Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, Б. Б. Шойхет, Градуированные алгебры Ли, подалгебра Картана которых есть алгебра многочленов одной переменной, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 2, 345–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf608>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:42:18

© 2000 г.

А. М. Вершик*, Б. Б. Шойхет†

ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, ПОДАЛГЕБРА КАРТАНА КОТОРЫХ ЕСТЬ АЛГЕБРА МНОГОЧЛЕНОВ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определяется класс бесконечномерных алгебр Ли, которые обобщают универсальную обертывающую алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ как алгебры Ли. Эти алгебры представляют собой частный случай $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр Ли с непрерывной системой корней, а именно их подалгебра Картана является алгеброй полиномов одной переменной. Непрерывный предел таких алгебр задает новые скобки Пуассона на алгебраических поверхностях.

Памяти М. В. Савельева

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{A} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ — $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра Ли с непрерывной системой корней в смысле работ [1–3]. В таких алгебрах подалгебра Картана A_0 в соответствии с определением является коммутативной, вообще говоря бесконечномерной, алгеброй, а сама алгебра $\mathbf{A}$ вполне определяется линейным оператором, действующим в алгебре Картана, — оператором Картана $K: A_0 \rightarrow A_0$. В класс таких алгебр входят многие бесконечномерные алгебры Ли (синус-алгебра, скрещенные произведения и др.). В работах М. В. Савельева и А. М. Вершика, где они были определены, приведены различные примеры и даны мотивировки, в частности связанные с теорией интегрируемых и динамических систем.

В работе [4] поставлен вопрос об описании всех алгебр Ли $\mathbf{A}$ этого типа, у которых подалгебра Картана A_0 как коммутативная алгебра есть алгебра полиномов одной переменной $\mathbb{C}[h]$, а сама алгебра $\mathbf{A}$ имеет *постоянный рост*, т.е. все A_i как векторные пространства канонически изоморфны A_0 . Фактически задача состоит в описании соответствующих операторов Картана $K: \mathbb{C}[h] \rightarrow \mathbb{C}[h]$.

В настоящей работе мы формулируем ответ на этот вопрос для алгебр Ли серии A . В этом случае алгебры $\mathbf{A}$ общего положения есть алгебры Ли, ассоциированные с ассоциативными алгебрами, и поэтому задача сводится к описанию некоторых ассоциативных

* Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

† Независимый московский университет, Москва, Россия

алгебр; кроме того, имеется серия вырожденных алгебр, являющихся пределами алгебр общего положения. Интересен сам ответ: алгебры общего положения параметризуются коциклами – они суть нерасщепимые в общем случае скрещенные произведения с нетривиальным 2-коциклом алгебры полиномов и групповой алгебры группы $\mathbb{Z}$, которая действует на полиномах сдвигами аргумента, при этом классы когомологических коциклов находятся в биективном соответствии с полиномами в нормальной форме (старший коэффициент – единица, следующий – нуль). Типичный пример таких алгебр – алгебры Фейгина $gl(\lambda)$ [5], получающиеся факторизацией универсальной обертывающей алгебры $Usl(2)$ при специализации центра (оператора Казимира). Соответствующий коцикл в этом случае есть квадратичный полином. Эти алгебры и модули над ними подробно рассмотрены в работе [6]. Оказалось, что точка зрения теории алгебр с непрерывными системами корней немедленно приводит к обобщению этих алгебр и к общему ответу на поставленный вопрос.

Особенно интересными оказываются вырожденные алгебры, ниже они лишь названы, а будут подробно рассмотрены в другой работе. Эти алгебры Ли задают новые симплектические структуры (скобки Пуассона) на алгебраических поверхностях.

В статьях [7–9], на которые нам любезно указали Б. Бакалов и Ж. Диксмье после того, как эта работа была рассказана в IHES (Франция), рассмотрены сходные ассоциативные алгебры, обобщающие универсальную обертывающую алгебру $Usl(2)$, в частности, в работе [9] для них доказана теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта. Исследуемые нами алгебры Ли общего положения суть ассоциированные с ними алгебры Ли, факторизованные по значению центрального элемента. Отличие нашего подхода состоит в том, что мы, во-первых, систематически рассматриваем соответствующие алгебры Ли, во-вторых, следуя работе [3], даем описание ассоциативных алгебр, с которыми они ассоциированы, как скрещенных произведений с коциклом, и, в-третьих, что наиболее важно, находим вырожденные алгебры, которые не могут быть описаны в терминах ассоциативных алгебр и, видимо, до сих пор не рассматривались.

Отметим также, что в работе [10] и некоторых других изучается алгебра псевдодифференциальных операторов на окружности, которая также укладывается в рамки общей теории непрерывных систем корней и подалгебра Картана которой есть алгебра полиномов Лорана. Применительно к ней также может быть поставлен вопрос об описании всех алгебр постоянного роста, ответ на который пока неизвестен. Наконец, Б.Л. Фейгин сообщил нам, что и он изучал вопросы, близкие к обсуждаемым в этой работе.

В разделе 2 мы описываем ассоциативные алгебры сначала с помощью образующих и соотношений, а затем как, вообще говоря, нерасщепимое, скрещенное произведение подалгебры Картана и группы $\mathbb{Z}$ с некоторым 2-коциклом. Соответствующие алгебры Ли и есть алгебры общего положения из искомого списка.

В разделе 3 мы напоминаем определения градуированных алгебр с непрерывной системой корней [1–3] и приводим общий вид операторов Картана, в частности предельные операторы Картана, являющиеся дифференциальными операторами второго порядка. С их помощью можно определить скобки Пуассона на специальных алгебраических по-

верхностях, которые являются линиями уровня элементов Казимира, симплектически-ми листами для соответствующих 2-форм.

2. ОПИСАНИЕ АЛГЕБР ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ КАК АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

2.1. Определение ассоциативных алгебр. Рассмотрим ассоциативные алгебры $L_{T,t}$ с единицей над полем $\mathbb{C}$, с тремя образующими f, e, h и соотношениями

$$[h, e] \equiv he - eh = te, \quad (1a)$$

$$[h, f] \equiv hf - fh = -tf, \quad (1б)$$

$$ef = T(h), \quad (1в)$$

где T – некоторый фиксированный ненулевой полином от h , рассматриваемый как элемент алгебры $\mathbb{C}[h]$, а $t \neq 0$ – комплексное число. Из ассоциативности $(e(fe) = (ef)e)$ немедленно следует, что $fe = T(h + tI)$ (I – единица алгебры). Другое следствие состоит в том, что для любого полинома $r(h)$ выполнены коммутационные соотношения

$$r(h) \cdot e = e \cdot r(h + t), \quad r(h) \cdot f = f \cdot r(h - t).$$

Если $T \equiv 1$, то эта алгебра есть полупрямое произведение группы $\mathbb{Z}$ на алгебру $\mathbb{C}[h]$, причем группа $\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{C}[h]$ сдвигами аргумента h , кратными t .

Если $T(h) = h$, $t = 1$, то соответствующая алгебра изоморфна алгебре полиномиальных дифференциальных операторов одной переменной, порожденной дифференцированием d и умножением на переменную x с соотношением $dx - xd = I$.

Если $T(h) = (1/2)(h^2 - h + \lambda(\lambda + 2))$, $t = 2$, то $L_{T,2}$ есть фактор-алгебра универсальной обертывающей алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ по идеалу, порожденному элементом $\Delta = (1/2)\lambda(\lambda + 2)$, где Δ – оператор Казимира (центральный элемент). Эти алгебры (как алгебры Ли, см. ниже) $gl(\lambda)$ рассматривал Фейгин [5] и подробно изучал Шойхет [6]. Случай произвольного полинома T , по-видимому, рассматривается впервые. Уже случай полинома третьей степени дает новые интересные алгебры Ли.

В работах [7–9] изучалась ассоциативная алгебра с теми же образующими e, f, h и соотношениями (1a) и (1б) (с $t = 1$), а вместо соотношения (1в) использовалось другое, более грубое:

$$[e, f] \equiv ef - fe = p(h). \quad (2)$$

Мы будем рассматривать произвольное ненулевое t и обозначать эти алгебры $U_{p,t}$. Они являются точным обобщением универсальной обертывающей алгебры $sl(2, \mathbb{C})$. Как показано в [9], для них выполнена теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта, т.е. мономы $e^i \cdot f^j \cdot h^k$ образуют линейный базис алгебры. Легко проверить, что центр алгебры порожден элементом

$$\Omega = ef + fe + u(h), \quad (3)$$

где u – полином, связанный с полиномом $p(h)$ соотношением

$$p(h) + p(h + t) = u(h) - u(h - t).$$

Это следует из центральности элемента Ω . Из сравнения соотношений (1в) и (2) следует, что полином $p(h)$ определяется полиномом $T(h)$ с точностью до константы:

$$p(h) = T(h) - T(h+t). \quad (4)$$

Степень полинома T на единицу выше степени p .

ТЕОРЕМА 1. *Алгебра $L_{T,t}$ есть фактор-алгебра алгебры $U_{p,t}$ по идеалу, порожденному центральным элементом $\Omega - c$, где c — некоторый комплексный скаляр.*

СЛЕДСТВИЕ 1. $T(h) = (1/2)(p(h) - u(h) + c)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО обоих фактов заключается в прямой проверке. Таким образом, полином T с точностью до свободного члена восстанавливается по полиному p , а его свободный член находится однозначно, если задать значение оператора Казимира Ω .

Ситуация в точности такая же, как и в случае $Usl(2, \mathbb{C})$, рассмотренном Фейгиным, тогда $p(h) = h$, $t = 2$, а T, u — квадратичные полиномы.

2.2. Скрещенные произведения с коциклом. Подойдем теперь к алгебрам $L_{T,t}$ с другой точки зрения. Рассмотрим на алгебре $\mathbb{C}[h]$ действие группы $\mathbb{Z}$ сдвигами аргумента (т.е. автоморфизмами алгебры) и обозначим оператор сдвига, отвечающий обр-зующей, через S_t , $(S_t f)(h) = f(h+t)$. Определим с помощью полинома T 2-коцикл α_T группы $\mathbb{Z}$ со значениями в мультипликативной полугруппе алгебры $\mathbb{C}[h]$, на которой группа $\mathbb{Z}$ действует автоморфизмами, следующим образом:

$$\alpha_T(+1, -1) = p(h) = T(h) - T(h+t), \quad \alpha_T(-1, +1) = p(h-t) = T(h-t) - T(h) \quad (5)$$

(второе соотношение следует из первого), кроме того, $\alpha_T(n, m) = 0$, если $n \cdot m \geq 0$. Этим коцикл α_T определен полностью.

ЛЕММА. *Два коцикла, отвечающие полиномам T_1 и T_2 , когомологичны тогда и только тогда, когда полиномы отличаются лишь множителем и сдвигом аргумента: $T_2 = c \cdot T_1(h+a)$, где $c \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из определений.

СЛЕДСТВИЕ 2: а) *классы когомологичных коциклов биективно соответствуют полиномам вида*

$$T(h) = h^n + b_1 h^{n-2} + \dots + b_{n-1};$$

б) *коцикл когомологичен нулю тогда и только тогда, когда T — константа.*

Заметим, что полиномы, отличающиеся свободным членом, определяют алгебры $L_{T,t}$, для которых полином p один и тот же, и, следовательно, они получаются специализацией одной и той же алгебры $U_{p,t}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть T — непостоянный полином, а $t \neq 0$. Тогда алгебра $L_{T,t}$ канонически изоморфна нерасщепляемому скрещенному произведению алгебры $\mathbb{C}[h]$ и действующей на ней сдвигами групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ с 2-коциклом α_T , определенным формулой (5).*

2.3. Алгебры Ли. Для нас важны не столько сами алгебры $L_{T,t}$, сколько алгебры Ли, ассоциированные с ними. Пусть F – ассоциативная алгебра, обозначим через $LieF$ алгебру Ли, совпадающую с F как векторное пространство со скобкой $ab - ba$ (ассоциированная алгебра Ли).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть сохранены предыдущие обозначения и полином T отличен от константы. Обозначим через $\mathcal{L}_{T,t}$ коммутант алгебры Ли $LieL_{T,t}$, т.е. алгебру Ли $[LieL_{T,t}, LieL_{T,t}]$, и назовем ее алгеброй общего положения типа A , порожденную подалгеброй Картана $\mathbb{C}[h]$ и соответствующим оператором Картана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Алгебра $\mathcal{L}_{T,t}$ $\mathbb{Z}$ -градуирована; если степень полинома $\deg T = n$, то ее нулевая компонента есть подпространство в $\mathbb{C}[h]$ коразмерности $n - 1$, в частности для квадратичного T это подпространство полиномов с нулевым свободным членом или, иначе, фактор-пространство по константам, а в общем случае это фактор по подпространству полиномов степени $n - 2$. Переход к коммутанту аналогичен переходу в классической теории алгебр Ли от gl к sl .

В следующем разделе мы добавим к этому списку вырожденные алгебры с подалгеброй Картана $\mathbb{C}[h]$ и некоторыми операторами Картана.

Заметим, что если полином T есть константа, т.е. $p = 0$, $ef = fe$, то соответствующая алгебра Ли есть расщепляющееся полупрямое произведение, а ассоциативная алгебра L_T является обычным (с тривиальным 2-коциклом) скрещенным произведением с нетранзитивным действием, поэтому пополнение этой алгебры имеет обширный центр.

3. ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ АЛГЕБР ЛИ И ОПЕРАТОРОВ КАРТАНА

3.1. Описание алгебр Ли общего положения. Опишем алгебры Ли типа A , у которых система простых корней есть вещественная прямая, а подалгебра Картана – алгебра $\mathbb{C}[h]$, и соотнесем их с алгебрами, определенными в разделе 2.

Напомним кратко основные определения $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр Ли с непрерывными системами корней; имеется несколько схем определений, мы примем наиболее удобную для наших целей (см. [1–3]).

Так же, как и в теории алгебр Каца–Мути (см. [11]), определим *локальную алгебру*. Локальная алгебра есть сумма трех векторных пространств $A_{-1} \oplus A_0 \oplus A_{+1}$. Дополнительное условие, отсутствующее за ненадобностью в случае конечномерных локальных алгебр, состоит в том, что каждое слагаемое есть гомоморфный, в частном случае изоморфный, образ некоторой одной и той же коммутативной ассоциативной алгебры E , в нашем конкретном случае алгебры полиномов от одной переменной $\mathbb{C}[h]$. Таким образом, говоря об A_0 как о подалгебре Картана алгебры Ли, мы одновременно имеем в виду ее структуру как ассоциативной коммутативной алгебры или структуру образа такой алгебры E .

Теперь мы можем обозначать элементы локальной алгебры, т.е. подпространств A_i , $i = 0, \pm 1$, соответственно через $X_i(\phi)$, $i = 0, \pm 1$, где $\phi \in E$, в нашем случае $\phi \in \mathbb{C}[h]$.

Скобки в локальной алгебре определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} [X_0(\phi), X_0(\psi)] &= 0, \\ [X_0(\phi), X_{\pm}(\psi)] &= \pm X_{\pm}(K\phi \cdot \psi), \\ [X_{+1}(\phi), X_{-1}(\psi)] &= X_0(\phi \cdot \psi). \end{aligned} \quad (6)$$

Умножение $(\phi \cdot \psi)$ есть умножение в алгебре $\mathbb{C}[h]$, а K – линейный оператор (оператор Картана), действующий в $\mathbb{C}[h]$, который ниже будет конкретизирован. Локальная алгебра является частичной алгеброй Ли, и корректность (тождество Якоби, в тех случаях, когда оно имеет смысл) проверяется непосредственно. Система корней есть по определению спектр ассоциативной коммутативной алгебры E , в нашем случае это $\mathbb{C}$.

Глобальная алгебра строится по локальной алгебре канонически, и построение полностью аналогично тому, как это делается для алгебр Каца–Мули [11]: сначала рассматривается свободная алгебра Ли, порожденная локальной алгеброй $\mathcal{F}_{T,t}$, а затем она факторизуется по максимальному нильпотентному идеалу, не пересекающемуся с подалгеброй Картана. Полученная градуированная алгебра Ли $\mathbf{A} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ называется *глобальной алгеброй в канонической форме, порожденной локальной алгеброй*.

Таким образом, алгебра $\mathbf{A}$ полностью определяется своей подалгеброй Картана, точнее, изоморфным образом алгебры E , как ассоциативной коммутативной алгебры, и оператором Картана, как линейным оператором в ней, т.е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(A_0, K).$$

Эта аксиоматика охватывает как классические простые алгебры Ли, так и алгебры Каца–Мули. В последнем случае мы получаем центральное расширение алгебры токов. В этих случаях мультипликативная структура алгебры Картана скрыта в самом определении (конечной) системы простых корней (в матрице Картана). В случае бесконечномерных алгебр Картана мультипликативная структура уже необходима (см. [1–3]).

Как и в классической теории, в теории алгебр Каца–Мули требование *постоянства роста* алгебры $\mathbf{A}$ ($A_i \cong A_0$) налагает сильнейшие условия на оператор Картана K .

Определим оператор Картана в нашем случае алгебр общего положения. Зафиксируем $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, ненулевой полином $T \in \mathbb{C}[h]$, обозначим через M_T оператор умножения на полином T , а через D_t – оператор второй разности:

$$\begin{aligned} M_T: \mathbb{C}[h] &\rightarrow \mathbb{C}[h], & (M_T r)(h) &= T(h) \cdot r(h), \\ D_t: \mathbb{C}[h] &\rightarrow \mathbb{C}[h], & (D_t r)(h) &= 2r(h) - r(h+t) - r(h-t), \end{aligned}$$

здесь $r \in \mathbb{C}[h]$. Определим оператор Картана $K_{T,t}$ формулой

$$K_{T,t} = D_t \cdot M_T,$$

т.е.

$$(K_{T,t} r)(h) = 2T(h)r(h) - T(h+t)r(h+t) - T(h-t)r(h-t).$$

Глобальные алгебры общего положения в изучаемой проблеме уже описаны в п. 3.1 в других терминах, а теперь мы дадим их новое определение. Основная теорема, сформулированная ниже, утверждает изоморфизм конструкций этого и предыдущего пунктов.

ТЕОРЕМА 3: а) глобальная алгебра Ли

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbb{C}[h], K_{T,t})$$

есть алгебра постоянного роста с алгеброй Картана $\mathbb{C}[h]$;

б) эта алгебра Ли канонически изоморфна алгебре $LieL_{T,t}$ (п. 2.3). При этом изоморфизме образующим алгебры e, h, f отвечают соответственно элементы $X_-(\hat{h}) \in A_{-1}$, $X_0(\hat{h}) \in A_0$, $X_+(\hat{h}) \in A_{+1}$, т.е. образы $\hat{h} \in \mathbb{C}[h]$ образующей алгебры $\mathbb{C}[h]$: $\hat{h}(h) = h$.

Заметим, что некоторые алгебры из этого списка изоморфны при разных значениях параметра t .

Оператор Картана позволяет легко получить некоторые свойства глобальной алгебры.

ЗАМЕЧАНИЕ 2: а) как мы отмечали, если $\deg T > 1$, то коммутант алгебры $LieL_{T,t}$ не совпадает с ней самой, т.е. алгебра в этом случае не проста;

б) ядро оператора Картана есть центр алгебры $LieL_{T,t}$, поэтому если $T = \text{const} \neq 0$, то алгебра $LieL_{T,t}$ имеет одномерный центр – константы подалгебры Картана, а при $\deg T = 1$ центр двумерен. Однако, как показывают соотношения (6), центр не есть прямое слагаемое, т.е. расширение фактор-алгебры не тривиально;

в) для квадратичного полинома T оператор Картана обратим и центр алгебры тривиален. Если степень $\deg T = n > 2$, то коядро оператора Картана имеет в $\mathbb{C}[h]$ размерность $n - 2$.

Аналогия между алгебрами $LieL_{T,t}$ и ее коммутантом $\mathcal{L}_{T,t}$, с одной стороны, и алгебрами gl и sl , с другой, становится более прозрачной.

3.2. Предельные алгебры. Описанные выше алгебры не исчерпывают всего списка. Теперь мы рассмотрим предельные алгебры. Для этого используем параметр t .

Положим

$$K_{T,t \rightarrow 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (K_{T,t})$$

(не путать с $K_{T,0}$), т.е. оператор Картана действует как дифференциальный оператор второго порядка:

$$(K_{T,t \rightarrow 0} r)(h) = -\frac{d^2}{dh^2} (T(h)r(h)).$$

Градуированными алгебрами Ли типа A по определению мы называем те из них, которые ассоциированы с ассоциативными алгебрами, и их пределы.

ТЕОРЕМА 4. Операторы Картана градуированных алгебр Ли типа A с подалгеброй Картана $\mathbb{C}[h]$ исчерпываются операторами

$$(K_{T,t} r)(h) = 2T(h)r(h) - T(h+t)r(h+t) - T(h-t)r(h-t)$$

и

$$(K_{T,t \rightarrow 0} r)(h) = -\frac{d^2}{dh^2} (T(h)r(h)).$$

Отметим несколько очевидных свойств предельных алгебр.

ПРИМЕР. Пусть $T(h)$ — квадратичный полином. Тогда соответствующая предельная алгебра реализуется как алгебра функций на двумерном гиперboloиде со скобкой Пуассона, порожденной стандартной симплектической структурой (скобка Ли–Березина–Кириллова).

Предельные алгебры уже не ассоциированы с какими-либо ассоциативными алгебрами, но поскольку по определению все допредельные алгебры получаются из алгебр $U_{p,t}$ и оператор Казимира (см. п. 2.1) определяется полиномом u , то и с предельными алгебрами связывается “виртуальный” оператор Казимира. В частности, гиперboloид в предыдущем примере появляется как линия уровня оператора Казимира в $Usl(2, \mathbb{C})$.

Оператор Казимира для любой предельной алгебры задается формулой (3), но нахождение полинома u упрощается: $u(\cdot)$ есть первообразная полинома (4). Поэтому уравнение симплектических листов как подмногообразий в $\mathbb{C}^3$ таково:

$$2xy - u(z) = \text{const}.$$

Полином u имеет ту же степень, что и T , и если его степень меньше трех, то отыскание симплектических листов тривиально, но и в общем случае это, по-видимому, конструктивно решаемая задача. Замечательно, что скобка Пуассона на них локальна (выполнено правило Лейбница), это следует из справедливости теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для предельных алгебр.

Вопрос о том, как реализовать общие предельные алгебры, будет рассмотрен особо.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 99-01-00098.

Список литературы

- [1] *M. Saveliev, A. Vershik.* Commun. Math. Phys. 1989. V. 126. P. 367–378.
- [2] *M. Saveliev, A. Vershik.* Phys. Lett. A. 1990. V. 143. № 3. P. 121–128.
- [3] *А. М. Вершик.* Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 6. С. 103–113.
- [4] *A. Vershik.* On classification of $\mathbb{Z}$ -graded Lie algebras of constant growth which have algebra $\mathbb{C}[h]$ as Cartan subalgebra. In: Lect. Notes Math. V. 1510. Quantum Groups. Proc. of Workshop Held in the Euler International Mathematical Institute, Leningrad, Fall 1990. Ed. P. P. Kulish. Berlin: Springer, 1992. P. 395.
- [5] *Б. Л. Фейзин.* УМН. 1988. Т. 43. № 2. С. 157–158.
- [6] *B. Shoihet.* J. Math. Sci. 1998. V. 92. № 2. P. 3764–3806.
- [7] *J. Dixmier.* J. Algebra. 1973. V. 24. P. 551–564.
- [8] *A. Josef.* Isr. J. Math. 1977. V. 28. № 3. P. 177–192.
- [9] *P. Smith.* Trans. Am. Math. Soc. 1990. V. 322. № 1. P. 285–314.
- [10] *V. Kač, H. Radul.* Commun. Math. Phys. 1993. V. 157. P. 429–457.
- [11] *В. Г. Кац.* Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.