Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Лебле, Метод одевания в квантовых моделях взаимодействия излучения с веществом, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 1, 118–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6074>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 03:51:29

© 2007 г.

С. Б. Лебле*

МЕТОД ОДЕВАНИЯ В КВАНТОВЫХ МОДЕЛЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

Рассматриваются спектральные задачи, связанные с гамильтонианами моделей Дикке и Джейнса–Каммингса взаимодействия излучения с веществом. В явном виде записан спектр возмущенной модели Дикке (захваченного иона, взаимодействующего с движением центра масс). Выведены уравнения одевающей цепочки для неабелевых элементов, которые исследуются для моделей материи с двумя состояниями. Обсуждаются вложение моделей Джейнса–Тэйвиса–Каммингса и члены, соответствующие невращающейся волне.

Ключевые слова: преобразование Дарбу, уравнение одевающих цепочек, модель Джейнса–Каммингса, модель Дикке, форминвариантные матричные потенциалы.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Общие замечания. Наблюдающийся в настоящее время значительный интерес к взаимодействию излучения с веществом объясняется новыми экспериментами, проводимыми в связи с так называемыми осцилляциями Раби атомных пучков в резонаторе [1], а также мазерным эффектом и возможными применениями в квантовой информатике [2]. Эксперименты анализируются с целью установления фундаментальных свойств квантованного электромагнитного поля в резонаторе [3]. Имеется не так много интересных исследований уравнений, описывающих взаимодействие излучения с веществом [4], [5], в которых физически интересные решаемые модели (Дикке и Джейнса–Каммингса) используются в качестве затравочных. Авторы работы [4] описывают суперпартнеры многофотонной модели Джейнса–Каммингса, а автор работы [5] исследует связанные с ними модели с помощью техники анзаца Бете.

Мы изучаем два варианта одевания посредством преобразования Дарбу (ПД): первый основан на одношаговом классическом ПД (см. разделы 2 и 3), во втором варианте (раздел 4) используется обобщенная конструкция Вайсса для так называемой одевающей цепочки [6]. Обобщение учитывает некоммутативность, которая осложняет как обобщенную связь Миуры “суперпотенциала” с “потенциалами” (коэффициентами основной задачи на собственные значения), так и ПД-формулы. В настоящей

*Gdansk University of Technology, ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdansk, Poland.
E-mail: leble@mif.pg.gda.pl

работе большое значение придается анализу различия между ПД-методом и “факторизацией”, которое становится значительным, когда базовый оператор эволюции является матрично-дифференциальным. Мы сосредоточим наше внимание на применении метода одевания, основанного на предложенном Матвеевым [7] обобщении классической ПД-техники (см. также [8]). Мы воспроизведем доказательство теоремы Матвеева для многочленов от дифференцирования ∂ , основываясь на результате для соответствующей операторной факторизации с остатком r . Во введении приводятся итоговые формулы из работы [9] (см. также [10]). Мы подчеркиваем важность выбора остатка в случае неабелевых многочленов, происходящих из матричного представления атомной части и из координатного представления операторов Гайзенберга рождения и уничтожения для полей, которые составляют гамильтониан взаимодействия поля с веществом.

Для удобства читателя мы начнем с краткого обзора моделей взаимодействия излучения с веществом как матрично-дифференциальных гамильтонианов. Первая модель – это знаменитая модель Джейнса–Каммингса, в которой собственные состояния в явном виде факторизуют гамильтониан [11], но соответствующие ПД не сохраняют “потенциальный” вид гамильтоновых операторов [4]. Вторая модель – это модель гамильтониана Дикке [12]. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы определить место обеих моделей среди класса гамильтонианов с форминвариантными матричными потенциалами.

1.2. Модели взаимодействия излучения с веществом. Гамильтоновы операторы. Перечислим популярные модели взаимодействия излучения с веществом. Пусть σ_i , $i = 0, 1, 2, 3$, – матрицы Паули, а $\sigma_{\pm} = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$. Общая модель Джейнса–Каммингса учитывает противорвращающуюся волну

$$H = N + \frac{\alpha(\sigma_0 + \sigma_3)}{2} + (\beta_1\sigma_+ + \beta_2\sigma_-)a + (\beta_1^*\sigma_- + \beta_2^*\sigma_+)a^+. \quad (1)$$

Модель захваченного иона, взаимодействующего с движением центра масс, представляется с помощью гамильтониана Дикке [5], где $\beta_1 = \beta_2$. Она описывает переход от квазиинтегрируемости к квантовому хаосу, обусловленный предшественниками квантового фазового перехода. Наше рассмотрение волновой функции указывает на связь с делокализацией системы и возникновением макроскопической когерентности [12]. Модель Джейнса–Каммингса, качественно хорошо описывающую колебания Раби [13], часто называют аппроксимацией вращающейся волны; она связана со случаем $\beta_2 = 0$.

В работе [4] рассматриваются задача Джейнса–Каммингса на собственные значения для k -фотона [13] и его суперсимметричных партнеров для случая аппроксимации вращающейся волны гамильтониана:

$$h = \begin{pmatrix} N + \alpha & \beta a^k \\ \beta^*(a^+)^k & N \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где a , a^+ – стандартные операторы рождения и уничтожения, $N = a^+a$, а $|n\rangle$ – его нормированные собственные состояния, т.е.

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

Проиллюстрируем решение задачи на собственные значения в случае $k = 1$. Прямые произведения

$$\psi_{-}(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} |n\rangle, \quad \psi_{+}(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} |n\rangle \quad (3)$$

и линейные комбинации соседних состояний

$$\Psi = c_1 \psi_{+}(n) + c_2 \psi_{-}(n+1), \quad c_2^{1,2} = \frac{\beta^* \sqrt{n+1}}{E_n^{1,2} - n} c_1, \quad (4)$$

приводят к системе, которая решает задачу на собственные значения для (2) с собственными значениями

$$E_n^{1,2} = n + \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + |\beta|^2(n+1)}. \quad (5)$$

Одно дополнительное подпространство для $\psi_{-}(0)$ соответствует нулевой энергии.

Хорошо известное представление

$$a = \frac{\partial_x + x}{\sqrt{2}}, \quad a^{+} = \frac{x - \partial_x}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

связывает оператор (2) с выражением

$$-\partial_x^2 + \sqrt{2} i \beta \sigma_2 \partial_x + \begin{pmatrix} x^2 - 1 + 2\alpha & \sqrt{2} \beta x \\ \sqrt{2} \beta & x^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

которое, как было показано в работе [7], одевается с помощью ПД и дает суперсимметричные модели [4] с произвольным k и высшими степенями дифференцирования ∂_x .

1.3. Факторизация гамильтонианов и эволюция. Будем следовать работе [9], сделав замену $\partial_x \rightarrow \partial$ и начав с дифференциального оператора

$$L = \sum_{n=0}^N a_n \partial^n \quad (8)$$

порядка N , где a_n – квадратные матрицы. Деление L справа и слева на оператор $L_s = D - s$ вводится следующим образом:

$$L = M L_s + r, \quad (9)$$

где M – результат деления справа, а r – остаток. Предложение из работы [9] решает задачу деления явно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если представление (9) справедливо, то результат деления M и остаток r выражаются через обобщенные полиномы Белла $B_{n,k}$ как

$$r = \sum_{n=0}^N a_n B_n(s), \quad M = \sum_{n=0}^{N-1} b_n D^n, \quad (10)$$

где коэффициенты B_n представляют собой полиномы Белла, а b_n определяются как

$$b_n = \sum_{k=n+1}^N a_k B_{k-1, k-n-1}(s), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (11)$$

причем $B_{n,0}(s) = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а остальные полиномы вычисляются с помощью рекуррентных соотношений [9]

$$B_{n,k}(s) = B_{n-1,k}(s) + DB_{n-1,k-1}(s), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (12)$$

$$B_{n,n}(s) = DB_{n-1,n-1}(s) + B_n(s), \quad n = 1, 2, \dots. \quad (13)$$

Более общий подход основан на рассмотрении эволюционных уравнений (снова см. [7], [9]). Предположим, что существует еще одно дифференцирование ∂_0 , а именно дифференцирование по соответствующему матрицам a_n параметру t , которое коммутирует с оператором ∂ .

Вводя вспомогательное коммутационное соотношение $L_\sigma r = rL_\sigma + r' + [r, \sigma]$ (отметим, что проведена замена $s \rightarrow \sigma$, $r' = (\partial r)$) и учитывая выражение (9), получаем

$$L_\sigma(\partial_0 - L) = (\partial_0 - \tilde{L})L_\sigma + (\partial_0\sigma) - r' - [r, \sigma], \quad (14)$$

где

$$\tilde{L} = L_\sigma M + r. \quad (15)$$

В результате имеет место важное заключение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если функция σ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_0\sigma) = r' + [r, \sigma], \quad (16)$$

то оператор L_σ сплетает операторы $\partial_0 - L$ и $\partial_0 - \tilde{L}$:

$$L_\sigma(\partial_0 - L) = (\partial_0 - \tilde{L})L_\sigma. \quad (17)$$

Явное выражение для $\tilde{L}$ можно получить, используя формулу (15) и выражения для остатка (10).

Запишем выражение (16), явно используя (10). Установлено, что для справедливости сплетающего соотношения (17) необходимо и достаточно, чтобы σ было решением уравнения

$$\partial_0\sigma = \sum_{n=0}^N (a'_n B_n(\sigma) + a_n B_{n+1}(\sigma) - \sigma a_n B_n(\sigma)). \quad (18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из-за интегрируемости уравнения (18) с помощью преобразования Коула–Хопфа естественно рассматривать уравнение (18) как обобщенное уравнение Бюргерса (оно является уравнением Бюргерса при $N = 2$). Очевидное следствие сплетающего соотношения (17) таково.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть функции ψ и φ суть решения уравнений

$$\partial_0\psi = L\psi, \quad \partial_0\varphi = L\varphi \quad (19)$$

для обратимой функции φ . Тогда функция

$$\tilde{\psi} = L_\sigma \psi = \partial \psi - \sigma \psi, \quad \sigma = (\partial \varphi) \varphi^{-1}, \quad (20)$$

есть решение уравнения

$$\partial_0 \tilde{\psi} = \tilde{L} \tilde{\psi}. \quad (21)$$

Последнее утверждение завершает доказательство теоремы Матвеева [7] для дифференциальных полиномов в неабелевом случае.

Равенство (11) дает представление преобразованного оператора в терминах обобщенных полиномов Белла. Явные выражения для преобразованных коэффициентов при $k = 0, \dots, N-1$ имеют вид

$$a_k[1] = a_k + \sum_{n=k+1}^N [a_n B_{n,n-k} + (a'_n - \sigma a_n) B_{n-1,n-1-k}], \quad (22)$$

$a_N[1] = a_N$. Подчеркнем, что для всего этого не требуется факторизации, поэтому можно оставить ненулевой остаток ($r \neq 0$).

2. ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ФОРМИНВАРИАНТНОСТЬ

Форминвариантность проявляется в выражении

$$L_\sigma M - M L_\sigma = [L_\sigma, M] = A = \sum_{i=0}^n A_i \partial^i, \quad (23)$$

если выбрать оператор A , который не изменяет вид $a_i \rightarrow a_i[i]$ как функции x . Например, он может определять матричную спектральную деформацию в смысле соотношения

$$L(L_\sigma \Psi) = (\lambda - [L_\sigma, M]) L_\sigma \Psi, \quad (24)$$

если коммутатор $[L_\sigma, M]$ – постоянная матрица.

Другой способ получения спектральных деформаций состоит в том, чтобы оставить ненулевой, но постоянный остаток r в выражении (9). Наши примеры относятся к случаю $N = 2$, поэтому нам будет полезно следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если коммутатор $[L_s, r] = \nu$ представляет собой постоянную матрицу, а матрица s – решение уравнения

$$a_0 + (a_1 s) + [a_2(s' + s^2)] = r, \quad (25)$$

то преобразование

$$\psi \rightarrow L_s \psi$$

расщепляет собственное значение λ оператора L собственными значениями матрицы $r + \nu$, или

$$(L_s M)(L_s \psi) = (\lambda - r - [L_s, r])(L_s \psi). \quad (26)$$

Далее, с учетом соотношения (9) факторизация

$$L^{(1)} = L_s M = (\partial - s)(a_1 + a_2 s + a_2 \partial) = a_2 \partial^2 + (a_1 + [a_2, s])\partial + a_2 s' - sa_1 - sa_2 s \quad (27)$$

определяет изоспектральное преобразование $ML_s \rightarrow L_s M$, если

$$r = a_0 + a_1 s + a_2(s' + s^2) = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим стационарную задачу $\partial_0 \sigma = 0$ для уравнения (19). Фиксируем разность

$$\tilde{L} - L = L_\sigma M - ML_\sigma = [L_\sigma, M], \quad (29)$$

явный вид которой определяется выражением (22). Будучи фиксированной, эта разность приводит к системе уравнений для σ и поэтому определяет класс потенциалов, если выполнено условие (18),

$$r' + [r, \sigma] = 0. \quad (30)$$

Простейший случай задается выбором

$$r = \rho I, \quad \rho' = 0. \quad (31)$$

При выборе $a'_2 = 0$, $[\partial, a_2] = 0$ общее ПД (22) дает

$$L[1] = L_\sigma M + r = a_2 \partial^2 + (a_1 + [a_2, \sigma])\partial + a_0 + a'_1 + 2a_2 \sigma' + [a_1, \sigma] + [a_2, \sigma]\sigma, \quad (32)$$

где σ – решение уравнения (25). Преобразования (32) и (27) совпадают, если $[s, a_2] = 0$, но уравнения для s и σ являются различными.

Чтобы использовать это наблюдение, выберем далее подпространство стационарной задачи

$$\varphi = \phi e^{Mt}, \quad (33)$$

тогда

$$L\phi = \phi M, \quad \sigma = \phi' \phi^{-1}. \quad (34)$$

Теперь матрица σ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{n=0}^N (a'_n B_n(\sigma) + a_n B_{n+1}(\sigma) - \sigma a_n B_n(\sigma)) = 0, \quad (35)$$

поскольку в (18) $\partial_0 \sigma = 0$.

Если снова $N = 2$, то формулы для обобщенных полиномов Белла (11)

$$B_3(\sigma) = B'_2(\sigma) + B_2(\sigma)\sigma = \sigma'' + 2\sigma'\sigma + \sigma\sigma' + \sigma^3, \quad B_2(\sigma) = \sigma' + \sigma^2, \quad (36)$$

приводят к соотношению

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^2 ((a'_n - \sigma a_n) B_n(\sigma) + a_n B_{n+1}(\sigma)) = \\ = a'_0 + [a_0, \sigma] + a'_1 \sigma + a_1 \sigma' + [a_1 \sigma] \sigma + a_2 \sigma'' + a_2 2\sigma' \sigma + [a_2, \sigma] \sigma' + [a_2 \sigma] \sigma^2 = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Если a_2 выбрано так, что $[\sigma, a_2] = 0$, то выражение (37) принимает вид

$$a'_0 + [a_0, \sigma] + a'_1 \sigma + a_1 \sigma' + [a_1, \sigma] \sigma + a_2 \sigma'' + 2a_2 \sigma' \sigma = 0. \quad (38)$$

Теперь применим сплетающее соотношение (17) к столбцу $\Psi = \psi e^{\lambda t}$ с (матричным в общем случае) параметром λ :

$$L_\sigma(\partial_0 - L)\Psi = (\partial_0 - \tilde{L})L_\sigma\Psi = L_\sigma(\psi\lambda - L\psi)e^{\lambda t} = (L_\sigma\psi\lambda - \tilde{L})e^{\lambda t}. \quad (39)$$

В результате получаем “стационарное” сплетающее соотношение

$$L_\sigma L\psi = \tilde{L}L_\sigma\psi \quad (40)$$

с “изоспектральным” свойством

$$\tilde{L}(L_\sigma\psi) = (L_\sigma\psi)\lambda. \quad (41)$$

Напомним снова, что преобразованный оператор $\tilde{L}$ определяется соотношением (22), а ϕ – решение уравнения (34), имеющее вид матрицы.

3. ИЛЛЮСТРАЦИЯ: МОДЕЛЬ ДИККЕ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ МОДЕЛИ

Проиллюстрируем наши наблюдения. Во-первых, рассмотрим модель Дикке [12] (которая интерпретируется как захваченный ион, взаимодействующий с движением центра масс, см. работу [5]) с гамильтонианом

$$H = N + \frac{\alpha(\sigma_0 + \sigma_3)}{2} + (\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^+) = -\frac{1}{2}\partial^2 + \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}\sigma_1 x + \alpha\sigma_0 + \frac{\alpha}{2}\sigma_3 \quad (42)$$

(ср. с выражением (32) при $N = \{-\partial_x^2 + x^2 + 1\}/2$, $a_2 = -1/2$, $a_1 = 0$).

Условие постоянства коммутатора (23)

$$-2s' = c \quad (43)$$

приводит к суперпотенциалу

$$s = -\frac{cx}{2} + d$$

и потенциалу

$$a_0 = r + \frac{s' + s^2}{2} = r - \frac{c}{4} + \frac{c^2 x^2}{8} - \frac{c dx}{2} + \frac{d^2}{2}, \quad (44)$$

совпадение которого с потенциалом в гамильтониане (42) определяет r , c и d , гарантирующие выполнение соотношения (30):

$$c = \pm 2, \quad -\frac{cd}{2} = \sqrt{2}\sigma_1, \quad r - \frac{c}{4} + \frac{d^2}{2} = \alpha\sigma_0 + \frac{\alpha}{2}\sigma_3.$$

Такое свойство гамильтониана (42) позволяет применить утверждение о деформациях (26).

Рассмотрим следующий пример: при ненулевом $a_1 = \beta i\sigma_2$ положим $s = \alpha_i \sigma_i$, тогда в результате получим периодические потенциалы. Условие постоянства коммутатора

$$-2s' + [a_1, s] = c \quad (45)$$

в случае диагональной матрицы c

$$-2\alpha'_i\sigma_i + i\beta\alpha_i[\sigma_2, \sigma_i] = c = c_0\sigma_0 + c_3\sigma_3 \quad (46)$$

дает систему

$$\begin{aligned} -2\alpha'_0 &= c_0, \\ -2\alpha'_2 &= 0, \\ -2\alpha'_1 + 2\beta\alpha_3 &= 0, \\ -2\alpha'_3 - 2\beta\alpha_1 &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{c_0x}{2}, \\ \alpha_2 &= \text{const}, \\ \alpha_3'' + \beta^2\alpha_3 &= 0, \\ \alpha_3 &= A \cos \beta x + B \sin \beta x, \quad \alpha_1 = A \sin \beta x - B \cos \beta x. \end{aligned} \quad (48)$$

Соответствующие потенциалы, порожденные формулой (10), даются матричными функциями

$$a_0 = r - (\beta i \sigma_2 s) + \frac{s' + s^2}{2}, \quad (49)$$

которые являются периодическими по x [14].

4. УРАВНЕНИЯ ОДЕВАНИЯ ЦЕПОЧКИ И ФОРМИНВАРИАНТНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

4.1. Вывод уравнения цепочки. Снова рассмотрим n -ю итерацию ПД для базового оператора (8), учитывая $a'_1 = 0$:

$$u_{n+1} = u_n + [a_1, \sigma_n] - 2\sigma'_n. \quad (50)$$

Известно, что скалярное ($[a_1, \sigma_n] = 0$; не матрица) уравнение одевания цепочки для σ_n [6] позволяет построить богатый набор потенциалов, включая конечнозонные потенциалы, а также соответствующие собственные состояния и решения задач Кортевега–де Фриза [6]. Учет спектрального сдвига для этого случая был предложен и рассмотрен в работах [15], [16], что соответствует случаю ненулевого остатка. Также подчеркивается, что уравнение цепочки представляет собой задачу, эквивалентную спектральной задаче для исходного уравнения (гамильтонова в нашем случае) [15]. Такое представление спектральной задачи позволяет классифицировать потенциалы с помощью выбора замыкания цепочки. Знаменитый класс форминвариантных потенциалов занимает определенное место в этой классификации путем простого выбора вида (формы) “суперпотенциалов” σ_n для произвольного n , как это было показано, например, в работе [17].

“Связь Миуры” для ненулевого остатка $r = \mu_n \neq 0$ в формуле для факторизации при $a_2 = -1$ имеет вид

$$u_n + (a_1\sigma_n) - (\sigma'_n + \sigma_n^2) = \mu_n. \quad (51)$$

Она исключает потенциалы u_n в ПД, оставляя только “суперпотенциалы” σ_n . Обратим внимание на дополнительные члены в выражениях (50) и (51), возникновение которых связано с ненулевым некоммутирующим коэффициентом a_1 в базовом операторе. Имеем выражение

$$\sigma'_{n+1} + \sigma'_n = \sigma_n^2 - \sigma_{n+1}^2 + a_1\sigma_{n+1} - \sigma_n a_1 + \mu_n - \mu_{n+1}, \quad (52)$$

которое является неабелевым аналогом уравнения одевания цепочки из работ [6], [15]. Общий вид этого уравнения для неабелевых элементов требует продвинутых методов исследования даже в случае (2×2) -матриц, когда моделируется простейшая атомная материя с двумя состояниями.

4.2. Форминвариантные суперпотенциалы: $\sigma_n = \eta_n a(x) + \xi_n$. Зафиксируем форму “суперпотенциалов” так, как это было сделано в работе [15]:

$$\sigma_n = \eta_n a(x) + \xi_n, \quad (53)$$

но с неабелевыми η_n, ξ_n . Такой выбор приводит к уравнению типа уравнения Рикати для функции $a(x)$:

$$\begin{aligned} (\eta_n + \eta_{n+1})a' &= (\eta_n^2 - \eta_{n+1}^2)a^2 + (\{\eta_n, \xi_n\} - \{\eta_{n+1}, \xi_{n+1}\} + a_1\eta_{n+1} - \eta_n a_1)a + \\ &+ a_1\xi_{n+1} - \xi_n a_1 + \xi_n^2 - \xi_{n+1}^2 + \mu_n - \mu_{n+1}, \end{aligned} \quad (54)$$

которое в случае $a_1 = 0$, как известно, имеет вид, тождественный виду скалярного уравнения из работ [6], [15], а для диагональных матриц дает задачи гармонического осциллятора, Пёшля–Теллера, Кулона, а также солитонный потенциал с соответствующими решениями с дискретным спектром. Подчеркнем, что $a(x)$ не является матрицей.

Начнем со случая

$$\eta_n + \eta_{n+1} = 0, \quad (55)$$

что дает

$$0 = [\{\eta_n, \xi_n\} - \{\eta_{n+1}, \xi_{n+1}\} + a_1\eta_{n+1} - \eta_n a_1]a + a_1\xi_{n+1} - \xi_n a_1 + \xi_n^2 - \xi_{n+1}^2 + \mu_n - \mu_{n+1}, \quad (56)$$

или тривиальную константу a (постоянные матричные потенциалы).

Рассмотрим случай ненулевого значения $\eta_n + \eta_{n+1}$. Линейная по x функция

$$\sigma_n = \eta_n x + \xi_n \quad (57)$$

могла бы воспроизводить модели, связанные с моделью Джейнса–Каммингса, поэтому их необходимо должным образом исследовать. Единственная возможность избавиться от высших степеней x состоит в том, чтобы положить

$$\eta_n^2 - \eta_{n+1}^2 = 0, \quad (58)$$

что дает нам четыре варианта (см. выражения (П.2) и (П.3) в приложении). Первые два из них (П.2) можно записать в матричном виде:

$$\eta_{n+1} = \pm \eta_n, \quad (59)$$

обозначим их $I_{\pm}$. Второй случай (I_-) в формуле (59) воспроизводит соотношение (55), а первый, $\eta_{n+1} = \eta_n = \eta$, дает

$$2\eta a' = (\{\eta, \xi_n - \xi_{n+1}\} + [a_1, \eta])a + a_1\xi_{n+1} - \xi_n a_1 + \xi_n^2 - \xi_{n+1}^2 + \mu_n - \mu_{n+1}. \quad (60)$$

Случай (57) означает, что

$$\begin{aligned} \{\eta, \xi_n - \xi_{n+1}\} + [a_1, \eta] &= 0, \\ 2\eta &= a_1\xi_{n+1} - \xi_n a_1 + \xi_n^2 - \xi_{n+1}^2 + \mu_n - \mu_{n+1}. \end{aligned} \quad (61)$$

Подставляя выражения для η , ξ_n , ξ_{n+1} из приложения в (61), получаем

$$2[\beta_0(\gamma_i - \delta_i) + \beta_i(\gamma_0 - \delta_0)]\sigma_i + 2\beta_\nu(\gamma_\nu - \delta_\nu) + 2i\beta'(-\beta_1\sigma_3 + \beta_3\sigma_1) = 0, \quad (62)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} \beta_\nu(\gamma_\nu - \delta_\nu) &= 0, \\ \beta_0(\gamma_1 - \delta_1) + \beta_1(\gamma_0 - \delta_0) + i\beta'\beta_3 &= 0, \\ \beta_0(\gamma_2 - \delta_2) + \beta_2(\gamma_0 - \delta_0) &= 0, \\ \beta_0(\gamma_3 - \delta_3) + \beta_3(\gamma_0 - \delta_0) - i\beta'\beta_1 &= 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Это позволяет выразить δ_μ как функцию γ , η и, таким образом, решить первое матричное рекуррентное соотношение в (61). А именно, уравнения

$$\begin{aligned} \gamma_1 - \delta_1 &= -\frac{\beta_1(\gamma_0 - \delta_0) + i\beta'\beta_3}{\beta_0}, \\ \gamma_2 - \delta_2 &= -\frac{\beta_2(\gamma_0 - \delta_0)}{\beta_0}, \\ \gamma_3 - \delta_3 &= -\frac{\beta_3(\gamma_0 - \delta_0) - i\beta'\beta_1}{\beta_0}, \\ (\beta_0^2 - \beta_i^2)(\gamma_0 - \delta_0) &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

дают два решения:

1) I_+ :

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \gamma_0, \\ \delta_1 &= \gamma_1 + \frac{i\beta'\beta_3}{\beta_0}, \\ \delta_2 &= \gamma_2, \\ \delta_3 &= \gamma_3 - \frac{i\beta'\beta_1}{\beta_0}. \end{aligned} \quad (65)$$

2) I_- : $\beta_0 = \pm\sqrt{\beta_i^2}$, $\delta_0 - \gamma_0 \equiv \epsilon$ – свободный параметр, и связи

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \gamma_0 + \epsilon, \\ \delta_1 &= \gamma_1 + \frac{\beta_1\epsilon + i\beta'\beta_3}{\beta_0}, \\ \delta_2 &= \gamma_2 + \frac{\beta_2\epsilon}{\beta_0}, \\ \delta_3 &= \gamma_3 + \frac{\beta_3\epsilon - i\beta'\beta_1}{\beta_0} \end{aligned} \quad (66)$$

вместе со связями (65) следует подставить во второе из уравнений (61). Оба они принимают вид $\xi_{n+1} = \xi_n + p$, но с разными матрицами p . Это приводит к

$$2\eta = [a_1, \xi_n] + a_1 p - \{\xi_n, p\} - p^2 + \mu_n - \mu_{n+1}. \quad (67)$$

Использование тождеств из приложения дает

$$2\beta_\nu \sigma_\nu = \beta' [p_0 \sigma_2 - i(p_1 + 2\gamma_1) \sigma_3 + p_2 \sigma_0 + i(p_3 + 2\gamma_3) \sigma_1] - \\ - 2[p_0 \gamma_i + p_i(\gamma_0 + p_0)] \sigma_i - (p_\nu + 2\gamma_\nu) p_\nu + \mu_n - \mu_{n+1}, \quad (68)$$

или для базисных элементов σ_i , $i = 1, 2, 3$, определяет рекуррентные соотношения

$$2\beta_1 = i\beta'(p_3 + 2\gamma_3) - 2(p_0 \gamma_1 + p_1(\gamma_0 + p_0)), \\ 2\beta_2 = \beta' p_0 - 2[p_0 \gamma_2 + p_2(\gamma_0 + p_0)], \\ 2\beta_3 = -i(p_1 + 2\gamma_1) - 2[p_0 \gamma_3 + p_3(\gamma_0 + p_0)], \quad (69)$$

причем при $\nu = 0$ для спектра μ_n получаем уравнение

$$2\beta_0 = \beta' p_2 + (p_\nu + 2\gamma_\nu) p_\nu + \mu_n - \mu_{n+1}. \quad (70)$$

Начнем с первого решения (I_+), соответствующего случаю (II.2), когда

$$p_0 = 0, \\ p_1 = \frac{i\beta'\beta_3}{\beta_0}, \\ p_2 = 0, \\ p_3 = -\frac{i\beta'\beta_1}{\beta_0}. \quad (71)$$

В результате получаем связи

$$2\beta_1 = i\beta' \left(-\frac{i\beta'\beta_1}{\beta_0} + 2\gamma_3 \right) - \frac{2\gamma_0 i\beta'\beta_3}{\beta_0}, \\ 2\beta_2 = 0, \\ 2\beta_3 = -i \left(\frac{i\beta'\beta_3}{\beta_0} + 2\gamma_1 \right) + \frac{2i\beta'\beta_1\gamma_0}{\beta_0}, \quad (72)$$

которые в действительности являются связями, наложенными на ξ_n , η :

$$\gamma_1 = -\frac{i\beta'\beta_3}{2\beta_0} + i\beta_3 + \frac{\beta'\beta_1\gamma_0}{\beta_0}, \\ \gamma_3 = -\frac{i\beta_1}{\beta'} + \frac{i\beta'\beta_1}{2\beta_0} + \frac{\gamma_0\beta_3}{\beta_0}, \quad (73)$$

такими, что $\beta_i = 0$, а собственные значения

$$\mu_{n+1} = \mu_n - 2\beta_0 + \left(\frac{i\beta'\beta_3}{\beta_0} + 2\gamma_1 \right) \frac{i\beta'\beta_3}{\beta_0} + i \left(\frac{i\beta'\beta_1}{\beta_0} - 2\gamma_3 \right) \frac{\beta'\beta_1}{\beta_0}, \quad (74)$$

являющиеся линейными функциями γ_0 , дают эквидистантный спектр.

Второй (I_+) случай (II.3) характеризуется разностью $p_n = \xi_{n+1} - \xi_n$:

$$\begin{aligned} p_0 &= \epsilon, \\ p_1 &= \frac{\beta_1 \epsilon + i\beta' \beta_3}{\beta_0}, \\ p_2 &= \frac{\beta_2 \epsilon}{\beta_0}, \\ p_3 &= \frac{\beta_3 \epsilon - i\beta' \beta_1}{\beta_0}, \end{aligned} \quad (75)$$

индекс n опущен. Подставляя формулы (75) в выражения (69) и (70), получаем связи

$$\begin{aligned} 2\beta_1 &= i\beta' \left(\frac{\beta_3 \epsilon - i\beta' \beta_1}{\beta_0} + 2\gamma_3 \right) - 2(\epsilon\gamma_1 + (\gamma_0 + \epsilon) \frac{\beta_1 \epsilon + i\beta' \beta_3}{\beta_0}), \\ 2\beta_2 &= \beta' \epsilon - 2 \left[\epsilon\gamma_2 + (\gamma_0 + \epsilon) \frac{\beta_2 \epsilon}{\beta_0} \right], \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} 2\beta_3 &= -i \left(\frac{\beta_1 \epsilon + i\beta' \beta_3}{\beta_0} + 2\gamma_1 \right) - 2 \left[\epsilon\gamma_3 + (\gamma_0 + \epsilon) \frac{\beta_3 \epsilon - i\beta' \beta_1}{\beta_0} \right], \\ 2\beta_0 &= \frac{\beta' \beta_2 \epsilon}{\beta_0} + (\epsilon + 2\gamma_0)\epsilon + (p_i + 2\gamma_i)p_i + \mu_n - \mu_{n+1}. \end{aligned} \quad (77)$$

Соотношения (75) принимают вид

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= n\epsilon + \gamma_{00}, \\ \gamma_1 &= n \frac{\beta_1 \epsilon + i\beta' \beta_3}{\beta_0} + \gamma_{10}, \\ \gamma_2 &= n \frac{\beta_2 \epsilon}{\beta_0} + \gamma_{20}, \\ \gamma_3 &= n \frac{\beta_3 \epsilon - i\beta' \beta_1}{\beta_0} + \gamma_{30}. \end{aligned} \quad (78)$$

Подставляя выражения (78) в соотношения (76), получаем

$$\begin{aligned} 2\beta_1 &= i\beta' \left(\frac{\beta_3 \epsilon - i\beta' \beta_1}{\beta_0} + 2 \left[n \frac{\beta_3 \epsilon - i\beta' \beta_1}{\beta_0} + \gamma_{30} \right] \right) - \\ &\quad - 2 \left(\epsilon \left[n \frac{\beta_1 \epsilon + i\beta' \beta_3}{\beta_0} + \gamma_{10} \right] + (n\epsilon + \gamma_{00} + \epsilon) \frac{\beta_1 \epsilon + i\beta' \beta_3}{\beta_0} \right), \\ 2\beta_2 &= \beta' \epsilon - 2 \left[\epsilon \left(n \frac{\beta_2 \epsilon}{\beta_0} + \gamma_{20} \right) + (n\epsilon + \gamma_{00} + \epsilon) \frac{\beta_2 \epsilon}{\beta_0} \right], \\ 2\beta_3 &= -i \left(\frac{\beta_1 \epsilon + i\beta' \beta_3}{\beta_0} + 2 \left[n \frac{\beta_1 \epsilon + i\beta' \beta_3}{\beta_0} + \gamma_{10} \right] \right) - \\ &\quad - 2 \left[\epsilon \left[n \frac{\beta_3 \epsilon - i\beta' \beta_1}{\beta_0} + \gamma_{30} \right] + (n\epsilon + \gamma_{00} + \epsilon) \frac{\beta_3 \epsilon - i\beta' \beta_1}{\beta_0} \right], \end{aligned} \quad (79)$$

что должно выполняться при произвольных n . Связи приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} 0 &= i\beta'[\beta_3\epsilon - i\beta'\beta_1] - 2\epsilon[\beta_1\epsilon + i\beta'\beta_3], \\ 0 &= -2\epsilon(\beta_2\epsilon) + \epsilon\beta_2\epsilon, \\ 0 &= -i[\beta_1\epsilon + i\beta'\beta_3] - 2\epsilon[\beta_3\epsilon - i\beta'\beta_1], \end{aligned} \quad (80)$$

что дает $\beta_2 = 0$ и позволяют связать β_1 и β_3 в случае I_+ двумя различными способами:

- а) $\epsilon = \pm\beta', \beta_3 = \pm i\beta_1$;
- б) $\epsilon = \pm\sqrt{\beta'}/2, \beta_3 = \pm i\beta_1(1 - 2\beta')/\sqrt{\beta'}$.

Соотношение между β_i определяет матрицы $\eta = \beta_\mu\sigma_\mu$ и ξ_n . Поэтому потенциалы будут иметь вид

$$u_n = \mu_n + \eta + \eta^2 x^2 + (\{\eta, \xi_n\} - a_1\eta)x + \xi_n^2 - a_1\xi_n, \quad (81)$$

фиксированный соотношением (51). Напомним, что явный вид $\beta_0 = \pm\sqrt{\sum_i \beta_i^2}$ фиксирован условием 2, η задается формулой (II.1) в приложении. Этот случай содержит модель Тэйвиса–Каммингса [5].

Общее выражение для спектра

$$\mu_{n+1} = \mu_n + (\epsilon + 2n\epsilon + \gamma_{00})\epsilon + (p_1 + 2\gamma_1)p_1 + (p_2 + 2\gamma_3)p_3 \quad (82)$$

демонстрирует квадратичную зависимость от n .

Для случая $a_1 \neq 0$, где $a(x)$ – матрица, имеются прямые обобщения.

4.3. Подстановка Коула–Хопфа. Подстановка Коула–Хопфа в выражение (54) в следующей комбинации со скейлингом s :

$$a = s\phi'\phi^{-1}, \quad (83)$$

которая сокращает квадратичный член, если

$$s\sigma_0 = (\eta_n + \eta_{n+1})(\eta_n^2 - \eta_{n+1}^2)^{-1},$$

дает линейное уравнение

$$\begin{aligned} \phi'' &= (\eta_n + \eta_{n+1})^{-1}[\{\eta_n, \xi_n\} - \{\eta_{n+1}, \xi_{n+1}\} + \eta_{n+1}a_1 - \eta_na_1]\phi' + \\ &+ s^{-1}(\eta_n + \eta_{n+1})^{-1}[a_1\xi_{n+1} - \xi_na_1 + \eta_n\xi_n - \eta_{n+1}\xi_{n+1} + \mu_n - \mu_{n+1}]\phi. \end{aligned}$$

Учитывая характер ϕ и s (матрицы, пропорциональные σ_0), положим

$$\begin{aligned} (\eta_n + \eta_{n+1})^{-1}[\{\eta_n, \xi_n\} - \{\eta_{n+1}, \xi_{n+1}\} + \eta_{n+1}a_1 - \eta_na_1] &= \alpha\sigma_0, \\ s^{-1}(\eta_n + \eta_{n+1})^{-1}[a_1\xi_{n+1} - \xi_na_1 + \eta_n\xi_n - \eta_{n+1}\xi_{n+1} + \mu_n - \mu_{n+1}] &= \beta\sigma_0 \end{aligned} \quad (84)$$

и получим

$$i\phi'' = \alpha\phi' + \beta\phi. \quad (85)$$

С помощью этого уравнения, которое имеет линейно независимые решения $\phi = C_i e^{k_i x}$, мы получаем матричные потенциалы типа матричных потенциалов Пёшля–Теллера или, в вырожденном случае $\phi = Cx e^{kx}$, известные случаи $1/x$ и гармонического осциллятора, как было упомянуто в работе [15].

Например, в случае коммутирующих η_n получаем факторизацию типа

$$(\eta_n + \eta_{n+1})[1 + (\eta_n - \eta_{n+1})s] = 0.$$

Продолжая рассмотрение в случае ненулевого $\eta_n + \eta_{n+1}$, получаем последовательность диагональных η_n :

$$\eta_{n+1} = \eta_n + s^{-1}, \quad \eta_n = ns^{-1} + \eta_0. \quad (86)$$

Условия

$$\begin{aligned} (2\eta_n + s^{-1})^{-1}[\{\eta_n, \xi_n\} - \{(\eta_n + s^{-1}), \xi_{n+1}\} + (\eta_n + s^{-1})a_1 - \eta_n a_1] &= \alpha\sigma_0, \\ a_1\xi_{n+1} - \xi_n a_1 + \eta_n \xi_n - (\eta_n + s^{-1})\xi_{n+1} + \mu_n - \mu_{n+1} &= \beta(2s\eta_n + \sigma_0) \end{aligned} \quad (87)$$

анализируются на основании тождеств из приложения, что завершает рассмотрение.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что важный вывод прямых формул одевания и метода цепочечных уравнений эффективно развивается путем комбинирования калибровочного преобразования и ПД: в работе [18] рассматривается уравнение Гегенбауера. В этой же работе непосредственно задействованы конечно-разностная деформация и q -деформация (например, Q -осцилляторы).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представление цепочек в виде базиса матриц Паули

Пусть

$$\eta_n = \alpha_\mu \sigma_\mu, \quad \eta_{n+1} = \beta_\mu \sigma_\mu, \quad \xi_n = \gamma_\mu \sigma_\mu, \quad \xi_{n+1} = \delta_\mu \sigma_\mu, \quad (\text{П.1})$$

где σ_μ – матрицы Паули (σ_0 – единичная матрица), по $\mu = 0, 1, 2, 3$ проводится суммирование, а у величин $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ предполагается наличие индекса n .

Сначала решим условие (58) (в последнем слагаемом и во всем приложении также предполагается суммирование по $i = 1, 2, 3$); получим

$$\eta_n^2 = (\alpha_\mu \sigma_\mu)^2 = \sum_{i=1}^3 (\alpha_i^2 + 2\alpha_i \alpha_0 \sigma_i) + \alpha_0^2 = \eta_{n+1}^2 = \beta_i(\beta_i + 2\beta_0 \sigma_i) + \beta_0^2 = \beta_\nu \beta_\nu + 2\beta_0 \beta_i \sigma_i$$

относительно α_μ . В результате получаем четыре корня, два из которых являются типичными для нематричного случая:

$$\alpha_0 = \pm\beta_0, \quad \alpha_i = \pm\beta_i, \quad (\text{П.2})$$

а два других – типичными для матриц:

$$\alpha_0 = \pm b, \quad \alpha_i = \pm \frac{\beta_i \beta_0}{b}, \quad (\text{П.3})$$

где $b^2 = \sum \beta_i^2$.

Антикоммутаторы вида

$$\{\eta_{n+1}, \xi_{n+1}\} = \beta_\mu \delta_\nu \{\sigma_\mu, \sigma_\nu\} = 2(\beta_0 \delta_i + \beta_i \delta_0) \sigma_i + 2\beta_\nu \delta_\nu \quad (\text{П.4})$$

входят в уравнения (54), (62). Выражение для коммутатора $[a_1, \eta]$ определяется выбором a_1 . Пусть $a_1 = \sqrt{2} i \beta \sigma_2 \equiv \beta' \sigma_2$, как в выражении (7). Тогда

$$[a_1, \eta] = \beta' \beta_\mu [\sigma_2, \sigma_\mu] = 2i\beta' (-\beta_1 \sigma_3 + \beta_3 \sigma_1). \quad (\text{П.5})$$

Запишем также

$$a_1 p = \beta' \sigma_2 p_\mu \sigma_\mu = \beta' [p_0 \sigma_2 - i p_1 \sigma_3 + p_2 \sigma_0 + p_3 i \sigma_1]. \quad (\text{П.6})$$

Благодарности. Работа частично поддержана Министерством научных исследований и информационных технологий Польши (грант № PZB-Min-008/PO3/2003).

Список литературы

- [1] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali et al., *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1996), 1800.
- [2] A. Miyake, M. Wadati, *Phys. Rev. A*, **64** (2001), 042317.
- [3] R. Bonifacio, S. Olivares, P. Tombesi, D. Vitali, *Phys. Rev. A*, **61** (2000), 053802.
- [4] B. Samsonov, J. Negro, *J. Phys. A*, **37** (2004), 10115; [quant-ph/0401092](#).
- [5] A. Kundu, *J. Phys. A*, **37** (2004), L281.
- [6] J. Weiss, *J. Math. Phys.*, **27** (1986), 2647.
- [7] V. B. Matveev, *Lett. Math. Phys.*, **3** (1979), 213; В. Б. Матвеев, *Алгеброгеометрические и алгебраические методы интегрирования нелинейных уравнений типа КдФ*, Дисс. . . . докт. физ.-матем. наук, ЛГУ, Л., 1981.
- [8] V. M. Goncharenko, A. P. Veselov, *J. Phys. A*, **31** (1998), 5315.
- [9] A. A. Zaitsev, S. B. Leble, *Rep. Math. Phys.*, **46** (2000), 165.
- [10] С. Б. Лебле, *ТМФ*, **128**:1 (2001), 65.
- [11] C. F. Lo, *Nuovo Cimento D*, **19** (1997), 749; *Eur. Phys. J. D*, **1** (1998), 93.
- [12] C. Emary, T. Brandes, *Phys. Rev. E*, **67** (2003), 066203.
- [13] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51** (1963), 89.
- [14] H. R. Jauslin, S. Guérin, S. Thomas, *Phys. A*, **279** (2000), 432.
- [15] A. B. Shabat, *Inverse Problems*, **8** (1992), 303.
- [16] А. П. Веселов, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прилож.*, **27**:2 (1993), 1.
- [17] C. V. Sukumar, *J. Phys. A*, **37** (2004), 10287.
- [18] M. Salle, *Darboux autotransformations: special functions and q-commutations*, Preprint CSMAE, St.-Petersburg, 1993.