m + \\ &+ \sum_{k+\ell=n-3} [-\tilde{v}_k\tilde{v}_\ell - \tilde{u}_k D_x^2(\tilde{u}_\ell) \mp \tilde{u}_k D_x(\tilde{v}_\ell) \mp D_x(\tilde{u}_k)\tilde{v}_\ell] + \\ &+ \sum_{k+\ell=n-4} 2[\pm D_x(\tilde{u}_k)D_x^2(\tilde{u}_\ell) + D_x(\tilde{u}_k)D_x(\tilde{v}_\ell) + \\ &+ D_x^2(\tilde{u}_k)\tilde{v}_\ell \pm \tilde{v}_k D_x(\tilde{v}_\ell)], & n &= 4, 5, \\ \tilde{v}_n &= \pm 2D_x(\tilde{v}_{n-1}) \mp 2D_x^3(\tilde{u}_{n-2}) - 2D_x^2(\tilde{v}_{n-2}) \mp \\ &\mp \sum_{k+\ell=n-2} 2\tilde{u}_k D_x(\tilde{u}_\ell) - \sum_{k+\ell+m=n-3} \frac{1}{3}\tilde{u}_k\tilde{u}_\ell\tilde{u}_m + \\ &+ \sum_{k+\ell=n-3} [-\tilde{v}_k\tilde{v}_\ell - \tilde{u}_k D_x^2(\tilde{u}_\ell) \mp \tilde{u}_k D_x(\tilde{v}_\ell) \mp D_x(\tilde{u}_k)\tilde{v}_\ell] + \\ &+ \sum_{k+\ell=n-4} 2[\pm D_x(\tilde{u}_k)D_x^2(\tilde{u}_\ell) + D_x(\tilde{u}_k)D_x(\tilde{v}_\ell) + D_x^2(\tilde{u}_k)\tilde{v}_\ell \pm \tilde{v}_k D_x(\tilde{v}_\ell)] + \\ &+ \sum_{k+\ell+m=n-6} \left[-\frac{1}{3}\tilde{v}_k\tilde{v}_\ell\tilde{v}_m \mp \frac{1}{3}D_x(\tilde{u}_k)D_x(\tilde{u}_\ell)D_x(\tilde{u}_m) - \right. \\ &\left. - D_x(\tilde{u}_k)D_x(\tilde{u}_\ell)\tilde{v}_m + D_x(\tilde{u}_k)\tilde{v}_\ell\tilde{v}_m \right], & n &\geq 6. \end{aligned}$$

Произвол в выборе знаков в суммах не влияет на нетривиальные сохраняющиеся плотности $\tilde{u}_{3k}$ и $\tilde{v}_{3k}$. Плотности с номерами $3k+1$, $3k+2$ тривиальны при всех $k \geq 0$.

Итак, видно, что тривиальность когомологий Гарднера является препятствием к существованию рекуррентных соотношений между гамильтонианами иерархии в том случае, если не существует деформаций, полученных с помощью симметрий исходной системы (в частности, если у системы вообще нет классических симметрий, кроме трансляций). При описании когомологий Гарднера можно использовать различные методики (в схожей задаче оценка пуассоновых когомологий через когомологии де Рама получена в [12]). Для решения прежде всего необходимо классифицировать по α подстановки Миуры $\mathbf{m}_{\varepsilon_\alpha}$ в рассматриваемую систему. В следующем разделе мы изучаем общую геометрическую задачу построения преобразований Миуры между интегрируемыми системами.

3. ДЕФОРМАЦИИ ПО ГАРДНЕРУ И ОБЪЕМЛЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЛИУВИЛЛЕВА ТИПА

В данном разделе показано, каким образом задачу построения деформаций по Гарднеру (8) можно упростить за счет использования гиперболических систем лиувиллева типа, которые, в свою очередь, также допускают интерпретацию в терминах диаграмм, см. далее диаграмму (20). Для этого сначала мы напомним метод работы [8] представления иерархий в виде коммутативных подалгебр Ли симметрических систем $\mathcal{E}_{\text{EL}}$ Эйлера–Лагранжа лиувиллева типа, задающих используемые в диаграмме (8) подстановки $\tau: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$. Эволюционные системы $\mathcal{E}$ в образе таких подстановок всегда являются симметриями многокомпонентных волновых уравнений, причем примеры 1–4 показывают, что деформации этих эволюционных систем соответствуют классической схеме. Кроме того, показано, что объемлющие системы $\mathcal{E}_{\text{EL}}$ распространяются до семейств $\mathcal{E}_L^\varepsilon$ так, что расширения остаются системами лиувиллева типа, при этом редукции $\mathbf{m}_\varepsilon: \mathcal{E}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{E}$ заданы преобразованиями $\mathcal{E}_L^\varepsilon \rightarrow \mathcal{E}_{\text{EL}}$. Таким образом, применение систем $\mathcal{E}_{\text{EL}}$ лиувиллева типа задает обе стрелки в диаграмме (8), и наоборот, задача деформации приводит к новым интегрируемым системам. Еще один способ получать интегрируемые уравнения – поднятие иерархий на общие решения систем $\mathcal{E}_{\text{EL}}$. Ниже мы строим точно решаемое двухкомпонентное обобщение уравнения Лиувилля; для этого скалярного уравнения мы также находим однопараметрическое расширение лиувиллева типа. Кроме того, мы отмечаем, что поднятие модифицированного КдФ (симметрии уравнения Лиувилля) на его решение есть уравнение Шварца–КдФ.

Рассмотрим пример весьма общей природы: применяя метод работы [8] построения подстановок Миуры τ к эволюционной системе [18]

$$a_t = \frac{1}{2}(a^2b - 2a_xb - 4b_{xx})_x, \quad b_t = \frac{1}{2}(a(b^2 - 1) + 2bb_x)_x, \quad (13)$$

получим ее деформацию по Гарднеру. При этом, однако, мы не помещаем систему (13) в однопараметрическое семейство и тем самым не пытаемся реализовать классическую схему, а используем алгебраическое определение деформаций

как диаграмм (8). Сначала мы строим подстановку, преобразующую (13) в систему (5), деформация которой уже известна. Для этого мы потенцируем иерархию системы (13) при помощи (14), а затем представляем высшие симметрии системы (15) в виде коммутативной подалгебры Ли нётеровых симметрий системы Эйлера–Лагранжа (16) лиувиллева типа, интегралы которой (17) и задают искомую подстановку (18). Двухкомпонентная гиперболическая система (16) точно интегрируема, и мы строим ее общее решение, зависящее от четырех произвольных функций.

Система (13) бигамильтонова, причем ее первая гамильтонова структура есть $\begin{pmatrix} 0 & D_x \\ D_x & 0 \end{pmatrix}$. Используя ее, мы вводим такие потенциалы A и B , что сопряженная линеаризация $(\ell_{a,b}^{(A,B)})^*$ от a, b по A, B пропорциональна первой структуре. Поэтому мы полагаем

$$a = \frac{1}{2}B_x, \quad b = \frac{1}{2}A_x. \quad (14)$$

Новые переменные удовлетворяют гамильтоновой системе

$$A_t = \frac{1}{2}A_x A_{xx} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}A_x^2 - 1\right)B_x, \quad B_t = -2A_{xxx} + \frac{1}{8}A_x B_x^2 - \frac{1}{2}A_x B_{xx}. \quad (15)$$

Отметим, что системы (13) и (15) теперь можно привести к каноническому виду

$$A_t = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a}, \quad a_t = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A}; \quad B_t = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b}, \quad b_t = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta B},$$

где плотность гамильтониана $\mathcal{H} = \int H[a, b] dx$ есть

$$H = \frac{1}{32}A_x^2 B_x^2 + \frac{1}{4}A_x A_{xx} B_x + \frac{1}{2}A_{xx}^2 - \frac{1}{8}B_x^2.$$

Основная идея предложенного в [8] алгоритма заключается в построении такого лагранжиана $\mathcal{L} = -\iint [aA_y + bB_y + H(A, B)] dx dy$, что потенциальная система (15) и иерархия ее высших потоков являются нётеровыми симметриями гиперболического уравнения Эйлера–Лагранжа $\mathcal{E}_{\text{EL}} = \{\mathbf{E}(\mathcal{L}) = 0\}$. Длинная, но несложная выкладка приводит к обобщению уравнения Лиувилля

$$A_{xy} = -\frac{1}{8}Ae^{-B/4}, \quad B_{xy} = \frac{1}{2}e^{-B/4}. \quad (16)$$

Система (16) – это система лиувиллева типа, и ее интегралы суть

$$I_1 = -\frac{1}{4}a^2 - a_x, \quad I_2 = ab + 2b_x; \quad (17)$$

на уравнении (16) справедливы равенства $\overline{D}_y(I_i) \doteq 0$, $i = 1, 2$. Система (16) лиувиллева типа не присутствует в классификациях, приведенных в работе [19], поскольку является треугольной.

Рассмотрим далее интегралы

$$u = I_2, \quad v = I_1 + \frac{1}{4}I_2^2; \quad (18)$$

отметим, что второй из них не является минимальным. Вычисляя их динамику, заданную системой эволюционных уравнений (13), мы получаем систему Каупа–Буссинеска (5). Таким образом, построена подстановка (18) в (5) из дважды модифицированных уравнений (13), см. [18]. Деформация по Гарднеру системы Каупа–Буссинеска (5) была описана ранее в примере 2; рекуррентные соотношения между гамильтонианами высших симметрий систем (13) и (15) выводятся из (7) с помощью подстановок (14) и (18).

Неудивительно, что линейное гиперболическое обобщение (16) скалярного уравнения Лиувилля интегрируемо. Тем не менее, поскольку объемлющая система (16) допускает два независимых интеграла (17), ее общее решение может быть получено в явном виде. Делается это следующим образом (иные способы решения уравнения данного класса обсуждаются в [20]). Напомним, что общеизвестное решение уравнения Лиувилля, входящего в систему (16), таково:

$$B(x, y) = -4 \ln \frac{-16\mathcal{X}'(x)\mathcal{Y}'(y)}{Q^2(\mathcal{X}(x) + \mathcal{Y}(y))},$$

где $\mathcal{X}(x)$ и $\mathcal{Y}(y)$ – произвольные функции, а $Q \in \{\text{id}, \sin, \text{sh}\}$. Соответственно, другое уравнение в (16) приводится к виду

$$A_{xy} = 2A \frac{\mathcal{X}'(x)\mathcal{Y}'(y)}{Q^2(\mathcal{X}(x) + \mathcal{Y}(y))}. \quad (19)$$

Производя замену $\tilde{x} = \mathcal{X}(x)$, $\tilde{y} = \mathcal{Y}(y)$ и опуская в дальнейшем знак тильды над переменными, мы получаем линейное уравнение

$$A_{xy} = \frac{2A}{Q^2(x + y)}. \quad (19')$$

Далее, пусть $f(x)$ и $g(y)$ – произвольные функции. Минимальный интеграл I_2 в (17) принадлежит ядру производной $\bar{D}_y$, ограниченной на (16), поэтому положим $I_2 := f(x)$ и рассмотрим возникшее линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $b = A_x/2$. Решая его и симметризуя промежуточный результат по x и y , мы получаем в итоге три решения $A(x, y)$, соответствующие трем возможным общим решениям уравнения Лиувилля и параметризованные функциями $f(x)$, $\mathcal{X}(x)$ и $g(y)$, $\mathcal{Y}(y)$. Итак, три решения уравнения (19') суть

$$\begin{aligned} A_{\text{id}} &= \left[(x - y) \left(\int_0^x \xi f(\xi) d\xi - \int_0^y \eta g(\eta) d\eta \right) - \int_0^x \xi^2 f(\xi) d\xi - \int_0^y \eta^2 g(\eta) d\eta + \right. \\ &\quad \left. + xy \int_0^x f(\xi) d\xi + xy \int_0^y g(\eta) d\eta \right] \frac{1}{x + y}, \\ A_{\sin} &= \int_0^x f(\xi) \sin 2(\xi + y) d\xi + \int_0^y g(\eta) \sin 2(x + \eta) d\eta - \\ &\quad - 2 \operatorname{ctg}(x + y) \left[\int_0^x f(\xi) \sin^2(\xi + y) d\xi + \int_0^y g(\eta) \sin^2(x + \eta) d\eta \right], \\ A_{\text{sh}} &= \int_0^x f(\xi) \operatorname{sh}(\xi + y) \operatorname{ch}(\xi + y) d\xi + \int_0^y g(\eta) \operatorname{sh}(x + \eta) \operatorname{ch}(x + \eta) d\eta - \end{aligned}$$

$$- 2 \operatorname{cth}(x+y) \left[\int_0^x f(\xi) \operatorname{sh}^2(\xi+y) d\xi + \int_0^y g(\eta) \operatorname{sh}^2(x+\eta) d\eta \right];$$

напомним, что здесь использованы обозначения $x = \mathcal{X}$ и $y = \mathcal{Y}$, связывающие приведенные выше формулы с исходной записью уравнений (16) и (19).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если система $\mathcal{E}_L$ лиувиллева типа с m неизвестными функциями допускает полный набор из $2m$ интегралов, то она интегрируема, и общее решение зависит от $2m$ произвольных функций $f^i(x)$ и $g^j(y)$, где $1 \leq i, j \leq m$. Интегралы задают подстановки из $\mathcal{E}_L$ в m образующих $\ker \overline{D}_y$ и, аналогично, в m образующих $\ker \overline{D}_x$, причем подстановки обращаются в m -компонентные наборы $\{\phi^i(x)\}$, $\{\gamma^j(y)\}$ на всяком решении уравнения $\mathcal{E}_L$. Заметим, что функции $f^i(x) + g^i(y)$ и $\phi^i(x) + \gamma^i(y)$ задают два набора по m решений волнового уравнения $\mathcal{E}_\emptyset = \{s_{xy} = 0\}$ (еще один способ получить $2m$ решений волновых уравнений состоит во введении потенциальных координат на ядрах). Таким образом, гиперболические системы лиувиллева типа могут быть определены как диаграммы

$$\mathcal{E}_\emptyset \xrightarrow{\text{sol}} \mathcal{E}_L \xrightarrow{\text{int}} \mathcal{E}_\emptyset, \quad (20)$$

в которых первая стрелка ставит в соответствие m парам произвольных функций общее решение уравнения $\mathcal{E}_L$, а вторая стрелка задана интегралами. В частности, из диаграммы (20) следуют явные формулы автопреобразований Беклунда для нелинейных систем $\mathcal{E}_L$.

Предположим дополнительно, что система $\mathcal{E}_{EL} = \{\mathbf{E}(\mathcal{L}) = 0\}$ Эйлера–Лагранжа лиувиллева типа является объемлющей по отношению к иерархии уравнения $\mathcal{E}'$. По построению гамильтонова система $\mathcal{E}'$ описывает потоки нётеровых симметрий на $\mathcal{E}_{EL}$ и, следовательно, задает динамику $\mathbf{f}(x, t)$, $\mathbf{g}(y, t)$ с начальными данными $\mathbf{f}(x, 0) = \{f^i(x)\}$, $\mathbf{g}(y, 0) = \{g^j(y)\}$. Таким образом, мы получаем новую эволюционную систему $\mathcal{E}''$ относительно $\mathbf{f}(x, t)$ или $\mathbf{g}(y, t)$, которая допускает преобразование типа Миуры в $\mathcal{E}'$, заданное формулами для общего решения уравнения $\mathcal{E}_{EL}$. Итак, использование вспомогательных точно интегрируемых гиперболических систем позволяет поместить $\mathcal{E}'$ в тройку $\mathcal{E}'' \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$ интегрируемых уравнений, причем эта диаграмма образована симметриями диаграммы (20), служащей определением систем лиувиллева типа.

ПРИМЕР 5. Поток потенциального модифицированного уравнения КдФ $V_t = -\frac{1}{2}V_{xxx} + V_x^3$ поднимается на общее решение $V = \frac{1}{2} \ln[\mathcal{X}'(x)\mathcal{Y}'(y)/(\mathcal{X} + \mathcal{Y})^2]$ уравнения Лиувилля $V_{xy} = e^{2V}$, порождая уравнение $\mathcal{Y}_t = 0$ и уравнение Шварца–КдФ

$$\mathcal{X}_t = -\frac{1}{2}\mathcal{X}_x \cdot \{\mathcal{X}, x\} \equiv -\frac{1}{2}\mathcal{X}_{xxx} + \frac{3}{4}\frac{\mathcal{X}_x^2}{\mathcal{X}_x},$$

которое близко к уравнению Кричевера–Новикова.

Следует отметить, что классические деформации по Гарднеру $(\mathcal{E}_\varepsilon, \mathfrak{m}_\varepsilon)$ также можно искать, используя системы лиувиллева типа, причем делать это напрямую, не переходя к системам в образе подстановок, определяемых интегралами. Для этого

следует сначала найти семейство расширений $\mathcal{E}_L^\varepsilon$ лиувиллева типа, содержащее объемлющую систему $\mathcal{E}_{EL}$ при $\varepsilon = 0$ и допускающее редукцию $\mathfrak{m}_\varepsilon: \mathcal{E}_L^\varepsilon \rightarrow \mathcal{E}_{EL}$. Применимо следующее рассуждение. Ясно, что редукция расширяет интегралы w для $\mathcal{E}_{EL}$ на всю кривую $\mathcal{E}_L^\varepsilon$ по формуле $w^\varepsilon = w[\mathfrak{m}_\varepsilon]$, при этом вследствие условий $\overline{D}_y(w[\mathfrak{m}_\varepsilon]) \dot{=} 0$, выполненных в силу $\mathcal{E}_L^\varepsilon$, известные дифференциальные функции w согласованы с допустимыми правыми частями уравнений $\mathcal{E}_L^\varepsilon$ и редукциями $\mathfrak{m}_\varepsilon$. Более того, редукции $\mathfrak{m}_\varepsilon$ переносятся на расширения $\mathcal{E}_\varepsilon$ интегрируемых эволюционных потоков $\mathcal{E}$, определенных на $\mathcal{E}_{EL}$. Из сказанного выше следует, что интегралы систем лиувиллева типа позволяют искать преобразования Миуры, действующие в такие системы и потоки их симметрий, а не только из них (в последнем случае мы можем это сделать с помощью описания эволюции интегралов вдоль симметрий).

ПРИМЕР 6. Рассмотрим расширенное потенциальное модифицированное уравнение КдФ (см. (4))

$$\tilde{V}_t = -\frac{1}{2}\tilde{V}_{xxx} + \tilde{V}_x^3 + 3\varepsilon^2 \frac{\tilde{V}_x \tilde{V}_{xx}}{1 + 4\varepsilon^2 \tilde{V}_x^2}.$$

Объемлющее гиперболическое уравнение

$$\mathcal{E}_L^\varepsilon = \left\{ \tilde{V}_{xy} = e^{2\tilde{V}} \sqrt{1 + 4\varepsilon^2 \tilde{V}_x^2} \right\} \quad (21)$$

не является уравнением Эйлера–Лагранжа при $\varepsilon \neq 0$ (этого следовало ожидать, поскольку расширенное модифицированное уравнение КдФ (4) утрачивает первую гамильтонову структуру D_x при $\varepsilon \neq 0$). Редукция $\mathfrak{m}^\varepsilon: \mathcal{E}_L^\varepsilon \rightarrow \mathcal{E}_{EL}$ уравнения (21) к уравнению Лиувилля $\mathcal{E}_{EL} = \{V_{xy} = e^{2V}\}$ задана формулой

$$V = \tilde{V} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsch}(2\varepsilon \tilde{V}_x). \quad (22)$$

Чтобы получить расширение (21) и редукцию (22), необходимо потребовать, чтобы расширения $\mathcal{E}_L^\varepsilon$ оставались расширениями лиувиллева типа, а их интегралы наследовались при помощи редукции $\mathfrak{m}_\varepsilon$ из интеграла $w = V_x^2 - V_{xx}$ уравнения Лиувилля $\mathcal{E}_{EL}$.

Скалярное гиперболическое уравнение (21) присутствует в п. 4 классификации, приведенной в [20]. Заметим, что кривая $\mathcal{E}_L^\varepsilon$, содержащая представитель класса (см. работу [20], § 7) $\tilde{V}_{xy} = S(\tilde{V})\sqrt{1 - \tilde{V}_x^2}$ при условии $S'' + \operatorname{const}^2 S = 0$, является расширением уравнения $\tilde{V}_{xy} = S(\tilde{V})$ на $\varepsilon \in i\mathbb{R}$. Отсюда следует, что инварианты Лапласа уравнения $\mathcal{E}_L^\varepsilon$ удовлетворяют деформации неперiodической цепочки Тоды, и поэтому деформированная цепочка не может быть периодической.

4. СОПРЯЖЕННЫЕ СИСТЕМЫ И РАСШИРЕННЫЕ СХЕМЫ МАГРИ

Выше было показано, что не все деформации по Гарднеру могут быть получены при помощи симметрии рассматриваемой системы, и это приводит к наличию

когомологий Гарднера. Оказывается, еще одно устоявшееся предположение, утверждающее, что кривые $\mathcal{E}_\varepsilon$ связывают исходные системы и предписанные модифицированные уравнения, также неверно. Указанное предположение было постулировано в [3] для $N = 2$ суперуравнения КдФ и привело к последовательности препятствий к неизвестной и поныне деформации. Отметим, что для систем (Каупа–Буссинеска, рассмотренных в примерах 2 и 4, существуют модифицированные аналоги (см. [8], [18]), однако указанное свойство никак не связано с соответствующими деформациями по Гарднеру. Например, расширение (12а), содержащее производные третьего порядка, нельзя получить из системы Буссинеска какой-либо деформацией в модифицированное уравнение второго порядка, которое изучалось в [8].

В данном разделе описан способ построения новых вполне интегрируемых систем на основе деформаций по Гарднеру или, в более общем смысле, при помощи некоторых семейств $\{\mathcal{E}_\varepsilon\}$ вполне интегрируемых систем, возможно, не допускающих редукций $m_\varepsilon: \mathcal{E}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{E}$. Ниже мы всюду делаем техническое предположение о том, что расширения $\mathcal{E}_\varepsilon$ полиномиальны по параметру ε .

Рассмотрим кривую $\{\mathcal{E}_\varepsilon\}$ вполне интегрируемых систем (например, полученную из деформации по Гарднеру); по предположению, при каждом ε система $\mathcal{E}_\varepsilon$ допускает иерархию $\mathfrak{A}_\varepsilon$ высших потоков, которые полиномиальны по ε . Сопряженная система $\mathcal{E}'$ и ее высшие потоки образованы коэффициентами при старших степенях ε в уравнении $\mathcal{E}_\varepsilon$ и, соответственно, в его симметриях.

Укажем два типа сопряженных систем. Пусть $\mathfrak{A}$ – иерархия высших симметрий системы $\mathcal{E}$ и A_i , $i \geq 1$, – гамильтоновы структуры иерархии $\mathfrak{A}$. Рассмотрим такие операторы $A_{i,\varepsilon} = A_i + \dots + \varepsilon^{k_i} A'_i$, являющиеся полиномиальными деформациями операторов A_i , что каждый из $A_{i,\varepsilon}$ остается гамильтоновым при всех ε (ясно, что тогда A'_i является гамильтоновым и связан с исходной структурой A_i условиями гомотопии $[[A_{i,\varepsilon}, A_{i,\varepsilon}]] = 0$, где $[[\cdot, \cdot]]$ – скобка Схоутена, см. [7]). Пусть при некоторых i и j деформации $A_{i,\varepsilon}$ и $A_{j,\varepsilon}$ гамильтоновых операторов совместны (иными словами, $[[A_{i,\varepsilon}, A_{j,\varepsilon}]] = 0$). Предположим, наконец, что для каждого потока $\varphi_{\alpha,\varepsilon} = A_{j,\varepsilon}(\mathbf{E}(\mathcal{H}_{\alpha,\varepsilon}))$ существует гамильтониан $H_{\alpha+1,\varepsilon}$ такой, что $\varphi_{\alpha,\varepsilon} = A_{i,\varepsilon}(\mathbf{E}(\mathcal{H}_{\alpha+1,\varepsilon}))$; это возможно, если пуассоновы когомологии относительно $A_{i,\varepsilon}$ тривиальны, см. [12], [13]. Схема Магри, порождаемая парой $A_{i,\varepsilon}$, $A_{j,\varepsilon}$, расширяет бигамильтонову иерархию $\mathfrak{A}$ до семейства иерархий $\mathfrak{A}_\varepsilon$, полиномиальных по ε . Обратим внимание на коэффициенты φ'_k при старших степенях ε , входящих в потоки иерархии $\mathfrak{A}_\varepsilon$. Потоки φ'_k являются бигамильтоновыми относительно A'_i и A'_j и образуют сопряженную иерархию $\mathfrak{A}'$ первого типа.

ПРИМЕР 7. Расширение (2а) уравнения КдФ является бигамильтоновым относительно оператора $A_{1,\varepsilon} = D_x$ и слабо нелокальной структуры

$$A_{2,\varepsilon} = -\frac{1}{2}D_x^3 + 2\tilde{u}D_x + \tilde{u}_x + 2\varepsilon^2 \cdot (\tilde{u}^2D_x + \tilde{u}\tilde{u}_x - \tilde{u}_x D_x^{-1} \circ \tilde{u}_x).$$

Последний оператор можно получить, либо факторизуя рекурсию для уравнения (2а), либо непосредственно вычисляя его методом работы [13]. Выделяя из (2а) поток при ε^2 , получаем сопряженное уравнение КдФ $\dot{u} = u^2u_x$. Отметим, что при

перемасштабировании весá переменных в бездисперсном модифицированном уравнении КдФ определены неединственным способом; их можно фиксировать путем введения дисперсии в (3).

Теперь предположим, что $A_{i,\varepsilon} = A_i + \varepsilon^{k_i} A'_i$, откуда следует совместность гамильтоновых операторов A_i и A'_i . Если, опять-таки, всякий поток $\varphi_\alpha = A'_i(\mathbf{E}(\mathcal{H}_\alpha))$, лежащий в образе A'_i (или, наоборот, в A_i), разрешим относительно гамильтониана $\mathcal{H}_{\alpha+1}$, так что $\varphi_\alpha = A_i(\mathbf{E}(\mathcal{H}_{\alpha+1}))$ (соответственно φ_α принадлежит образу A'_i), то расширенный гамильтонов оператор $A_{i,\varepsilon}$ порождает сопряженную иерархию второго типа.

ПРИМЕР 8. Сопряженные уравнения Каупа–Буссинеска имеют вид (знак тильды над u мы не пишем)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= uu_{xx} + u_x^2 + u_x v + uv_x, \\ \dot{v} &= -(2u_x u_{xx} + uu_{xxx} + u_x v_x + uv_{xx} - vv_x). \end{aligned} \quad (23)$$

Эта система бигамильтонова относительно совместных локальных операторов

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & D_x \\ D_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A'_1 = \begin{pmatrix} 0 & D_x \circ u_x + D_x \circ v \\ u_x D_x + v D_x & -u_{xx} D_x - D_x \circ u_{xx} - v_x D_x - D_x \circ v_x \end{pmatrix}.$$

В самом деле, имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A_1 \left(\mathbf{E} \left(\int \frac{1}{2} (uu_x^2 + 2uu_x v + uv^2) dx \right) \right) = A'_1 \left(\mathbf{E} \left(\int uv dx \right) \right).$$

Таким образом, (23) является вполне интегрируемой сопряженной системой второго типа.

Система (23) допускает галилееву симметрию $x \mapsto x + \lambda t$, $u \mapsto u$, $v \mapsto v + \lambda$; при этом исходное уравнение Каупа–Буссинеска инвариантно относительно преобразования $x \mapsto x + \lambda t$, $u \mapsto u + \lambda$, $v \mapsto v$. Тем самым при переходе от (5) к соответствующей сопряженной системе (23) сдвиг зависимой переменной переносится с u на v . Расширения (6а) уравнения Каупа–Буссинеска не имеют галилеевой симметрии; при этом семейство (6а) не получается за счет действия этой симметрии.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Понятия деформаций по Гарднеру (8) и расширений $\mathfrak{A}_\varepsilon$ схем Магри пересекаются, если существует редукция $\hat{m}_\varepsilon: \mathfrak{A}_\varepsilon \rightarrow \text{sym } \mathcal{E}$ из иерархии симметрий расширения $\mathcal{E}_\varepsilon$ и, кроме того, для первой гамильтоновой структуры $A_{1,\varepsilon}$ схемы Магри $\mathfrak{A}_\varepsilon$ справедливо $A_{1,\varepsilon} = \text{const} \cdot D_x$, как это имеет место всюду выше. Отметим, что в этом случае можно применить результаты работы [12] о тривиальности пуассоновых когомологий. В общем случае расширение $\mathfrak{A}_\varepsilon$ схемы Магри $\mathfrak{A}$ уравнения $\mathcal{E}$ может не иметь редукции $\hat{m}_\varepsilon$ к $\mathcal{E}$ и его симметриям, и тогда задача описания гамильтонианов $\mathfrak{A}$ и сопряженной иерархии $\mathfrak{A}'$ становится нетривиальной.

Проводимое различие между деформациями по Гарднеру и расширениями схем Магри является более выгодным по сравнению с подходом, основанным на деформации операторов Лакса [5], который смешивает две теории. Благодаря такому различию, рассматривая пример 4, мы смогли улучшить один из результатов работы [5].

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Применение объемлющих уравнений Эйлера–Лагранжа лиувиллева типа позволяет обнаружить неочевидное свойство исследуемых эволюционных систем: существование и вид их предгамильтоновых структур в смысле работы [20]. Например, потенциальное модифицированное уравнение КдФ $V_t = -\frac{1}{2}V_{xxx} + V_x^3$ и его вышние потоки, задающие нётеровы симметрии уравнения Лиувилля $V_{xy} = e^{2V}$, см. пример 5, лежат в образе оператора $u_x + D_x/2$. Используя классификационную теорему (описание нётеровых симметрий систем лиувиллева типа [8]), можно получить матричное обобщение этого оператора, заданное системой (16) и потенциальными дважды модифицированными уравнениями Каупа–Буссинеска (15) на ней. Скобка в прообразе матричного оператора обобщает скобку, соответствующую второй гамильтоновой структуре для КдФ [8], [20]. Исследованию алгебраических свойств предгамильтоновых операторов и их связи с интегрируемыми системами будет посвящена следующая публикация.

В рамках подхода, позволяющего строить семейства систем $\mathcal{E}_\varepsilon$ при помощи симметрии уравнения $\mathcal{E}$, которую нельзя поднять на $\mathcal{E}_{\varepsilon_0}$ при каком-либо ε_0 , алгебрам симметрий модифицированных систем $\mathcal{E}'$ соответствуют подалгебры Ли в $\text{sym } \mathcal{E}$; в частности, $\text{sym } \mathcal{E}_{\varepsilon_0} \subseteq \text{sym } \mathcal{E}$. Аналогичное соотношение справедливо для фундаментальных алгебр Ли дифференциальных уравнений [21]: фундаментальные алгебры уравнений $\mathcal{E}_\varepsilon$ порождают однопараметрическое семейство подалгебр Ли в фундаментальной алгебре уравнения $\mathcal{E}$. По сути, использование модифицированных систем с параметром служит наиболее удобным способом вычисления этих структур для уравнений в частных производных. Подчеркнем, что деформации по Гарднеру естественным образом порождают семейства $\mathcal{E}_\varepsilon$ и редукции $\mathfrak{m}_\varepsilon: \mathcal{E}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{E}$.

Предложенное определение деформаций по Гарднеру мотивировано тем, что в основном они применяются для поиска рекуррентных соотношений между гамильтонианами (супер)систем, не деформируемых в рамках классической схемы. Ожидается, что трудности, возникающие в нерешенной проблеме [2] построения деформаций по Гарднеру $N = 2$, $a = -2, 1, 4$ суперуравнений КдФ, преодолимы за счет применения данного подхода. Во-первых, существование препятствий к деформации, отмечаемое в [3], может означать существование отображения Миуры τ из рассматриваемой системы. Во-вторых, поскольку первая гамильтонова структура $N = 2$ суперуравнения КдФ с $a = 4$ есть $A_1 = D_x$, к нему применимо обобщение метода работы [8] на случай суперуравнений. Кроме того, было установлено, что от деформации по Гарднеру нельзя а priori требовать комбинирования с какой-нибудь модифицированной системой. И наконец, не является удивительным то обстоятельство, что расширения $\mathcal{E}_\varepsilon$ и сопряженные системы утрачивают локальные пуассоновы структуры, но остаются интегрируемыми – их гамильтонианы заданы через редукции. Тем самым мы получаем класс вполне интегрируемых, но, на первый взгляд, не бигамильтоновых систем. Указанная ситуация может иметь место для $N = 2$ суперуравнения КдФ с $a = 1$ [2], [3]. Таким образом, трактуя эту суперсистему как сопряженную, мы приходим к задаче восстановления сопряженной к ней, т.е. исход-

ного (до расширения) суперуравнения $\mathcal{E}$. Эти вопросы будут рассмотрены в другой работе.

Благодарности. Автор благодарен В.В. Соколову, В.Н. Рубцову, И.С. Кrasil'щику и А. Карасу за полезные обсуждения, а также признателен рецензенту за важные замечания и пожелания. Часть данного исследования проведена в Математическом институте им. Макса Планка (Бонн) и в Институте высших научных исследований (IHÉS). Работа выполнена при частичной поддержке Математического института им. Макса Планка и IHÉS.

Список литературы

- [1] R. M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal, *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 1204–1209.
- [2] P. Mathieu, “Open problems for the super KdV equations”, *Bäcklund and Darboux Transformations. The Geometry of Solitons* (Halifax, Canada, 1999), CRM Proc. Lecture Notes, **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 325–334.
- [3] P. Labelle, P. Mathieu, *J. Math. Phys.*, **32** (1991), 923–927.
- [4] A. Karasu, A. V. Kiselev, *J. Phys. A*, **39** (2006), 11453–11460.
- [5] B. A. Kupershmidt, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **83**:1 (1983), 45–74.
- [6] P. Kersten, I. Krasil'shchik, A. Verbovetsky, “Nonlocal constructions in the geometry of PDE”, *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics* (Kyiv, Ukraine, 2003), Proc. Inst. Math. NAS Ukraine, **50**, Inst. Math. NAS Ukraine, Kyiv, 2004, 412–423.
- [7] I. Krasil'shchik, A. Verbovetsky, *Homological Methods in Equations of Mathematical Physics*, Open Education and Sciences, Opava, 1998.
- [8] A. В. Киселев, *ТМФ*, **144** (2005), 83–93.
- [9] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, “Алгебры Ли и уравнения типа Кортвега–де Фриза”, *Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Новейшие достижения*, **24**, ВИНТИ, М., 1984, 81–180.
- [10] А. В. Борисов, С. А. Зыков, *ТМФ*, **115** (1998), 199–214.
- [11] G. Carlet, B. Dubrovin, Y. Zhang, *Mosc. Math. J.*, **4**:2 (2004), 313–332; B. Dubrovin, Y. Zhang, *Commun. Math. Phys.*, **198** (1998), 311–361.
- [12] E. Getzler, *Duke Math. J.*, **111** (2002), 535–560.
- [13] P. Kersten, I. Krasil'shchik, A. Verbovetsky, *J. Geom. Phys.*, **50**:1–4 (2004), 273–302.
- [14] P. Mathieu, *J. Math. Phys.*, **29** (1988), 2499–2506.
- [15] A. V. Kiselev, T. Wolf, *SIGMA*, **2** (2006), 030.
- [16] M. Gerstenhaber, S. D. Schack, “Algebraic cohomology and deformation theory”, *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications* (Il Ciocco, 1986), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci., **247**, eds. M. Gerstenhaber, M. Hazelwinkel, Kluwer, Dordrecht, 1988, 11–264.
- [17] А. В. Киселев, *Вестн. МГУ, Сер. 3. Физ. Астр.*, 2002, № 6, 22–26.
- [18] M. V. Pavlov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **9**:Suppl. 1 (2002), 173–191.
- [19] D. K. Demskoi, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **14** (2007), 147–156.
- [20] А. В. Жибер, В. В. Соколов, *УМН*, **56**:1 (2001), 63–106.
- [21] S. Igonin, *J. Geom. Phys.*, **56** (2006), 939–998.