Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. К. Пашаев, З. Н. Гюркан, Абелевы вихри Черна–Саймонса и голоморфная иерархия Бюргерса, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 1, 163–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6078>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:35:03

© 2007 г.

О. К. Пашаев*, З. Н. Гюркан*

АБЕЛЕВЫ ВИХРИ ЧЕРНА–САЙМОНСА И ГОЛОМОРФНАЯ ИЕРАРХИЯ БЮРГЕРСА

Рассматривается абелева калибровочная теория Черна–Саймонса в размерности $2 + 1$ и ее связь с голоморфной иерархией Бюргерса. Показано, что соотношение между комплексным потенциалом и комплексным калибровочным полем, как в гидродинамике несжимаемой и безвихревой жидкости, имеет смысл аналитического преобразования Коула–Хопфа, которое линеаризует иерархию Бюргерса и превращает ее в голоморфную иерархию Шредингера. В таком случае движение плоских вихрей, возникающих в виде сингулярностей типа полюсов калибровочного поля Черна–Саймонса, соответствует движению нулей иерархии. С помощью преобразований буста комплексной группы Галилея иерархии в терминах обобщенных полиномов Кампе де Ферье и Эрмита построено богатое множество точных решений, описывающих интегрируемую динамику плоских вихрей и вихревых решеток. Результаты применены к голоморфной редукции модели Ишимори и отвечающей ей иерархии, описывающей динамику магнитных вихрей и соответствующих им решеток в терминах комплексифицированных моделей Калоджеро–Мозера. Найдены (в виде функций Эйри) поправки к двухвихревой динамике, обусловленные некоммутативностью пространства-времени.

Ключевые слова: калибровочная теория Черна–Саймонса, иерархия Бюргерса, некоммутативные вихри, модель Ишимори, голоморфное уравнение, полиномы Кампе де Ферье.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФЕРРОМАГНЕТИКА В НЕПРЕРЫВНОЙ СРЕДЕ

Для решения так называемой проблемы импульсов в плоском ферромагнетике Воловиком [1] была введена модель делокализованных электронов. В этой модели восстановление линейной плотности импульсов достигается при использовании гидродинамических переменных, плотности и нормальной скорости фермионной жидкости. На этой основе в работе [2] была предложена простая модель фермионной или спиновой жидкости, изменяющая феноменологические уравнения Ландау–Лифшица. В этой модели магнитная переменная описывается классическим вектором спина $\vec{S} = \vec{S}(x, y, t)$, принимающим значения на двумерной сфере $\vec{S}^2 = 1$,

*Department of Mathematics, Izmir Institute of Technology, Urla-Izmir, 35430, Turkey.
E-mail: oktaypashaev@iyte.edu.tr

а гидродинамической переменной является скорость $\vec{v}(x, y, t)$ несжимаемого потока. Для частного случая анизотропной пространственной метрики имеем систему

$$\begin{aligned}\vec{S}_t + v_1 \partial_1 \vec{S} - v_2 \partial_2 \vec{S} &= \vec{S} \times (\partial_1^2 - \partial_2^2) \vec{S}, \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 &= 2\vec{S}(\partial_1 \vec{S} \times \partial_2 \vec{S}).\end{aligned}\quad (1)$$

Первое уравнение – это уравнение модели Гейзенберга, где производная по времени $\partial/\partial t$ заменена субстанциональной производной $D/Dt = \partial/\partial t + (\vec{v} \nabla)$, а второе уравнение, которое называется соотношением Мермина–Хо [3], представляет собой связь между гидродинамическими и спиновыми переменными. Оно связывает завихренность потока с топологической плотностью заряда, или числом наматываний для спина. В этом случае справедлива следующая теорема [4].

ТЕОРЕМА. *Для потока, удовлетворяющего условию несжимаемости*

$$\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = 0, \quad (2)$$

имеет место закон сохранения $\partial_t J_0 + \partial_2 J_2 - \partial_1 J_1 = 0$, где

$$\begin{aligned}J_0 &= (\partial_1 \vec{S})^2 + (\partial_2 \vec{S})^2, \\ J_1 &= -2\partial_1 \vec{S} \cdot \vec{S} \times (\partial_1^2 - \partial_2^2) \vec{S} + v_1 J_0 + 2\vec{S} \cdot (\partial_1 \vec{S} \times \partial_2^2 \vec{S} - \partial_1 \partial_2 \vec{S} \times \partial_2 \vec{S}), \\ J_2 &= 2\partial_2 \vec{S} \cdot \vec{S} \times (\partial_1^2 - \partial_2^2) \vec{S} + v_2 J_0 - 2\vec{S} \cdot (\partial_1^2 \vec{S} \times \partial_1 \partial_2 \vec{S} - \partial_1 \vec{S} \times \partial_2 \vec{S}).\end{aligned}\quad (3)$$

В силу приведенной теоремы для несжимаемого потока (2) функционал (3) (функционал “энергии”) $E = \iint J_0 d^2x$ является сохраняющейся величиной, ограниченной топологическим зарядом Q спиновой конфигурации: $E \geq 8\pi|Q|$ (неравенство Богомольного). Это неравенство обращается в равенство для спиновых конфигураций, удовлетворяющих следующей системе уравнений первого порядка (системе самодуальных уравнений Белавина–Полякова):

$$\partial_i \vec{S} \pm \epsilon_{ij} \vec{S} \times \partial_j \vec{S} = 0. \quad (4)$$

В отличие от статического случая, в нашем случае неравенство Богомольного имеет место для зависящих от времени полей. Стереографическая проекция спинового фазового пространства задается формулами

$$S_+ = S_1 + iS_2 = \frac{2\zeta}{1 + |\zeta|^2}, \quad S_3 = \frac{1 - |\zeta|^2}{1 + |\zeta|^2}, \quad (5)$$

где ζ – комплекснозначная функция. При использовании комплексных производных $\partial_z = (\partial_1 - i\partial_2)/2$, $\partial_{\bar{z}} = (\partial_1 + i\partial_2)/2$ записанные для стереографической проекции уравнения самодуальности (4) превращаются в условия аналитичности $\zeta_{\bar{z}}(z, t) = 0$ или антианалитичности $\zeta_z(\bar{z}, t) = 0$. Прямым вычислением нетрудно показать, что для несжимаемого потока (2) голоморфная связь $\zeta_{\bar{z}}(z, t) = 0$ совместима с временной эволюцией $\partial \zeta_{\bar{z}} / \partial t = 0$.

2. ГОЛОМОРФНАЯ РЕДУКЦИЯ МОДЕЛИ ИШИМОРИ

Из приведенной выше теоремы видно, что несжимаемый поток допускает существование положительного функционала энергии, который минимизируется голоморфной редукцией, и данная редукция совместима с временной эволюцией. Это наводит на мысль разрешить условия несжимаемости явно. Поэтому рассмотрим топологическую модель магнетика (1) с условием несжимаемости, разрешенным в терминах вещественной функции ψ (функции тока данного потока), $v_1 = \partial_2 \psi$, $v_2 = -\partial_1 \psi$. Тогда мы имеем аналитическую редукцию модели Ишимори [5]

$$i\zeta_t - 2\psi_z \zeta_z + 2\zeta_{zz} - 4 \frac{\zeta}{1 + |\zeta|^2} \zeta_z^2 = 0, \quad (6)$$

$$\psi_{z\bar{z}} = -2 \frac{\bar{\zeta}_z \zeta_z}{(1 + |\zeta|^2)^2}. \quad (7)$$

При выборе функции тока вида

$$\psi = 2 \ln(1 + |\zeta|^2) \quad (8)$$

уравнение (7) выполняется автоматически, а из уравнения (6) мы имеем голоморфное уравнение Шредингера

$$i\zeta_t + 2\zeta_{zz} = 0. \quad (9)$$

Каждый нуль функции ζ в комплексной плоскости z определяет магнитный вихрь модели Ишимори. Вектор спина в центре вихря равен $\vec{S} = (0, 0, 1)$, а в бесконечности $\vec{S} = (0, 0, -1)$. Поэтому движение нулей уравнения (9) определяет движение магнитных вихрей в плоскости. С другой стороны, если рассмотреть аналитическую функцию

$$f(z, t) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta(z, t) \quad (10)$$

как комплексный потенциал эффективного потока [6], то каждый нуль функции ζ соответствует гидродинамическому вихрю потока с интенсивностью Γ и сингулярности типа простого полюса комплексной скорости

$$u(\bar{z}, t) = \bar{f}_{\bar{z}} = \frac{i\Gamma}{2\pi} (\ln \bar{\zeta})_{\bar{z}}. \quad (11)$$

Однако последнее выражение имеет смысл голоморфного преобразования Коула–Хопфа, в соответствии с которым комплексная скорость подчиняется антиголоморфному уравнению Бюргерса

$$iu_t + \frac{8\pi i}{\Gamma} uu_{\bar{z}} = 2u_{\bar{z}\bar{z}}. \quad (12)$$

Таким образом, каждый магнитный вихрь модели Ишимори соответствует гидродинамическому вихрю антиголоморфного уравнения Бюргерса. Более того, соотношение (10), записанное в виде

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\Gamma} f} = e^{\frac{2\pi i}{\Gamma} (\phi + i\chi)} = \sqrt{\rho} e^{\frac{2\pi i}{\Gamma} \phi}, \quad (13)$$

показывает, что эффективный поток представляет собой просто представление Маделунга для линейного голоморфного уравнения Шредингера (9), в котором функции ϕ и χ являются соответственно потенциалом скоростей и функцией тока.

3. СИСТЕМА N ВИХРЕЙ

Система N магнитных вихрей определяется N простыми нулями:

$$\zeta(z, t) = \prod_{k=1}^N (z - z_k(t)), \quad (14)$$

положения которых согласно (9) подчиняются системе уравнений

$$\frac{dz_k}{dt} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \frac{4i}{z_k - z_l}. \quad (15)$$

В одномерном пространстве эта система была впервые рассмотрена в работе [7] (см. также [8]) для движущихся полюсов уравнения Бюргерса, определяемых нулями уравнения теплопроводности. Однако комплексификация задачи дает ряд преимуществ. Прежде всего, задача о корнях алгебраического уравнения степени N , так же как и задача о движении сингулярностей дифференциальных уравнений, допускает в комплексной области полное решение. В отличие от размерности один, в этом случае динамика полюсов в плоскости становится обратимой во времени (см. ниже) и может интерпретироваться как динамика вихрей. Кроме того, обобщение (не интегрируемое) системы (15) на случай трех частиц разной мощности исследовалось в работе [9] с целью объяснить переход от регулярного движения к нерегулярному как перемещение по римановой поверхности.

Ниже в разделе 7 будет показано, что решение этой системы определяется N комплексными константами движения, и именно поэтому динамика вихрей в модели Ишимори является интегрируемой. На самом деле система (15) может быть преобразована в комплексифицированную задачу N частиц Калоджеро–Мозера (типа I) [10], [11]. Для этого продифференцируем уравнения системы один раз по времени и используем систему еще раз, чтобы получить уравнения Ньютона

$$\frac{d^2 z_k}{dt^2} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \frac{32}{(z_l - z_k)^3}. \quad (16)$$

Эти уравнения имеют гамильтонов вид с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N p_k^2 + \sum_{k < l}^N \frac{16}{(z_k - z_l)^2} \quad (17)$$

и допускают представление Лакса, из которого следует иерархия находящихся в инволюции постоянных движения $I_k = \text{tr } L^{k+1}$. Недавно комплексификация классической модели Калоджеро–Мозера и голоморфного уравнения Хопфа была рассмотрена в связи с переходом к пределу бесконечного числа частиц, приводящим к квантовой гидродинамике и квантовому уравнению Бенжамина–Оно [12]. С другой стороны, голоморфный вариант уравнения Бюргерса рассматривался в работе [13] с целью доказать существование и единственность нелинейного диффузионного процесса для системы броуновских частиц с электростатическим отталкиванием в случае, когда число частиц стремится к бесконечности.

4. ИНТЕГРИРУЕМАЯ N -ЧАСТИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ N ВИХРЕВЫХ РЕШЕТОК

Функция ζ вида

$$\zeta(z, t) = \sin(z - z_k(t)) = (z - z_k(t)) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(z - z_k(t))^2}{n^2 \pi^2} \right) \quad (18)$$

имеет бесконечное периодическое множество нулей и определяет решетку вихрей. Прежде всего рассмотрим для уравнения (9) систему из N периодических по x цепочек вихрей

$$\zeta(z, t) = e^{-2iN^2 t} \prod_{k=1}^N \sin(z - z_k(t)), \quad (19)$$

так что положения вихрей удовлетворяют системе уравнений первого порядка

$$\dot{z}_k = 2i \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \operatorname{ctg}(z_k - z_l). \quad (20)$$

Дифференцируя эту систему один раз по времени, получаем уравнения движения второго порядка, которые имеют вид уравнений Ньютона

$$\ddot{z}_k = 32 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \frac{\operatorname{ctg}(z_k - z_l)}{\sin^2(z_k - z_l)} \quad (21)$$

с функцией Гамильтона модели Калоджеро–Мозера типа II [10]

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N p_k^2 + \sum_{k < l}^N \frac{16}{\sin^2(z_k - z_l)}. \quad (22)$$

Для периодических по y решеток

$$\zeta(z, t) = e^{2iN^2 t} \prod_{k=1}^N \operatorname{sh}(z - z_k(t)) \quad (23)$$

мы получаем модель Калоджеро–Мозера типа III:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N p_k^2 + \sum_{k < l}^N \frac{16}{\operatorname{sh}^2(z_k - z_l)}. \quad (24)$$

5. КОМПЛЕКСНАЯ ГРУППА ГАЛИЛЕЯ И ГЕНЕРАЦИЯ ВИХРЕЙ

Комплексная группа Галилея порождается алгеброй

$$[P_0, P_z] = 0, \quad [P_0, K] = 4iP_z, \quad [P_z, K] = -i, \quad (25)$$

где $P_0 = -i\partial_t$ и $P_z = -i\partial_z$ – операторы энергии и импульса, соответственно, а $K = z + 4it\partial_z$ – оператор галилеева буста. Оператор Шредингера $S = i\partial_t + 2\partial_z^2$ отвечает

дисперсионному соотношению $P_0 = -2P_z^2$ и коммутирует с операторами группы Галилея:

$$[P_0, S] = 0, \quad [P_z, S] = 0, \quad [K, S] = 0. \quad (26)$$

Из теории динамических симметрий известно, что если существует оператор W такой, что

$$[S, W] = 0 \Rightarrow S(W\Phi) = W(S\Phi) = 0, \quad (27)$$

то этот оператор преобразует решение Φ уравнения Шредингера в другое его решение $W\Phi$. Это показывает, что генераторы группы Галилея дают динамические симметрии уравнения. Две из них очевидны: трансляция по времени $P_0: e^{it_0 P_0} \Phi(z, t) = \Phi(z, t + t_0)$ и трансляция в комплексном пространстве $P_z: e^{it_0 P_z} \Phi(z, t) = \Phi(z + z_0, t)$. В то же время галилеев буст порождает новый нуль (новый вихрь в $\mathbb{C}$):

$$\Psi(z, t) = K\Phi(z, t) = (z + 4it\partial_z)\Phi(z, t). \quad (28)$$

Начиная с тривиального решения $\Phi = 1$, мы имеем цепочку n -вихревых решений $K \cdot 1 = z = H_1(z, 2it)$, $K^2 \cdot 1 = z^2 + 4it = H_2(z, 2it)$, $K^3 \cdot 1 = z^3 + 12it = H_3(z, 2it)$, $\dots$, $K^n \cdot 1 = H_n(z, 2it)$, выраженных через полиномы Кампе де Ферье [14]

$$H_n(z, it) = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(it)^k z^{n-2k}}{k!(n-2k)!}. \quad (29)$$

Эти полиномы удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} H_{n+1}(z, it) &= \left(z + 2it \frac{\partial}{\partial z} \right) H_n(z, it), \\ \frac{\partial}{\partial z} H_n(z, it) &= n H_{n-1}(z, it) \end{aligned} \quad (30)$$

и могут быть выражены через полиномы Эрмита:

$$H_n(z, 2it) = (-2it)^{n/2} H_n\left(\frac{z}{2\sqrt{-2it}}\right). \quad (31)$$

Пусть $w_n^{(k)}$ – k -й нуль полинома Эрмита, $H_n(w_n^{(k)}) = 0$, тогда эволюция соответствующего вихря дается формулой

$$z_k(t) = 2w_n^{(k)} \sqrt{-2it}. \quad (32)$$

При отражении времени $t \rightarrow -t$ вихрь меняет свое положение: поворачивается на 90° , $z_k \rightarrow z_k e^{i\pi/2}$. Такое отображение является также симметрией вихревых уравнений (15). Используя формулу

$$H_n(z, 2it) = \exp\left(it \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) z^n \quad (33)$$

и принцип суперпозиции, имеем решение

$$\Phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(z, 2it) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\left(2it \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) z^n = \exp\left(2it \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Таким образом, если $\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – произвольная аналитическая функция, то $\Phi(z, t) = \exp(2it \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \chi(z)$ – решение, определяемое интегралами движения $a_0, a_1, \dots$. Поэтому для полинома степени n , описывающего эволюцию n вихрей, мы имеем n комплексных интегралов движения.

Производящая функция полиномов Кампе де Ферье

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} H_n(z, it) = e^{kz + ik^2 t} \quad (34)$$

также является решением типа плоской волны. Если экспоненту галилеева буста $e^{i\lambda K} = e^{i\lambda(z + 4it\partial_z)}$ разложить на множители по формуле Бейкера–Хаусдорфа $e^{A+B} = e^B e^A e^{\frac{1}{2}[A, B]}$, так что $e^{i\lambda K} = e^{i\lambda z + 2i\lambda^2 t} e^{-4\lambda t \partial_z}$, то применение полученного оператора к решению $\Phi(z, t)$ дает

$$e^{i\lambda K} \Phi(z, t) = e^{i\lambda z + 2i\lambda^2 t} \Phi(z - 4\lambda t, t) \quad (35)$$

– галилеев буст, соответствующий скорости 4λ , в котором производящая функция вихрей (34) появляется в качестве 1-коцикла.

Галилеев буст (28), связывающий два решения голоморфного уравнения Шредингера (9), порождает автопреобразование Беклунда

$$v = u + \frac{i\Gamma}{2\pi} \partial_{\bar{z}} \ln \left(\bar{z} - \frac{8\pi t}{\Gamma} u \right) \quad (36)$$

между двумя решениями

$$u(\bar{z}, t) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{\Phi}_{\bar{z}}}{\bar{\Phi}}, \quad v(\bar{z}, t) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{\Psi}_{\bar{z}}}{\bar{\Psi}} \quad (37)$$

антиголоморфного уравнения Бюргерса (12).

Рассмотрим в качестве примера решение типа двойной решетки

$$\zeta(z, t) = e^{-8it} \sin(z - z_1(t)) \sin(z + z_1(t)), \quad (38)$$

где $\cos 2z_1 = r e^{8it}$, r – константа. Применяя преобразование буста (28), имеем решение, описывающее взаимодействие вихря с двойной решеткой:

$$\Psi(z, t) = \left(z + 4it \frac{\partial}{\partial z} \right) \zeta(z, t). \quad (39)$$

Обобщение дает N вихрей, взаимодействующих с M вихревыми решетками,

$$\Psi(z, t) = e^{iMt} \left(z + 4it \frac{\partial}{\partial z} \right)^N \prod_{k=1}^M \sin(z - z_k(t)), \quad (40)$$

где $z_1, \dots, z_k$ подчиняются системе (20).

6. АБЕЛЕВА ТЕОРИЯ ЧЕРНА–САЙМОНСА И КОМПЛЕКСНАЯ ИЕРАРХИЯ БЮРГЕРСА

Покажем теперь, как антиголоморфная иерархия Бюргерса возникает в калибровочной теории поля Черна–Саймонса. Функционал Черна–Саймонса определен

следующим образом:

$$S(A) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} A \wedge dA = \frac{\kappa}{4\pi} \int \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu F_{\nu\lambda} d^3x, \quad (41)$$

где $\mathcal{M}$ – ориентированное трехмерное многообразие, A – $U(1)$ -калибровочная связность, κ – константа связи (статистический параметр). При каноническом подходе $\mathcal{M} = \Sigma_2 \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ интерпретируется как время. Тогда $A_\mu = (A_0, A_i)$, $i = 1, 2$, где A_0 – временная компонента, а действие имеет вид

$$S = -\frac{\kappa}{4\pi} \int dt \int_{\Sigma} \epsilon^{ij} \left(A_i \frac{d}{dt} A_j - A_0 F_{ij} \right) d^2x. \quad (42)$$

В формализме первого порядка скобки Пуассона имеют вид

$$\{A_i(x), A_j(y)\} = \frac{4\pi}{\kappa} \epsilon_{ij} \delta(x - y), \quad (43)$$

а гамильтониан равен $H = A_0 \epsilon^{ij} F_{ij}$. Гамильтониан слабо обращается в нуль, $H \approx 0$, в силу ограничения, связанного с законом Гаусса, в теории Черна–Саймонса

$$\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = 0 \Leftrightarrow F_{ij} = 0. \quad (44)$$

В таком случае эволюция определяется посредством множителей Лагранжа A_0 : $\partial_0 A_1 = \partial_1 A_0$, $\partial_0 A_2 = \partial_2 A_0$. Чтобы уничтожить произвол, связанный с калибровочным преобразованием $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$, используем кулоновскую калибровку $\text{div } \vec{A} = 0$. Кроме того, в теории Черна–Саймонса имеет место закон Гаусса (44): $\text{rot } \vec{A} = 0$. Эти два уравнения идентичны уравнениям гидродинамики несжимаемой и безвихревой жидкости. Решая первое уравнение в терминах потенциала скорости φ : $A_k = \partial_k \varphi$, $k = 1, 2$, и второе – в терминах функции тока ψ : $A_1 = \partial_2 \psi$ и $A_2 = -\partial_1 \psi$, получаем уравнения Коши–Римана: $\partial_1 \varphi = \partial_2 \psi$, $\partial_2 \varphi = -\partial_1 \psi$. Таким образом, две эти функции являются гармонически сопряженными, и комплексный потенциал $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ является аналитической функцией переменной $z = x + iy$: $\partial f / \partial \bar{z} = 0$. Соответствующий “комплексный калибровочный потенциал” $A = A_1 + iA_2 = \overline{f'(z)}$ является антианалитической функцией. По аналогии с гидродинамикой логарифмические сингулярности комплексного потенциала

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln(z - z_k(t)) \quad (45)$$

определяют полюсы комплексного калибровочного поля

$$A = \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{\bar{z} - \bar{z}_k(t)}, \quad (46)$$

описывая точечные вихри в плоскости. Тогда соответствующее “статистическое” магнитное поле

$$B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -\Delta \psi = -\Delta \text{Im } f(z), \quad (47)$$

где Δ – оператор Лапласа, определяемое функцией тока

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln |z - z_k(t)|, \quad (48)$$

равно

$$B = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \Delta \ln |z - z_k(t)| = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t)). \quad (49)$$

Соответствующий полный магнитный поток равен

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int B d^2x = \sum_{k=1}^N \iint \Gamma_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) d^2x = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_N. \quad (50)$$

Соотношение (49) может интерпретироваться как закон Гаусса в теории Черна–Саймонса:

$$B = \frac{1}{\kappa} \bar{\psi} \psi = \frac{1}{\kappa} \rho \quad (51)$$

для точечных частиц, расположенных в точках $\vec{r}_k(t)$, с плотностью

$$\rho = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) \quad (52)$$

(с массами $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$). Тогда магнитные потоки накладываются на частицы, так что последние приобретают статистику энионов. В результате интегрируемая эволюция сингулярностей (вихрей) комплексного калибровочного поля приводит к интегрируемой эволюции энионов. Эволюция антиголоморфного комплексного калибровочного потенциала определяется уравнением $\partial_0 A = 2\partial_{\bar{z}} A_0$, в котором, как видно, функция A_0 является гармонической, $\Delta A_0 = 0$, и задается формулой $A_0 = [F_0(\bar{z}, t) + \bar{F}_0(z, t)]/2$. Поэтому эволюционное уравнение имеет вид

$$\partial_0 A = \partial_{\bar{z}} F_0. \quad (53)$$

Пусть

$$F_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F_0^{(n)}(\bar{z}, t), \quad (54)$$

где

$$F_0^{(n)}(\bar{z}, t) = (\partial_{\bar{z}} + A(\bar{z}, t))^n \cdot 1. \quad (55)$$

Тогда для произвольного положительного числа n мы имеем антиголоморфную иерархию Бюргерса

$$\partial_{t_n} A(\bar{z}, t) = \partial_{\bar{z}} [(\partial_{\bar{z}} + A(\bar{z}, t))^n \cdot 1]. \quad (56)$$

Используя оператор рекурсии $R = \partial_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} A \partial_{\bar{z}}^{-1}$, запишем эту иерархию в виде

$$\partial_{t_n} A = R^{n-1} \partial_{\bar{z}} A. \quad (57)$$

Данная иерархия может быть линеаризована с помощью антиголоморфного преобразования Коула–Хопфа для комплексного калибровочного поля

$$A = \frac{\bar{\Phi}_{\bar{z}}}{\bar{\Phi}} = (\ln \bar{\Phi})_{\bar{z}} = \overline{(f(z, t))_{\bar{z}}} \quad (58)$$

и принимает вид голоморфной иерархии Шредингера (теплопроводности)

$$\partial_{t_n} \Phi = \partial_z^n \Phi. \quad (59)$$

Для $n = 2$ второй член иерархии есть просто уравнение (9), и нули этого уравнения соответствуют вихрям модели Ишимори. Соотношение между функцией Φ и комплексным потенциалом f имеет смысл представления Маделунга для этой иерархии:

$$\Phi(z, t) = e^{f(z, t)} = e^{\varphi + i\psi} = (e^\varphi) e^{i\psi} = \sqrt{\rho} e^{i\psi}. \quad (60)$$

Поэтому иерархия уравнений для функции f представляет собой запись Маделунга голоморфной иерархии Шредингера,

$$\partial_{t_n} f = (\partial_z + \partial_z f)^n \cdot 1 = e^{-f} \partial_z^n e^f, \quad (61)$$

или

$$\partial_{t_n} (e^f) = \partial_z^n (e^f), \quad (62)$$

что есть потенциальная иерархия Бюргерса. Для иерархии Бюргерса мы имеем следующую линейную задачу:

$$\Phi_z = \bar{A}\Phi, \quad \Phi_{t_n} = \partial_z^n \Phi. \quad (63)$$

Эта задача может быть записана как представление абелевой нулевой кривизны для голоморфной иерархии Бюргерса, $\partial_{t_n} U - \partial_z V_n = 0$, где $U = A$, $V_n = (\partial_z + A)^n \cdot 1$. В случае N вихрей одинаковой интенсивности

$$\Phi(z, t) = e^f = \prod_{k=1}^N (z - z_k(t)) \quad (64)$$

положения вихрей соответствуют нулям функции $\Phi(z, t)$. В результате динамика вихрей, приводящая к интегрируемой динамике энионов, связана с движением нулей, которое в случае $n = 2$ подчиняется вихревым уравнениям (15), а в случае произвольного n — уравнениям

$$-\frac{dz_k(t_n)}{dt_n} = \text{Res}_{|z=z_k} \left(\partial_z + \sum_{l=1}^N \frac{1}{z - z_l(t_n)} \right)^n \cdot 1, \quad k = 1, \dots, N. \quad (65)$$

7. ИЕРАРХИЯ ГРУППЫ ГАЛИЛЕЯ И ВИХРЕВЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим теперь комплексную иерархию группы Галилея

$$[P_0, P_z] = 0, \quad [P_0, K_n] = i^n n P_z^{n-1}, \quad [P_z, K_n] = -i, \quad (66)$$

где иерархия преобразований буста порождается генератором $K_n = z + nt \partial_z^{n-1}$, коммутирующим с оператором n -го уравнения голоморфной иерархии Шредингера

$$S_n = \partial_t - \partial_z^n. \quad (67)$$

В результате применение оператора K_n к решению Φ порождает решение с дополнительным вихрем:

$$\Psi(z, t) = K_n \Phi(z, t) = (z + nt \partial_z^{n-1}) \Phi(z, t). \quad (68)$$

В частности, имеем $K_n \cdot 1 = z = H_1^{(n)}(z, t)$, $K_n^2 \cdot 1 = z^2 = H_2^{(n)}(z, t)$, ..., $K_n^{n-1} \cdot 1 = z^{n-1} = H_{n-1}^{(n)}(z, t)$, $K_n^n \cdot 1 = z^n + n!t = H_n^{(n)}(z, t)$, ..., $K_n^m \cdot 1 = H_m^{(n)}(z, t)$, где обобщенные полиномы Кампе де Ферье [15]

$$H_m^{(n)}(z, t) = m! \sum_{k=0}^{[m/n]} \frac{t^k z^{m-nk}}{k!(m-nk)!} \quad (69)$$

удовлетворяют голоморфной иерархии Шредингера (59)

$$\frac{\partial}{\partial t} H_m^{(n)}(z, t) = \partial_z^n H_m^{(n)}(z, t). \quad (70)$$

Производящая функция дается выражением

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{m!} H_m^{(n)}(z, t) = e^{kz + k^n t}. \quad (71)$$

Из операторного представления

$$H_n^{(N)}(z, t) = \exp\left(t \frac{\partial^N}{\partial z^N}\right) z^n \Rightarrow \Phi(z, t) = \exp\left(t \frac{\partial^N}{\partial z^N}\right) \psi(z) \quad (72)$$

мы имеем решение уравнений иерархии (59) в терминах произвольной аналитической функции ψ . Полиномы $H_m^{(N)}(z, t)$ связаны с обобщенными полиномами Эрмита $H_m^{(N)}(x)$ [16]:

$$H_m^{(N)}(z, t) = t^{[m/N]} H_m^{(N)}\left(\frac{z}{\sqrt[N]{t}}\right). \quad (73)$$

В таком случае k -й нуль $w_n^{(N)k}$ обобщенного полинома Эрмита $H_n^{(N)}$ определяет эволюцию соответствующего вихря:

$$H_n^{(N)}(w_n^{(N)k}) = 0 \Rightarrow z_k(t) = w_n^{(N)k} \sqrt[N]{t}. \quad (74)$$

Нули расположены на окружностях (с зависящими от времени радиусами) в плоскости. При отражении $t \rightarrow -t$ положение вихря изменяется следующим образом: $z_k \rightarrow z_k e^{i\pi/N}$ (поворачивается на соответствующий угол). Иерархия галилеева буста (68) дает преобразование Беклунда для n -го члена антиголоморфной иерархии Бюргерса (56)

$$v = u + \partial_z \ln[z + Nt(\partial_z + u)^{N-1} \cdot 1]. \quad (75)$$

8. ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ИЕРАРХИЯ БЮРГЕРСА

Голоморфная иерархия Шредингера и соответствующая иерархия Бюргерса могут быть аналитически продолжены в область отрицательных значений N . Вводя оператор отрицательной производной (псевдодифференциальный оператор) ∂_z^{-1} , так что $\partial_z^{-m} z^n = z^{n+m}/((n+1) \dots (n+m))$, имеем иерархию

$$\partial_{t-n} \Phi = \partial_z^{-n} \Phi, \quad (76)$$

или, дифференцируя n раз, получаем в чисто дифференциальном виде $\partial_{t_{-n}} \partial_z^n \Phi = \Phi$. В терминах поля A , определяемого формулой (58), имеем отрицательную иерархию Бюргерса

$$\partial_{t_{-n}} A = \partial_{\bar{z}} \frac{1 - \partial_{t_{-n}} A^n}{A^n}. \quad (77)$$

При $n = 1$ получаем уравнение $\partial_{t_{-1}} \Phi = \partial_z^{-1} \Phi$ или уравнение Гельмгольца $\partial_{t_{-1}} \partial_z \Phi = \Phi$. Аналитическое продолжение обобщенных полиномов Кампе де Фейрье для $n = -1$ задается формулой [15]

$$H_M^{(-1)}(z, t) = M! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k z^{M+k}}{k!(M+k)!}. \quad (78)$$

Поэтому имеем

$$H_M^{(-1)}(z, t) = e^{t\partial_z^{-1}} H_M^{(-1)}(z, 0), \quad H_M^{(-1)}(z, 0) = z^M. \quad (79)$$

Кроме того, функции высшего порядка порождаются “отрицательным галилеевым бустом”

$$H_M^{(-1)}(z, t) = (z - t\partial_z^{-2})^M H_0^{(-1)}(z, t). \quad (80)$$

Функции $H_M^{(-1)}(z, t)$ связаны с функциями Бесселя [15]. Прежде всего, они прямо связаны с функциями Трикоми

$$C_M(zt) = \frac{z^{-M}}{M!} H_M^{(-1)}(z, t), \quad (81)$$

которые определяются производящей функцией

$$\sum_{M=-\infty}^{\infty} \lambda^M C_M(x) = e^{\lambda+x/\lambda} \quad (82)$$

и связаны с функциями Бесселя формулой

$$J_M(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^M C_M\left(-\frac{x^2}{4}\right). \quad (83)$$

Поэтому имеем в явном виде

$$H_M^{(-1)}(z, t) = M! \left(\frac{-z}{t}\right)^{M/2} J_M(2\sqrt{-zt}). \quad (84)$$

Это дает решение уравнения Бюргерса для первого отрицательного потока (-1) $\partial_t A = \partial_{\bar{z}}(1 - \partial_t A)/A$ в виде

$$A = \frac{(H_M^{(-1)}(\bar{z}, t))_{\bar{z}}}{H_M^{(-1)}(\bar{z}, t)} = \frac{M}{2\bar{z}} + \sqrt{\frac{t}{-\bar{z}}} \frac{J'_M}{J_M} = \sqrt{\frac{t}{-\bar{z}}} \frac{J_{M-1}(2\sqrt{-\bar{z}t})}{J_M(2\sqrt{-\bar{z}t})}. \quad (85)$$

Для произвольного члена отрицательной иерархии имеем

$$\begin{aligned} H_M^{(-N)}(z, t) &= e^{t\partial_z^{-N}} H_M^{(-N)}(z, 0), \\ H_M^{(-N)}(z, 0) &= z^M \end{aligned} \quad (86)$$

и соотношение

$$W_M^{(N)}(zt^{1/N}) = \frac{z^{-M}}{M!} H_M^{(-N)}(z, t), \quad (87)$$

где функции Райта–Бесселя $W_M^{(N)}(x)$ [15] задаются производящей функцией:

$$\sum_{M=-\infty}^{\infty} \lambda^M W_M^{(N)}(x) = e^{\lambda+x/\lambda^N}. \quad (88)$$

9. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ НЕКОММУТАТИВНОСТЬ

Рассмотрим теперь влияние пространственно-временной некоммутативности на динамику вихрей. Примечательно, что для двух вихрей задача может быть решена явно. Некоммутативное уравнение Бюргерса, его линеаризация при помощи преобразования Коула–Хопфа и двухсолитонные столкновения были рассмотрены в работе [17]. Рассмотрим здесь голоморфное уравнение теплопроводности

$$\partial_t \Phi = \nu \partial_z^2 \Phi \quad (89)$$

с двухвихревым решением вида

$$\Phi(z, t) = (z - z_1(t)) * (z - z_2(t)), \quad (90)$$

где произведение Мойалла определено следующим образом:

$$\begin{aligned} f(t, z) * g(t, z) &= e^{i\theta(\partial_t \partial_{z'} - \partial_{t'} \partial_z)} f(t, z) g(t', z')|_{z=z', t=t'} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (\partial_t^{n-k} \partial_z^k f) (\partial_t^k \partial_z^{n-k} g). \end{aligned} \quad (91)$$

Тогда мы имеем θ -деформированные вихревые уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{-2\nu}{z_1 - z_2} - i\theta \frac{\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2}{z_1 - z_2}, \\ \dot{z}_2 &= \frac{2\nu}{z_1 - z_2} + i\theta \frac{\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2}{z_1 - z_2}. \end{aligned} \quad (92)$$

Складывая эти уравнения, получаем первый интеграл движения $z_1 + z_2 = C$ – центр масс. Выбирая начало координат в центре масс, имеем $C = 0$ и $z_2 = -z_1$. Интегрируя редуцированное уравнение для z_1 и подставляя $z_1 = 2i\theta Y(t)$, получаем уравнение Риккати

$$\dot{Y} + Y^2 = \frac{\nu}{2\theta^2} (t - t_0). \quad (93)$$

Подстановка $Y = \dot{\psi}/\psi$ линеаризует это уравнение и сводит его к уравнению Эйри

$$\ddot{\psi} = \frac{\nu}{2\theta^2} (t - t_0) \psi. \quad (94)$$

Решение дается формулой

$$z_1(t) = 2i\theta\beta \frac{\text{Ai}'(\beta(t - t_0))}{\text{Ai}(\beta(t - t_0))} = -i\sqrt{2\nu(t - t_0)} \frac{K_{2/3}(\frac{\sqrt{2\nu}}{3\theta}(t - t_0)^{3/2})}{K_{1/3}(\frac{\sqrt{2\nu}}{3\theta}(t - t_0)^{3/2})}, \quad (95)$$

где $\beta = (\nu/(2\theta^2))^{1/3}$, а K_n – модифицированные функции Бесселя дробного порядка. Это решение следует сравнить с недеформированным решением (32). Некоммутативные поправки возникают из отношения двух функций Бесселя, зависящих от θ . Используя асимптотики для функции Эйри, получаем поправку в виде

$$z_1(t) = -z_2(t) \approx -i\sqrt{2\nu(t-t_0)} - \frac{i\theta}{2(t-t_0)} \quad (96)$$

при $t \rightarrow +\infty$. Нетрудно видеть, что поправка не зависит от коэффициента диффузии и имеет глобальный характер.

Благодарности. Данная работа была частично поддержана TUBITAK, грант № 106T447.

Список литературы

- [1] G. E. Volovik, *J. Phys. C*, **20** (1987), L83–L87.
- [2] L. Martina, O. K. Pashaev, G. Soliani, *J. Phys. A*, **27** (1994), 943–954.
- [3] N. D. Mermin, Т. Но, *Phys. Rev. Lett.*, **36**:11 (1976), 594–597; *Phys. Rev. B*, **21**:11 (1980), 5190–5197.
- [4] Л. Мартина, О. К. Пашаев, Г. Солиани, *ТМФ*, **99** (1994), 462–470.
- [5] Y. Ishimori, *Progr. Theor. Phys.*, **72**:1 (1984), 33–37.
- [6] М. А. Ларентьев, Б. В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Наука, М., 1973.
- [7] D. V. Choodnovsky, G. V. Choodnovsky, *Nuovo Cimento B* (11), **40**:2 (1977), 339–353.
- [8] F. Calogero, *Nuovo Cimento B* (11), **43**:2 (1978), 177–241.
- [9] F. Calogero, D. Gómez-Ullate, P. M. Santini, M. Sommacal, *J. Phys. A*, **38** (2005), 8873–8896.
- [10] А. М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Наука, М., 1990.
- [11] F. Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments*, Lecture Notes in Phys. New Ser. m Monogr., **66**, Springer, Berlin, 2001.
- [12] A. B. Abanov, P. B. Wiegmann, *Phys. Rev. Lett.*, **95** (2005), 076402.
- [13] A. Bonami, F. Bouchut, E. Cépa, D. Lépingle, *J. Funct. Anal.*, **165** (1999), 390–406.
- [14] G. Dattoli, P. L. Ottaviani, A. Torre, L. Vázquez, *Riv. Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis.* (4), **20** (1997), 1–133.
- [15] G. Dattoli, P. E. Ricci, C. Cesarano, *Appl. Anal.*, **80** (2001), 379–384.
- [16] H. M. Srivastava, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **38** (1976), 457–461.
- [17] L. Martina, O. K. Pashaev, “Noncommutative Burgers’ equation”, *Nonlinear Physics: Theory and Experiment. II* (Gallipoli, Italy, 2002), eds. M. J. Ablowitz et al., World Scientific, River Edge, NJ, 2003, 83–88.