Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж.-Х. Ли, О. К. Пашаев, Солитонные решения резонансного нелинейного уравнения Шредингера с нетривиальными граничными условиями и билинейный метод Хироты, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 1, 133–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6075>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:16:03

© 2007 г.

Дж.-Х. Ли*, О. К. Пашаев†

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ РЕЗОНАНСНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НЕТРИВИАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И БИЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД ХИРОТЫ

В рамках билинейного метода Хироты рассмотрены физически значимые солитонные решения резонансного нелинейного уравнения Шредингера с нетривиальными граничными условиями, которое было недавно предложено для описания осесимметричных волн в холодной бесстолкновительной плазме. С помощью представления Маделунга модель преобразуется в являющуюся аналогом нелинейного уравнения Шредингера систему реакции-диффузии, для которой исследуются билинейное представление, солитонные решения и их взаимодействия.

Ключевые слова: резонансное нелинейное уравнение Шредингера, квантовый потенциал, холодная плазма, магнитоакустические волны, солитоны, метод Хироты.

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно для описания гравитации в низких размерностях (модель Джакива–Тейтельбойма) и отклика среды на действие квазимонохроматической волны с комплексной амплитудой $\psi(x, t)$, которая является медленно меняющейся функцией координат и времени, был предложен следующий новый интегрируемый вариант нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [1]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\Lambda}{4} |\psi|^2 \psi = s \frac{1}{|\psi|} \frac{\partial^2 |\psi|}{\partial x^2} \psi. \quad (1)$$

Это уравнение было названо *резонансным нелинейным уравнением Шредингера* (РНУШ). Оно может рассматриваться как третий вариант НУШ, промежуточный между дефокусирующим и фокусирующим случаями. Несмотря на то что модель РНУШ является интегрируемой для любого значения параметра s , критическое значение $s = 1$ разделяет две области значений этого параметра, в которых модель

*Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, 11529, Taiwan

†Department of Mathematics, Izmir Institute of Technology, Urla-Izmir, 35430, Turkey.
E-mail: oktaypashaev@iyte.edu.tr

ведет себя по-разному. При $s < 1$ модель сводится к обычному НУШ, однако при $s > 1$ она к обычному НУШ не сводится, а сводится к системе реакции-диффузии (РД). В этом случае модели свойственны резонансные солитонные явления [1].

РНУШ может интерпретироваться, в частности, как уравнение, описывающее распространение солитонов НУШ в так называемом *квантовом потенциале* $U_Q(x) = |\psi|_{xx}/|\psi|$. Этот потенциал, отвечающий за возникновение квантового поведения, был введен де Бройлем [2] и использован впоследствии Бомом [3] при разработке теории скрытых параметров в квантовой механике. Он появляется также в стохастической механике [4]. Связи между такими неклассическими движениями с *внутренним* спиновым движением и шредингеровским дрожанием (*zitterbewegung*) рассматривались в ряде работ (см. [5]). Квантовые потенциалы появляются также в предложенных нелинейных расширениях квантовой механики, связанных как со стохастическим квантованием [6], [7], так и с поправками, обусловленными квантовой гравитацией [8]. Было отмечено, что РНУШ, подобно обычному НУШ, может также быть выведено в рамках капиллярных моделей [9], [10].

В работе [11] было показано, что РНУШ появляется в задачах физики плазмы, где оно описывает распространение длинных одномерных магнитоакустических волн в холодной бесстолкновительной плазме, находящейся под действием поперечного магнитного поля. Удовлетворяющая РНУШ комплексная волновая функция представляет собой комбинацию плотности плазмы и потенциала скоростей, как в представлении Маделунга. Для построения решений, описывающих взаимодействие солитонных магнитоакустических волн, были предложены и использованы преобразования Беклунда–Дарбу вместе с новым ассоциированным нелинейным принципом суперпозиции. Такой подход требует рассмотрения решений РНУШ с нетривиальными граничными условиями на бесконечности. Цель настоящей работы – построить такие решения с помощью билинейного метода Хироты и исследовать их взаимодействия.

2. МАГНИТОАКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Уравнения динамики двухкомпонентной холодной бесстолкновительной плазмы во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}$ [12], [13] для случая осесимметричного движения плазмы

$$\mathbf{u} = u(x, t)\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{B} = B(x, t)\mathbf{e}_z \quad (2)$$

сводятся к виду [14]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{B}{\rho} \frac{\partial B}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial B}{\partial x} \right) &= B - \rho, \end{aligned} \quad (3)$$

где мы положили $B = 1$ и плотность плазмы $\rho = 1$ на бесконечности. Эта система, эквивалентная системе Уизема, была также получена Гуревичем и Мещеркиным [15]. Она описывает распространение нелинейных магнитоакустических волн

в холодной плазме, находящейся в поперечном магнитном поле. Эль, Ходоровский и Тюрина показали [16], что система типа (3) появляется также при рассмотрении гиперзвукового потока, возникающего за телом тонкого профиля.

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Рассмотрим приближение мелкой воды для магнитоакустической системы (3). Изменяя масштаб пространственной и временной переменных следующим образом: $x' = \beta x$, $t' = \beta t$, имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'}(\rho u) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{B}{\rho} \frac{\partial B}{\partial x'} = 0, \quad (5)$$

$$\beta^2 \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial B}{\partial x'} \right) = B - \rho. \quad (6)$$

Разлагая B в степенной ряд по параметру β^2 :

$$B = \rho + \beta^2 b_2(\rho, \rho_{x'}, \rho_{x'x'}, \dots) + O(\beta^4), \quad (7)$$

и подставляя в уравнение (6), имеем

$$b_2 = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x'} \right). \quad (8)$$

Подстановка разложения (7) в уравнение (5) дает

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial \rho}{\partial x'} + \beta^2 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x'^3} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x'} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x'^2} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x'} \right)^3 \right] = 0 \quad (9)$$

с точностью до членов порядка $O(\beta^2)$ включительно. В результате имеем следующую систему:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'}(\rho u) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial \rho}{\partial x'} + \beta^2 \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x'^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x'} \right)^2 \right] = 0. \quad (11)$$

Данная система описывает распространение длинных магнитоакустических волн в холодной плазме плотности ρ ,двигающихся со скоростью u поперек магнитного поля, заданного формулами (2), (7) (см. [17], [18]). Дисперсия в этой системе отрицательна, т.е. волновая скорость уменьшается с увеличением волнового числа k .

4. РЕЗОНАНСНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Вводя потенциал скоростей

$$S(x, t) = -\frac{1}{2} \int^x u(x', t) dx',$$

так что $u = -2\partial S/\partial x$, и интегрируя один раз уравнение (11), получаем систему

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0, \quad (12)$$

$$-\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho + \frac{\beta^2}{2} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \quad (13)$$

(штрихи опущены). Объединяя величины ρ и S в одну комплексную функцию

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{-iS}, \quad (14)$$

систему (12), (13) можно представить как НУШ с квантовым потенциалом,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi = (1 + \beta^2) \frac{1}{|\psi|} \frac{\partial^2 |\psi|}{\partial x^2} \psi, \quad (15)$$

т.е. как РНУШ (1), где $\Lambda = -2$, $s = 1 + \beta^2$ и использовано следующее выражение для квантового потенциала:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 = 2 \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}. \quad (16)$$

Поскольку параметр $s > 1$, уравнение (15) не может быть преобразовано в НУШ [1]. Однако посредством объединения величин ρ и S в пару вещественных функций

$$e^{(+)} = \sqrt{\rho} e^{S/\beta}, \quad e^{(-)} = -\sqrt{\rho} e^{-S/\beta}, \quad (17)$$

так что $e^{(+)} > 0$, $e^{(-)} < 0$, уравнения (12), (13) могут быть записаны в виде системы РД

$$\mp \frac{\partial e^{(\pm)}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 e^{(\pm)}}{\partial x'^2} - \frac{1}{2\beta^2} e^{(+)} e^{(-)} e^{(\pm)} = 0, \quad (18)$$

где $\tau = \beta t'$.

Линеаризуя уравнение (15) вблизи решения конденсатного типа $\psi = \sqrt{\rho_0} e^{-i\rho_0 t/2}$, получаем дисперсию $\omega = \sqrt{\rho_0} k \sqrt{1 - \beta^2 k^2 / \rho_0}$. Эта дисперсия отрицательна, т.е. волновая скорость уменьшается с увеличением волнового числа k , и ведет к неустойчивости коротких волн с волновым числом $k > k_{\text{cr}}$, где $k_{\text{cr}} = \sqrt{\rho_0}/\beta$. Однако такая неустойчивость является результатом усечения дисперсионного соотношения

$$\omega^2 = \rho_0 \frac{k^2}{1 + \beta^2 k^2 / \rho_0} \quad (19)$$

для системы (4)–(6) и не соответствует никакому реальному физическому эффекту для волн на мелкой воде [19]. Хотя эта система линейно устойчива для всех значений волнового числа k , неизвестно, является ли она интегрируемой. Поэтому она не так подходит для изучения взаимодействий, как РНУШ, которое является вполне интегрируемым и обладает богатой совокупностью точных решений.

5. СТАЦИОНАРНЫЙ ПОТОК И СОЛИТОНЫ

Рассмотрим теперь систему (10), (11) для стационарного потока. Она описывает движение с фиксированной скоростью $u(x, t) = u_0 = \text{const}$, для которой из уравнения непрерывности (10) следует, что $\partial \rho / \partial t + u_0 \partial \rho / \partial x = 0$ или что плотность жидкости имеет вид бегущей волны $\rho = \rho(x - u_0 t)$, где $x' = \beta x$, $t' = \beta t$. Уравнение (11) в этом случае дает

$$\rho + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \right] = a = \text{const}. \quad (20)$$

Последнее уравнение имеет простую физическую интерпретацию. Движение с постоянной скоростью означает, что сумма всех сил, действующих на систему, равна нулю. В нашем случае уравнение (20) описывает компенсацию нелинейности за счет квантового потенциала. С учетом (16) это уравнение дает

$$\rho + 2 \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} = a. \quad (21)$$

Тогда в переменных $y(z) = \sqrt{\rho}$, $z = x - u_0 t$ имеем нелинейное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{a}{2} y + \frac{1}{2} y^3 = 0, \quad (22)$$

или, умножая на y' и один раз интегрируя,

$$\left(\frac{dy}{dz} \right)^2 - \frac{a}{2} y^2 + \frac{1}{4} y^4 = 2b = \text{const}. \quad (23)$$

Это уравнение имеет решение

$$y = 2p \operatorname{dn}[p(x - u_0 t), \kappa], \quad (24)$$

где dn – эллиптическая функция Якоби с модулем κ , а p – произвольная константа, которая связана с константами интегрирования $a > 0$ и $b < 0$ соотношениями

$$\frac{a}{2p^2} = 1 + \kappa'^2, \quad \frac{b}{2p^4} = -\kappa'^2, \quad (25)$$

в которых $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$ – дополнительный модуль эллиптической функции Якоби. Эти соотношения определяют связь между константами интегрирования

$$a = 2p^2 \left(1 - \frac{b}{2p^4} \right) \quad (26)$$

и модуль $\kappa = \sqrt{1 + b/(2p^4)}$. Тогда для плотности ρ имеем решение вида бегущей волны

$$\rho(x, t) = 4p^2 \operatorname{dn}^2[p(x - u_0 t), \kappa]. \quad (27)$$

При фиксированном потенциале (21) из уравнения (13) для $u_0 = -(2/\beta)\partial S/\partial x$ имеем уравнение Гамильтона–Якоби

$$-\frac{1}{\beta}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{a}{2} = 0, \quad (28)$$

которое имеет решение вида

$$S = \beta \left[S_0 - \frac{u_0}{2}x + \left(\frac{u_0^2}{4} + \frac{a}{2} \right) t \right], \quad (29)$$

или, с учетом (26),

$$S = \beta \left[S_0 - \frac{u_0}{2}x + \left(\frac{u_0^2}{4} + p^2(2 - \kappa^2) \right) t \right]. \quad (30)$$

В вырожденном случае $\kappa = 1$, который отвечает случаю $b = 0$ и, следовательно, $a = 2p^2$, эллиптическое решение (27), (30) превращается в солитон

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= 4p^2 \operatorname{sch}^2[p(x - u_0 t)], \\ S &= \beta \left[S_0 - \frac{u_0}{2}x + \left(\frac{u_0^2}{4} + p^2 \right) t \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Бегущая волна более общего вида возникает при рассмотрении решения системы (10), (11) вида $u(x, t) = u(x - u_0 t)$, $\rho(x, t) = \rho(x - u_0 t)$. В таком случае уравнение (10) влечет $d[(u - u_0)\rho]/dz = 0$, где $z = x - u_0 t$, и

$$u = u_0 + \frac{C}{\rho}, \quad (32)$$

где $C = \text{const}$. Подставляя (32) в уравнение (11) и один раз интегрируя, имеем

$$\frac{1}{2} \frac{C^2}{\rho^2} + \rho + \left[\frac{1}{\rho} \frac{d^2 \rho}{dz^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)^2 \right] = A = \text{const}. \quad (33)$$

Умножая на ρ^2 и один раз дифференцируя, получаем уравнение Кортевега–де Фриза вида бегущей волны

$$\rho \left(\frac{d^3 \rho}{dz^3} + 3\rho \frac{d\rho}{dz} - 2A \frac{d\rho}{dz} \right) = 0, \quad (34)$$

из которого однократным интегрированием получаем

$$\frac{d^2 \rho}{dz^2} + \frac{3}{2} \rho^2 - 2A\rho = B = \text{const}. \quad (35)$$

Это дает уравнение

$$\left(\frac{d\rho}{dz} \right)^2 = -\rho^3 + 2A\rho^2 + 2B\rho + C^2 \quad (36)$$

и решение

$$\rho(x - u_0 t) = \alpha_1 + (\alpha_3 - \alpha_1) \operatorname{dn}^2 \left[\frac{1}{2} (\alpha_3 - \alpha_1)^{1/2} (x - u_0 t), \kappa \right] \quad (37)$$

с модулем эллиптической функции $\kappa^2 = (\alpha_3 - \alpha_2)/(\alpha_3 - \alpha_1)$, постоянными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и

$$u(x - u_0 t) = u_0 - \frac{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}}{\rho}. \quad (38)$$

Это решение впервые было получено в работе [18]. В частных случаях имеем следующие редукции.

1. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и, соответственно, $\kappa^2 = 1$, то решение (37) сводится к решению (27) при выборе параметров $\alpha_3 = 4k^2$, $b = -\alpha_2 k^2/2$ и скорости $u = u_0$.
2. Если $\alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$, то снова $\kappa^2 = 1$, однако решение

$$\rho(x - u_0 t) = \alpha_1 + (\alpha_3 - \alpha_1) \operatorname{sch}^2 \left[\frac{1}{2} (\alpha_3 - \alpha_1)^{1/2} (x - u_0 t) \right] \quad (39)$$

имеет нетривиальные асимптотики. Актуальным для физики плазмы значением является $\alpha_1 = 1$, что дает $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho = 1$. Вводя обозначение $\alpha_3 \equiv \sigma^2$, можно записать это решение в виде

$$\rho(x - u_0 t) = 1 + \frac{(\sigma^2 - 1)}{\operatorname{ch}^2 \left[\frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{2} (x - u_0 t) \right]}. \quad (40)$$

Используя полученные результаты, теперь можно построить решения РНУШ (15). Подставляя (27) и (30) в (14) и меняя параметр $k \equiv p/\beta$, имеем квазипериодическое решение

$$\psi(x', t') = 2\beta k \operatorname{dn}[k(x' - u_0 t'), \kappa] \exp \left\{ -i \left[\phi_0 - \frac{u_0}{2} x' + \left[\frac{u_0^2}{4} + \beta^2 k^2 (2 - \kappa^2) \right] t' \right] \right\}, \quad (41)$$

где $x' = \beta x$, $t' = \beta t$. В пределе $\kappa = 1$ оно дает солитон огибающей

$$\psi(x', t') = 2\beta k \frac{1}{\operatorname{ch} k(x' - u_0 t')} \exp \left\{ -i \left[\phi_0 - \frac{u_0}{2} x' + \left[\frac{u_0^2}{4} + \beta^2 k^2 \right] t' \right] \right\}. \quad (42)$$

Для системы РД (18) имеем, соответственно, *диссипативное* периодическое решение

$$e^{(\pm)}(x', \tau) = \pm 2\beta k \operatorname{dn}[k(x' - v\tau), \kappa] \exp \left\{ \pm \left[\phi_0 - \frac{v}{2} x' + \left[\frac{v^2}{4} + k^2 (2 - \kappa^2) \right] \tau \right] \right\}, \quad (43)$$

где скорость $v \equiv u_0/\beta$, $k \equiv p/\beta$, и диссипативный аналог солитона огибающей

$$e^{(\pm)}(x', \tau) = \pm 2\beta k \frac{1}{\operatorname{ch} k(x' - v\tau)} \exp \left\{ \pm \left[\phi_0 - \frac{v}{2} x' + \left[\frac{v^2}{4} + k^2 \right] \tau \right] \right\} \quad (44)$$

– так называемое *диссипатонное* решение [1].

6. БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА И СОЛИТОНЫ

6.1. Тривиальные граничные условия. Представление РНУШ (15) в виде системы РД (18) является ключевым моментом в построении многосолитонных решений. Благодаря алгебраическому сходству системы РД с НУШ нетрудно написать

билинейное представление для системы РД. Выражая две вещественные функции $e^{(+)}$, $e^{(-)}$ через три вещественные функции:

$$e^{(\pm)} = 2\beta \frac{G^{\pm}}{F}, \quad (45)$$

имеем следующую билинейную систему уравнений:

$$(\pm D_{\tau} - D_x^2)(G^{(\pm)} \cdot F) = 0, \quad D_x^2(F \cdot F) = -2G^{(+)}G^{(-)}. \quad (46)$$

Соответствующее решение РНУШ (15) имеет вид

$$|\psi(x, t)|^2 = \rho = -e^{(+)}e^{(-)} = 2\beta^2 \frac{D_x^2(F \cdot F)}{F^2} = 4\beta^2 \frac{\partial^2 \ln F}{\partial x^2}. \quad (47)$$

Один диссипатон дается следующим решением системы (46): $G^{\pm} = \pm e^{\eta_1^{\pm}}$, $F = 1 + e^{\eta_1^{+} + \eta_1^{-} + \phi_{1,1}}$, $e^{\phi_{1,1}} = (k_1^{+} + k_1^{-})^{-2}$, где $\eta_1^{\pm} \equiv k_1^{\pm} x \pm (k_1^{\pm})^2 \tau + \eta_1^{\pm(0)}$ и $k_1^{\pm}$, $\eta_1^{\pm(0)}$ – константы. Будучи выраженным через переопределенные параметры $k \equiv (k_1^{+} + k_1^{-})/2$, $v \equiv -(k_1^{+} - k_1^{-})$, это решение приобретает вид (44). В пространстве параметров (v, k) существует критическое значение $v_{\text{crit}} = 2k$ такое, что при $v < v_{\text{crit}}$ мы имеем $e^{\pm} \rightarrow 0$ на бесконечностях, т.е. нулевые граничные условия для диссипатона. При критическом значении скорости в движущейся системе отсчета решение представляет собой стационарное состояние типа кинка $e^{\pm} = \pm k e^{\pm k \xi_0} (1 \mp \text{th } k \xi)$ с постоянными асимптотиками $e^{\pm} \rightarrow \pm 2k e^{\pm k \xi_0}$ при $x \rightarrow \mp \infty$ и $e^{\pm} \rightarrow \pm 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$. В надкритическом случае $v > v_{\text{crit}}$, имеем $e^{\pm} \rightarrow \pm \infty$ при $x \rightarrow \mp \infty$ и $e^{\pm} \rightarrow \pm 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$.

Для двухдиссипатонного решения

$$G^{\pm} = \pm \left[e^{\eta_1^{\pm}} + e^{\eta_2^{\pm}} + \left(\frac{\check{k}_{12}^{\pm\pm}}{k_{21}^{\pm\mp} k_{11}^{+-}} \right)^2 e^{\eta_1^{+} + \eta_1^{-} + \eta_2^{\pm}} + \left(\frac{\check{k}_{12}^{\pm\pm}}{k_{12}^{\pm\mp} k_{22}^{+-}} \right)^2 e^{\eta_2^{+} + \eta_2^{-} + \eta_1^{\pm}} \right], \quad (48)$$

$$F = 1 + \frac{e^{\eta_1^{+} + \eta_1^{-}}}{(k_{11}^{+-})^2} + \frac{e^{\eta_1^{+} + \eta_2^{-}}}{(k_{12}^{+-})^2} + \frac{e^{\eta_2^{+} + \eta_1^{-}}}{(k_{21}^{+-})^2} + \frac{e^{\eta_2^{+} + \eta_2^{-}}}{(k_{22}^{+-})^2} + \left(\frac{\check{k}_{12}^{++} \check{k}_{12}^{--}}{k_{12}^{+-} k_{21}^{+-} k_{11}^{+-} k_{22}^{+-}} \right)^2 e^{\eta_1^{+} + \eta_1^{-} + \eta_2^{+} + \eta_2^{-}}, \quad (49)$$

где $k_{ij}^{ab} \equiv k_i^a + k_j^b$, $\check{k}_{ij}^{ab} \equiv k_i^a - k_j^b$, $\eta_i^{\pm} \equiv k_i^{\pm} x \pm (k_i^{\pm})^2 \tau + \eta_i^{\pm(0)}$. Это решение демонстрирует резонансный характер диссипатонных взаимодействий [1].

6.2. Нетривиальные граничные условия. Как было впервые замечено Хиротой, билинейная форма уравнений для НУШ дефокусирующего типа с ненулевыми граничными условиями должна быть изменена [20]. После подстановки представления (45) в систему (18) последняя расщепляется на систему уравнений

$$(\pm D_{\tau} - D_x^2 + \lambda)(G^{\pm} \cdot F) = 0, \quad (D_x^2 - \lambda)(F \cdot F) = -2G^{+}G^{-}, \quad (50)$$

где введена константа λ , подлежащая определению. Из соотношения (45) и второго уравнения (50) следует, что $-e^{(+)}e^{(-)} = -4\beta^2[\lambda/2 - (\ln F)_{xx}]$. Разлагая величины $G^{\pm}$ и F в степенной ряд Хироты:

$$G^{\pm} = \pm g_0^{\pm}(1 + \epsilon g_1^{\pm} + \epsilon^2 g_2^{\pm} + \dots), \quad F = 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots, \quad (51)$$

и требуя выполнения условия $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\ln F)_{xx} = 0$, получаем граничное условие

$$\alpha_1 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} [-e^{(+)} e^{(-)}] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left\{ -4\beta^2 \left[\frac{\lambda}{2} - (\ln F)_{xx} \right] \right\} = -2\beta^2 \lambda, \quad (52)$$

которое определяет константу $\lambda = -\alpha_1/(2\beta^2)$. В приближении нулевого порядка имеем систему

$$(\pm D_\tau - D_x^2 + \lambda)(g_0^\pm \cdot 1) = 0, \quad (D_x^2 - \lambda)(1 \cdot 1) = 2g_0^+ g_0^-. \quad (53)$$

Эта система имеет решение вида $g_0^\pm = \beta^\pm e^{\theta^\pm}$, где $\beta_0^2 \equiv \beta^+ \beta^- = -\lambda/2 = \alpha_1/(4\beta^2)$, $\theta^\pm = \pm kx \pm (k^2 - \lambda)t$, $\beta^\pm = \beta_0 e^{\pm \gamma_0}$. С учетом свойств производных Хироты

$$\begin{aligned} D_x(fg \cdot h) &= \frac{\partial f}{\partial x} gh + f D_x(g \cdot h), \\ D_x^2(fg \cdot h) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} gh + 2 \frac{\partial f}{\partial x} D_x(g \cdot h) + f D_x^2(g \cdot h) \end{aligned} \quad (54)$$

билинейная система принимает вид

$$\begin{aligned} (\mp D_\tau \pm 2k D_x + D_x^2)((1 + \epsilon g_1^\pm + \epsilon^2 g_2^\pm + \dots) \cdot (1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots)) &= 0, \\ (D_x^2 + 2\beta_0^2)((1 + \epsilon f_1 + \dots) \cdot (1 + \epsilon f_1 + \dots)) &= \\ = 2\beta_0^2(1 + \epsilon g_1^+ + \dots)(1 + \epsilon g_1^- + \dots). \end{aligned} \quad (55)$$

6.2.1. *Односолитонное решение.* В первом порядке имеем систему

$$\begin{aligned} (\mp \partial_\tau \pm 2k \partial_x + \partial_x^2)g_1^\pm + (\pm \partial_\tau \mp 2k \partial_x + \partial_x^2)f_1 &= 0, \\ (\partial_x^2 + 2\beta_0^2)f_1 &= \beta_0^2(g_1^+ + g_1^-). \end{aligned} \quad (56)$$

Рассматривая решение в виде $g_1^\pm = a_1^\pm e^{\eta_1}$, $f_1 = b_1 e^{\eta_1}$, где $\eta_1 = k_1 x + \omega_1 \tau + \eta_1^0$, получаем $a_1^+ = \gamma_1 b_1$, $a_1^- = b_1/\gamma_1$, $\gamma_1 = (\omega_1 - 2kk_1 + k_1^2)/(\omega_1 - 2kk_1 - k_1^2)$, где дисперсионная формула имеет вид

$$\omega_1^\pm = k_1(2k \pm \sqrt{k_1^2 + 4\beta_0^2}). \quad (57)$$

Стоит отметить, что, в отличие от случая решения для дефокусирующего НУШ, в нашем случае ограничения на значения k_1 не возникают.

Усечение разложения Хироты на данном уровне дает один диссипативный солитон

$$e^{(\pm)} = \pm 2\beta \beta^\pm e^{\pm[kx + (k^2 + 2\beta_0^2)\tau]} \frac{1 + \gamma_1^{\pm 1} e^{\tilde{\eta}_1}}{1 + e^{\tilde{\eta}_1}}, \quad (58)$$

где мы включили константу b_1 в экспоненту: $\tilde{\eta}_1 = k_1 x + \omega_1 \tau + \eta_1^0 + \ln b_1$. В таком случае односолитонная плотность имеет вид

$$\rho = -e^{(+)} e^{(-)} = \alpha_1 \frac{(1 + \gamma_1 e^{\tilde{\eta}_1})(1 + \gamma_1^{-1} e^{\tilde{\eta}_1})}{(1 + e^{\tilde{\eta}_1})^2}. \quad (59)$$

Это решение может быть представлено в виде

$$e^{(\pm)} = \pm \sqrt{\alpha_1} \mu^{\pm 1} e^{\pm[kx + (k^2 + 2\beta_0^2)\tau]} \left(\frac{\gamma^{\pm 1} + 1}{2} + \frac{\gamma^{\pm 1} - 1}{2} \operatorname{th} \frac{\tilde{\eta}}{2} \right), \quad (60)$$

или

$$\begin{aligned} e^{(+)} &= +\sqrt{\alpha_1} \frac{\mu}{2} e^{+[kx+(k^2+2\beta_0^2)\tau]} \left(\gamma + 1 + (\gamma - 1) \operatorname{th} \frac{\tilde{\eta}}{2} \right), \\ e^{(-)} &= -\sqrt{\alpha_1} \frac{1}{2\mu} e^{-[kx+(k^2+2\beta_0^2)\tau]} \left(\frac{1}{\gamma} + 1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \operatorname{th} \frac{\tilde{\eta}}{2} \right), \end{aligned} \quad (61)$$

а произведение равно

$$\rho = -e^{(+)} e^{(-)} = \alpha_1 \left[1 + \frac{(\gamma - 1)^2}{4\gamma \operatorname{ch}^2(\tilde{\eta}/2)} \right] \quad (62)$$

и имеет асимптотику $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho \rightarrow \alpha_1$. В явном виде плотность равна

$$\rho = -e^{(+)} e^{(-)} = \alpha_1 \left\{ 1 + \frac{k_1^2}{4\beta_0^2} \operatorname{sch}^2 \left[\frac{k_1}{2} (x + (2k \pm \sqrt{k_1^2 + 4\beta_0^2})\tau + x_0) \right] \right\}, \quad (63)$$

где $\beta_0^2 = 1/(4\beta^2\alpha_1)$. Для поля скорости имеем

$$u = \frac{e_x^{(-)}}{e^{(-)}} - \frac{e_x^{(+)}}{e^{(+)}} = -2k - \frac{(\gamma^2 - 1)k_1}{(\gamma - 1)^2 + 4\gamma \operatorname{ch}^2(\tilde{\eta}/2)}. \quad (64)$$

Рассмотрим частное решение при $k = 0$. Тогда соотношение

$$\omega_1 = \pm k_1 \sqrt{k_1^2 + 4\beta_0^2} \quad (65)$$

есть дисперсионное соотношение Боголюбова в теории сверхтекучести слабо неидеального бозе-газа. При $k_1 \gg 2\beta_0$ оно имеет вид дисперсионного соотношения для свободной нерелятивистской частицы $\omega_1 \approx k_1^2$, а при $k_1 \ll 2\beta_0$ — для релятивистского ансамбля $\omega_1 \approx 2\beta_0 k_1$. Решение для положительного знака в формуле для дисперсии имеет вид

$$\begin{aligned} e^{(+)} &= \frac{\sqrt{\alpha_1} \mu}{v - \sqrt{v^2 - 4\beta_0^2}} e^{2\beta_0^2 \tau} \left(v + \sqrt{v^2 - 4\beta_0^2} \operatorname{th} \frac{\sqrt{v^2 - 4\beta_0^2}}{2} (x + v\tau + x_0) \right), \\ e^{(-)} &= -\frac{\sqrt{\alpha_1} / \mu}{v + \sqrt{v^2 - 4\beta_0^2}} e^{-2\beta_0^2 \tau} \left(v - \sqrt{v^2 - 4\beta_0^2} \operatorname{th} \frac{\sqrt{v^2 - 4\beta_0^2}}{2} (x + v\tau + x_0) \right), \end{aligned} \quad (66)$$

а плотность равна

$$\rho = -e^{(+)} e^{(-)} = \alpha_1 \left\{ 1 + \frac{v^2 - 4\beta_0^2}{4\beta_0^2} \operatorname{sch}^2 \left[\frac{\sqrt{v^2 - 4\beta_0^2}}{2} (x + v\tau + x_0) \right] \right\}. \quad (67)$$

Структура этого решения показывает, что скорость солитона ограничена снизу по модулю, $|v| > 2\beta_0$, так что солитон имеет “тахинный” характер. Полученные результаты означают, прежде всего, что в отличие от солитонов дефокусирующего НУШ, скорость которых ограничена сверху (дозвуковой тип), скорость солитонов РНУШ ограничена снизу (сверхзвуковой тип). Другое отличие состоит в том, что солитон дефокусирующего (отталкивающего) НУШ представляет собой возбуждение типа дырки (пузыря) с $|\psi|^2 = \rho < 1$, в то время как солитон РНУШ имеет форму типа барьера $\rho > 1$.

6.2.2. *Двухсолитонное решение.* Чтобы построить двухсолитонное решение, рассмотрим вслед за Хиротой [20] выражения

$$g_1^{(\pm)} = a_1^\pm e^{\eta_1} + a_2^\pm e^{\eta_2}, \quad f_1 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}. \quad (68)$$

Подставляя их в билинейные уравнения

$$\begin{aligned} (\mp D_\tau \pm 2kD_x + D_x^2)(a_1^\pm e^{\eta_1} + a_2^\pm e^{\eta_2}) \cdot 1 + 1 \cdot (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) &= 0, \\ 2(D_x^2 + 2\beta_0^2)(1 \cdot (e^{\eta_1} + e^{\eta_2})) &= 2\beta_0^2(a_1^+ e^{\eta_1} + a_2^+ e^{\eta_2} + a_1^- e^{\eta_1} + a_2^- e^{\eta_2}), \end{aligned} \quad (69)$$

имеем систему

$$\begin{aligned} a_1^\pm (\mp \partial_\tau \pm 2k\partial_x + \partial_x^2) e^{\eta_1} + (\pm \partial_\tau \mp 2k\partial_x + \partial_x^2) e^{\eta_1} + \\ + a_2^\pm (\mp \partial_\tau \pm 2k\partial_x + \partial_x^2) e^{\eta_2} + (\pm \partial_\tau \mp 2k\partial_x + \partial_x^2) e^{\eta_2} &= 0, \\ (k_1^2 + 2\beta_0^2)(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) &= \beta_0^2[(a_1^+ + a_1^-)e^{\eta_1} + (a_2^+ + a_2^-)e^{\eta_2}]. \end{aligned} \quad (70)$$

Используя дисперсионные соотношения

$$\omega_i^\pm = k_i(2k \pm \sqrt{k_i^2 + 4\beta_0^2}), \quad i = 1, 2, \quad (71)$$

получаем

$$a_i^+ = \frac{(\omega_i - 2kk_i) + k_i^2}{(\omega_i - 2kk_i) - k_i^2} \equiv e^{\phi_i}, \quad a_i^- = \frac{(\omega_i - 2kk_i) - k_i^2}{(\omega_i - 2kk_i) + k_i^2} = \frac{1}{a_i^+} e^{-\phi_i}. \quad (72)$$

Последние соотношения означают, что

$$\omega_i - 2kk_i = k_i^2 \operatorname{cth} \frac{\phi_i}{2} \quad (73)$$

и

$$k_i = 2\beta_0 \operatorname{sh} \frac{\phi_i}{2}, \quad (74)$$

так что

$$\omega_i - 2kk_i = 2\beta_0^2 \operatorname{sh} \phi_i. \quad (75)$$

Заметим, что два знака дисперсии в (71) отвечают простой замене $\phi_i \rightarrow -\phi_i$ в последних формулах. Ограничимся сначала рассмотрением одного и того же знака для обеих частот. В следующем порядке имеем систему

$$\begin{aligned} (\mp D_\tau \pm 2kD_x + D_x^2)(g_2^\pm \cdot 1 + g_1^\pm \cdot f_1 + 1 \cdot f_2) &= 0, \\ (D_x^2 + 2\beta_0^2)(2 \cdot f_2 + f_1 \cdot f_1) &= 2\beta_0^2(g_2^+ + g_2^- + g_1^+ g_1^-). \end{aligned} \quad (76)$$

Первое уравнение переписывается как

$$\begin{aligned} (\mp \partial_\tau \pm 2k\partial_x + \partial_x^2)g_2^\pm + (\pm \partial_\tau \mp 2k\partial_x + \partial_x^2)f_2 + \\ + \{a_1^\pm [\mp(\omega_1 - \omega_2) \pm 2k(k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2] + \\ + a_2^\pm [\mp(\omega_2 - \omega_1) \pm 2k(k_2 - k_1) + (k_1 - k_2)^2]\} e^{\eta_1 + \eta_2} &= 0, \end{aligned} \quad (77)$$

откуда следует, что оно имеет решение вида

$$g_2^\pm = a_{12}^\pm e^{\eta_1 + \eta_2}, \quad f_2 = b_{12} e^{\eta_1 + \eta_2}. \quad (78)$$

Тогда из второго уравнения системы следуют соотношения

$$a_{12}^+ = a_1^+ a_2^+ b_{12} = e^{\phi_1 + \phi_2} b_{12}, \quad a_{12}^- = a_1^- a_2^- b_{12} = e^{-(\phi_1 + \phi_2)} b_{12}, \quad (79)$$

так что

$$b_{12} = \frac{\text{sh}^2((\phi_1 - \phi_2)/4)}{\text{sh}^2((\phi_1 + \phi_2)/4)}, \quad (80)$$

при этом первое уравнение системы (76) выполняется автоматически. В итоге имеем решение

$$e^{(\pm)} = \pm 2\beta \frac{g_0^\pm (1 + g_1^\pm + g_2^\pm)}{1 + f_1 + f_2}, \quad (81)$$

или

$$e^{(\pm)} = \pm 2\beta \frac{g_0^\pm (1 + e^{\eta_1 \pm \phi_1} + e^{\eta_2 \pm \phi_2} + b_{12} e^{\eta_1 + \eta_2 \pm (\phi_1 + \phi_2)})}{1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + b_{12} e^{\eta_1 + \eta_2}}. \quad (82)$$

В частном случае $\beta_0 = 1/2$ (при этом $\alpha_1 = 1$) имеем двухсолитонное решение для плотности ρ :

$$\rho = \frac{A_+ A_-}{[\text{sh}^2((\phi_1 + \phi_2)/4)(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) + \text{sh}^2((\phi_1 - \phi_2)/4)e^{\eta_1 + \eta_2}]^2}, \quad (83)$$

где

$$\begin{aligned} A_\pm &= \text{sh}^2 \frac{\phi_1 + \phi_2}{4} (1 + e^{\eta_1 \pm \phi_1} + e^{\eta_2 \pm \phi_2}) + \text{sh}^2 \frac{\phi_1 - \phi_2}{4} e^{\eta_1 + \eta_2 \pm (\phi_1 + \phi_2)}, \\ \eta_i &= \text{sh} \frac{\phi_i}{2} x + \left[2k \text{sh} \frac{\phi_i}{2} + \frac{1}{2} \text{sh} \phi_i \right] \tau + \eta_i^{(0)}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (84)$$

Если один из параметров ϕ_i обращается в нуль или если $\phi_1 = \phi_2$, данное решение сводится к односолитонному. Например, если $\phi_2 = 0$, то

$$\rho = 1 + \frac{\text{sh}^2(\phi_1/2)}{\text{ch}^2(\eta_1/2)}. \quad (85)$$

Исследуя двухсолитонное решение в движущихся системах отсчета, связанных с солитонами, можно видеть, что оно описывает столкновение двух солитонов типа (85), которые двигаются в одном направлении, имея начальные смещения

$$\Delta x_i = (-1)^{i-1} \frac{2}{\text{sh}(\phi_i/2)} \ln \frac{\text{sh}((\phi_1 - \phi_2)/4)}{\text{sh}((\phi_1 + \phi_2)/4)}, \quad i = 1, 2, \quad (86)$$

такие, что $\text{sh}(\phi_1/2)\Delta x_1 + \text{sh}(\phi_2/2)\Delta x_2 = 0$.

Двухсолитонное решение другого вида получается, если выбрать противоположные знаки частот в (71), так что

$$\begin{aligned} \omega_1^+ &= 2\beta_0 \left(2k \text{sh} \frac{\phi_1}{2} + \beta_0 \text{sh} \phi_1 \right), \\ \omega_2^- &= 2\beta_0 \left(2k \text{sh} \frac{\phi_1}{2} - \beta_0 \text{sh} \phi_1 \right). \end{aligned} \quad (87)$$

Тогда $a_1^\pm = e^{\pm\phi_1}$, $a_2^\pm = e^{\mp\phi_2}$,

$$a_{12}^+ = a_1^+ a_2^+ b_{12} = e^{\phi_1 - \phi_2} b_{12}, \quad a_{12}^- = a_1^- a_2^- b_{12} = e^{-\phi_1 + \phi_2} b_{12} \quad (88)$$

и

$$b_{12} = \frac{\text{ch}^2((\phi_1 + \phi_2)/4)}{\text{ch}^2((\phi_1 - \phi_2)/4)}. \quad (89)$$

При $\beta_0 = 1/2$ двухсолитонное решение имеет вид

$$\rho = \frac{B_+ B_-}{[\text{ch}^2((\phi_1 - \phi_2)/4)(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) + \text{ch}^2((\phi_1 + \phi_2)/4)e^{\eta_1 + \eta_2}]^2}, \quad (90)$$

где

$$\begin{aligned} B_\pm &= \text{ch}^2 \frac{\phi_1 - \phi_2}{4} (1 + e^{\eta_1 \pm \phi_1} + e^{\eta_2 \mp \phi_2}) + \text{ch}^2 \frac{\phi_1 + \phi_2}{4} e^{\eta_1 + \eta_2 \pm \phi_1 \mp \phi_2}, \\ \eta_1 &= \text{sh} \frac{\phi_1}{2} (x - x_1) + \left[2k \text{sh} \frac{\phi_1}{2} + \frac{1}{2} \text{sh} \phi_1 \right] \tau, \\ \eta_2 &= \text{sh} \frac{\phi_2}{2} (x - x_2) + \left[2k \text{sh} \frac{\phi_2}{2} - \frac{1}{2} \text{sh} \phi_2 \right] \tau. \end{aligned} \quad (91)$$

Это решение описывает столкновение двух солитонов вида (85), которые двигаются в противоположных направлениях, имея начальные смещения

$$\Delta x_i = (-1)^{i-1} \frac{2}{\text{sh}(\phi_i/2)} \ln \frac{\text{ch}((\phi_1 + \phi_2)/4)}{\text{ch}((\phi_1 - \phi_2)/4)}, \quad i = 1, 2. \quad (92)$$

На рисунке представлен трехмерный график такого решения.

Для поля скоростей имеем

$$u = \frac{e_x^{(-)}}{e^{(-)}} - \frac{e_x^{(+)}}{e^{(+)}} = -2k + \frac{\operatorname{ch}^2((\phi_1 - \phi_2)/4)a_- + \operatorname{ch}^2((\phi_1 - \phi_2)/4)b_-}{\operatorname{ch}^2((\phi_1 - \phi_2)/4)(1 + e^{\eta_1 - \phi_1} + e^{\eta_2 + \phi_2}) + \operatorname{ch}^2((\phi_1 + \phi_2)/4)e^{\eta_1 + \eta_2 - \phi_1 + \phi_2}} - \frac{\operatorname{ch}^2((\phi_1 - \phi_2)/4)a_+ + \operatorname{ch}^2((\phi_1 - \phi_2)/4)b_+}{\operatorname{ch}^2((\phi_1 - \phi_2)/4)(1 + e^{\eta_1 + \phi_1} + e^{\eta_2 - \phi_2}) + \operatorname{ch}^2((\phi_1 + \phi_2)/4)e^{\eta_1 + \eta_2 + \phi_1 - \phi_2}}, \quad (93)$$

где

$$a_{\mp} = \operatorname{sh} \frac{\phi_1}{2} e^{\eta_1 \mp \phi_1} + \operatorname{sh} \frac{\phi_2}{2} e^{\eta_2 \pm \phi_2}, \quad b_{\mp} = \left(\operatorname{sh} \frac{\phi_1}{2} + \operatorname{sh} \frac{\phi_2}{2} \right) e^{\eta_1 + \eta_2 \mp \phi_1 \pm \phi_2}. \quad (94)$$

Это решение имеет такой же сдвиг фаз (92) и описывает столкновение двух солитонов вида

$$u = -2k - \frac{k_i \operatorname{sh} \phi_i}{2 \operatorname{ch}((\eta_i + \phi_i)/2) \operatorname{ch}((\eta_i - \phi_i)/2)}, \quad i = 1, 2. \quad (95)$$

Благодарности. Эта работа была частично поддержана Institute of Mathematics, Academia Sinica (Taipei, Taiwan) и Izmir Institute of Technology (Izmir, Turkey), проект BAP 2005 IYTE 08.

Список литературы

- [1] О.К. Pashaev, J.-H. Lee, *Mod. Phys. Lett. A*, **17** (2002), 1601–1619.
- [2] L. de Broglie, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **183** (1926), 447–448.
- [3] D. Bohm, *Phys. Rev.*, **85** (1952), 166–179; 180–193.
- [4] E. Nelson, *Phys. Rev.*, **150** (1966), 1079–1085.
- [5] G. Salesi, *Mod. Phys. Lett. A*, **11** (1996), 1815–1823.
- [6] F. Guerra, M. Pusterla, *Lett. Nuovo Cimento* (2), **34** (1982), 351–356.
- [7] L. Smolin, *Phys. Lett. A*, **113**:8 (1986), 408–412.
- [8] O. Bertolami, *Phys. Lett. A*, **154** (1991), 225–229.
- [9] L. K. Antanovskii, C. Rogers, W. K. Schief, *J. Phys. A*, **30** (1997), L555–L557.
- [10] C. Rogers, W. K. Schief, *Nuovo Cimento B*, **114** (1999), 1409–1412.
- [11] J.-H. Lee, O. K. Pashaev, C. Rogers, W. K. Schief, *J. Plasma Phys.*, **73**:02 (2007), 257–272.
- [12] В. И. Карпман, *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, Наука, М., 1973.
- [13] А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, *Электродинамика плазмы*, Наука, М., 1974.
- [14] J. H. Adlam, J. E. Allen, *Philos. Mag.*, **3** (1958), 448–455.
- [15] А. В. Гуревич, А. П. Мещеркин, *ЖЭТФ*, **87** (1984), 1277–1292.
- [16] G. A. El, V. V. Khodorovskii, A. V. Tyurina, *Phys. Lett. A*, **333** (2004), 334–340.
- [17] А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, *ЖЭТФ*, **92** (1987), 1684–1699.
- [18] А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, *Докл. АН СССР*, **298** (1988), 608–611.
- [19] G. A. El, R. H. J. Grimshaw, M. V. Pavlov, *Stud. Appl. Math.*, **106** (2001), 157–186.
- [20] R. Hirota, “Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations”, *Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons, and Their Applications* (Nashville, 1974), Lecture Notes in Math., **515**, ed. R. M. Miura, Springer, Berlin, 1976, 40–68.