Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Беккариа, К. Орликс, АдС/КТП-дуальность в режиме сильной связи, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 2, 213–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6082>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:38:29

© 2007 г.

М. Беккариа*, К. Ортикс*

АДС/КТП-ДУАЛЬНОСТЬ В РЕЖИМЕ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

Предел сильной связи в АДС/КТП-соответствии рассмотрен в рамках недавно предложенной фермионной формулировки уравнений анзаца Бете, задающих аномальные размерности в калибровочной теории. Приведены примеры состояний, не удовлетворяющих закону Губсера–Клебанова–Полякова в пределе большой 'т ховфтовской константы связи λ , что находится в противоречии с последними результатами, которые получены для уравнений Бете квантовой струны, выполняющихся в данном режиме. Этот результат показывает, что фермионная конструкция перестает быть справедливой при больших λ , хотя она и остается эффективным методом расчета разложений аномальных размерностей по слабой константе связи.

Ключевые слова: решеточные интегрируемые модели, АДС/КТП-соответствие, анзац Бете.

1. ВВЕДЕНИЕ

АДС/КТП-соответствие – это соотношение дуальности между теорией струны на многообразии $AdS_5 \times S^5$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теорией Янга–Миллса (СЯМ) [1]–[5]. В случае, когда число цветов $N \rightarrow \infty$ (планарный предел), это соответствие дает согласованность предсказаний конечной суперконформной четырехмерной теории и теории свободных струн в специальной геометрии. Обе стороны соотношения в общем случае не поддаются решению за исключением весьма специальных предельных случаев. Более подробно, соотношение дуальности отображает специальные массивные состояния струны в составные операторы калибровочной теории. Масса струнных состояний при этом равна аномальной размерности Δ в калибровочной теории. Нетривиальность обеих частей соответствия приводит к тому важнейшему обстоятельству, что при любой проверке АДС/КТП-соответствия необходимо рассматривать непертурбативный режим хотя бы в одной из сравниваемых теорий.

*Dipartimento di Fisica, Università di Lecce, Via Arnesano, 73100 Lecce, INFN, Sezione di Lecce. E-mail: carmine.ortix@le.infn.it

В данной работе обсуждается предел сильной связи по 'т ховфтовской константе связи λ , в котором со стороны струнной теории можно провести точные вычисления в квазиклассическом пределе теории супергравитации. В частности, мы должны воспроизвести хорошо известный результат Губсера, Клебанова и Полякова (ГКП), предсказывающий масштабное поведение $E \sim 2\sqrt{n}\lambda^{1/4}$ для энергии массивных струнных состояний уровня n при $\lambda \rightarrow \infty$ [5].

Вычисления такого рода требуют определения непертурбативного поведения аномальных размерностей в калибровочной теории. Эта, по-видимому, непреодолимая проблема имеет тем не менее шанс быть решенной, если принять в расчет предполагаемую интегрируемость $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ [6]–[8]. Хорошо известно, что уравнения анзаца Бете позволяют вычислить правильное пертурбативное разложение аномальных размерностей операторов классической размерности L с точностью до L -й петлевой поправки [9]. С технической стороны, оператор дилатации интерпретируется как квантовый гамильтониан, действующий на подходящих подмножествах калибровочно инвариантных операторов, замкнутых относительно пертурбативной перенормировки. Каждый оператор отображается на конфигурацию спиновой цепочки. В термодинамическом пределе это позволяет вычислить в замкнутом виде точные выражения для аномальных размерностей некоторых операторов [10], [11]. При фиксированном L представляется безнадежным распространить эту технику вычислений в область сверхсильной связи.

С другой стороны, сравнительно недавно были предложены новые уравнения анзаца Бете, основанные на фермионном описании оператора дилатации в теории СЯМ [12]. Соответствующая решеточная модель представляет собой твистованную версию модели Хаббарда (МХ). Была выдвинута гипотеза, что эти уравнения свободны от вышеуказанных *трудностей с обертыванием*. Выяснение того, охватывают ли эти уравнения режим сильной связи калибровочной теории, остается открытой проблемой.

В данной работе исследуются эти уравнения анзаца Бете, в частности, определяется разложение сильной связи для двух специальных состояний – так называемого антиферромагнитного (АФ) состояния [10] и состояния сложенной струны (СС) [13]. Эти состояния расположены в противоположных концах спектра и оказываются в некотором смысле простейшими с точки зрения анализа их свойств.

Наш результат предсказывает асимптотическое масштабное поведение $\Delta \sim \sqrt{\lambda}$ для обоих состояний, что находится в явном противоречии с законом ГКП. Из этого результата вытекают следующие интересные выводы.

В принципе, если задан некоторый калибровочно инвариантный составной оператор в теории СЯМ, то поиск соответствующего массивного состояния в струнной теории представляет собой нетривиальную задачу. Если это состояние удастся найти, по крайней мере в квазиклассическом приближении, то становится возможным вычислить его энергию в режиме сильной связи и сравнить ответ с результатом вычислений в калибровочной теории. В случае АФ-состояния здравый смысл подсказывает асимптотический закон $\Delta \sim \sqrt{\lambda}$. В дополнение и как следствие этого, было предложено исследовать некоторую конфигурацию квазиклассической стру-

ны в так называемом пределе медленных струн (МС), и выдвинуто предположение, что эта конфигурация дуальна АФ-состоянию [14]. Оно имеет масштабное поведение по энергии вида $\sqrt{\lambda}$, но, как мы покажем, с множителем, отличным от результата вычислений в МХ. Нам представляется, что этот результат свидетельствует в пользу того, что предложенное соответствие АФ $\leftrightarrow$ МС не выполняется. В самом деле, недавняя работа [15] предполагает, что масштабное поведение вида $\sqrt{\lambda}$ для АФ-состояния полностью неверно и не может рассматриваться как достоверное. Это заключение основано на полуаналитическом анализе уравнений анзаца Бете для квантовой струны (АБКС), которые, по построению, выполняются в пределе сильной связи [16].

В случае СС-состояния сценарий оказывается несколько отличным. Не существует известного решения уравнений АБКС. С другой стороны, дуальное состояние струны удается установить с достаточной надежностью. Как мы покажем, квазиклассическая энергия в режиме сильной связи при этом удовлетворяет закону ГКП. Таким образом, можно надеяться, что пока недостижимое решение уравнений АБКС также должно обладать масштабным поведением вида $\lambda^{1/4}$, что опять-таки оказывается в противоречии с вычислениями в фермионной модели.

В следующем разделе приведены результаты, полученные в рамках МХ, обсуждение которых отложено до заключающего раздела.

2. ТВИСТОВАННАЯ МОДЕЛЬ ХАББАРДА

Как обсуждалось во введении, аномальные размерности в калибровочной теории можно узнать, пользуясь соответствием между оператором дилатации в $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ и гамильтонианом модели спиновой цепочки. В частности, в секторе $SU(2)$ модель МХ должна предсказывать аномальные размерности калибровочных операторов фиксированной длины L [12] во всех петлях, к тому же непертурбативно. Главным свойством МХ является то, что в режиме сильной 'т хофтовской константы связи $\lambda = g_{YM}^2 N$ эта модель сводится к теории свободных решеточных фермионов. Однако еще следует понять, как состояния калибровочной теории в режиме слабой связи переходят в состояния решеточных фермионов. В дальнейшем рассматривается хаббардовский гамильтониан при половинном заполнении:

$$H = H_0 + \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} H_1,$$

где H_0 содержит кулоновское взаимодействие в одном узле решетки,

$$H_0 = L - \sum_{i=1}^L n_{\uparrow,i} n_{\downarrow,i}, \quad n_{\sigma,i} = c_{\sigma,i}^\dagger c_{\sigma,i},$$

а H_1 отвечает за свободные фермионы,

$$H_1 = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left(\sum_{i=1}^{L-1} c_{\sigma,i}^\dagger c_{\sigma,i+1} + e^{i\phi} c_{\sigma,L}^\dagger c_{\sigma,1} \right) + \text{э.с.}$$

Параметр $\phi = \pi/2$ возникает из потока Ааронова–Бома, необходимого для воспроизведения результатов Бейсера, Дипеля и Штудихера (БДШ) [9]. Кроме того, введение твистованной фазы позволяет сделать гамильтониан инвариантным при сдвигах

$$\begin{aligned} c_{\sigma,j} &\rightarrow e^{i\phi/L} c_{\sigma,j+1}, & j = 1, \dots, L-1, \\ c_{\sigma,L} &\rightarrow e^{i\phi(L+1)/L} c_{\sigma,1} \end{aligned} \quad (1)$$

и получить соответствующее преобразование для операторов уничтожения. Информацию об аномальных размерностях составных операторов можно вывести, анализируя спектр полной МХ. Мы рассматриваем только состояния с нулевым полным спином, инвариантные относительно сдвигов (1). Это значительно редуцирует гильбертово пространство. Например, было показано, что в наполовину заполненной решетке при $L = 8$ полная размерность уменьшается с 4900 до 226 [17]. Зависящий от взаимодействия спектральный поток вычислялся численно с помощью метода прямой диагонализации для решеток при значениях L от $L = 4$ [18] до $L = 8$ [17]. Наблюдалось несколько пересечений уровней, зависящих от взаимодействия. Это явное нарушение закона Вигнера–фон Неймана о непересечении уровней вытекает непосредственно из нетривиальной зависимости законов сохранения от константы связи и является характерным следствием квантовой интегрируемости одномерной МХ [19].

Здесь следует призвать к осторожности. Фермионная МХ приводит к состояниям с двойным заполнением уровня, для которых нет прямых аналогов среди составных операторов калибровочной теории. Роль этих лишних состояний остается неясной, а потому ниже мы рассматриваем зависимость от константы связи только для таких состояний, которые при $\lambda = 0$ приводят к состояниям без двойного заполнения, т.е. состояниям, имеющим классические аномальные размерности $\Delta(\lambda = 0) = L$ (пертурбативный мультиплет в работе [17]). Тем не менее с ростом 'т хофтовской константы связи эти состояния начинают смешиваться со всеми дополнительными состояниями с двойным заполнением. Мы придерживаемся в данном случае оптимистического взгляда на вещи и ожидаем появления лучшего понимания роли МХ.

Метод прямой диагонализации явно дает сбой при больших размерностях гильбертова пространства. Тем не менее можно исследовать более длинные составные операторы, если использовать свойство интегрируемости одномерной МХ [20].

После построения S -матрицы необходимо диагонализировать многочастичную систему с помощью ячеечного анзаца Бете. Результат этой процедуры, обобщенной на случай твистованной фазы, приводит к следующим уравнениям Либа–Ву для наполовину заполненной решетки:

$$\begin{aligned} Lq_n &= 2\pi I_n + 2 \sum_{j=1}^{L/2} \arctg \left[2 \left(u_j - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \sin(q_n + \phi) \right) \right], \\ 2\pi J_k &= 2 \sum_{j=1}^{L/2} \arctg(u_k - u_j) - 2 \sum_{m=1}^L \arctg \left[2 \left(u_k - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \sin(q_m + \phi) \right) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

Рис. 1. Асимптотическое состояние свободных фермионов для АФ-оператора при $L = 20$.

где $\phi \equiv \pi/(2L)$ и I_n, J_k – квантовые числа Бете. Квантовые числа q_n суть импульсы Бете частиц, в то время как u_i представляют собой спиновые быстроты (корни Бете), описывающие спиновые состояния. При $\lambda = 0$ уравнения Либа–Ву упрощаются, так как уравнения для импульсов и спиновых быстрот расцепляются, и их можно решить последовательно. Одновременно с этим расщеплением происходит расщепление волновой функции на зарядовую составляющую и спиновую составляющую, задаваемую анзацем Бете для спиновой цепочки Гейзенберга. Как только спиновые быстроты некоторого состояния определяются моделью Гейзенберга, становится возможным проследить за его эволюцией при возрастании ’т хофтовской константы связи и в конце концов найти поведение произвольного состояния в режиме сильной связи.

3. АФ-ОПЕРАТОР

При $\lambda = 0$ состояние с наивысшей аномальной размерностью отвечает основному состоянию одномерного антиферромагнетика Гейзенберга. Решение анзаца Бете в термодинамическом пределе было найдено Хультемом в 1938 г. [21]. Вместо этого мы определяем бетевские корни при конечном L , а потом исследуем эволюцию при возрастающей ’т хофтовской константе связи, решая шаг за шагом уравнения Либа–Ву. Зная каждый шаг эволюции импульсов Бете, можно найти эволюцию аномальных размерностей АФ-оператора при переходе от слабой к сильной связи. В частности, определяя асимптотическое состояние свободных фермионов в режиме сильной связи, можно построить разложение в ряд по обратным степеням λ :

$$\Delta_{\text{AF}}^H(\lambda, L) = a_0(L)\sqrt{\lambda} + a_1(L) + a_2(L)\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \dots \quad (3)$$

Мы нашли, что асимптотическое состояние свободных фермионов отвечает основному состоянию хаббардовского члена перескока, показанному на рис. 1. В этом состоянии все положительные уровни энергии имеют двойное заполнение, а потому справедливо равенство

$$|\psi_0^{\text{AF}}\rangle = \prod_{n=1}^{L-1} \prod_{\sigma=\uparrow,\downarrow} a_{\sigma,p_n}^\dagger |0\rangle,$$

где $a_{\sigma,p_n}^\dagger$ – канонический оператор рождения в импульсном пространстве. Так как дисперсионное соотношение для члена перескока имеет вид

$$\varepsilon_n = 2 \cos\left(\frac{2\pi n}{L} + \frac{\pi}{2L}\right),$$

нетрудно получить функцию $a_0(L)$ для разложения (3):

$$a_0(L) = \frac{1}{2\pi} \sin^{-1} \frac{\pi}{2L}.$$

Кроме того, можно аналитически вычислить $a_1(L)$ из первого порядка теории возмущений. Выражая кулоновский член H_0 хаббардовского гамильтониана в импульсном пространстве, получим

$$a_1(L) \equiv \left\langle \psi_0^{\text{AF}} \left| L - \frac{1}{L} \sum_{n,n',m,m'} \delta(n - n' + m - m') a_{\uparrow,n}^\dagger a_{\uparrow,n'} a_{\downarrow,m}^\dagger a_{\downarrow,m'} \right| \psi_0^{\text{AF}} \right\rangle.$$

Легко проверить, что последнее выражение сводится к

$$a_1(L) \equiv \left\langle \psi_0^{\text{AF}} \left| L - \frac{1}{L} \sum_{n,m} a_{\uparrow,n}^\dagger a_{\uparrow,n} a_{\downarrow,m}^\dagger a_{\downarrow,m} \right| \psi_0^{\text{AF}} \right\rangle = L - \frac{1}{L} \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}L.$$

Наконец, можно выбрать коэффициент в поправочном члене второго порядка в виде

$$a_2(L) = 2\sqrt{2}\pi\delta_{\text{AF},L}L,$$

воспользовавшись результатами численного расчета $\delta_{\text{AF},L}$ при конечных $L \in 4\mathbb{N}$ вплоть до $L = 32$ (см. рис. 2).

Интересно сравнить наше разложение с предсказаниями для аномальных размерностей АФ-состояний, вычисленных с помощью многопетлевых уравнений анзаца Бете в методе БДШ. В этом случае имеется разложение в ряд по обратным степеням размера решетки L :

$$\Delta_{\text{AF}}^{\text{BDS}}(\lambda, L) = b_0(\lambda)L + b_1(\lambda) + b_2(\lambda)\frac{1}{L} + \dots \quad (4)$$

Коэффициент при ведущем члене отвечает решению уравнений БДШ для анзаца Бете в термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$ [10],

$$b_0(\lambda) = 1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} f\left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

Рис. 2. Поведение множителя $\delta_{AF,L}$ в поправочном члене второго порядка в режиме сильной связи и при конечных $L \in 4\mathbb{N}$.

где

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{J_0(k) J_1(k)}{1 + e^{2kx}},$$

а $J_\nu(x)$ – функции Бесселя первого рода. Чтобы получить члены первого и второго порядков в разложении уравнения (4), следует принять в расчет поправки к термодинамическому пределу, связанные с конечным размером решетки. Это можно сделать, построив нелинейное интегральное уравнение для БДШ-анзаца Бете [22]. Коэффициент при первом поправочном члене имеет вид

$$b_1(\lambda) = -\frac{\lambda}{4\pi} \sum_{h=1}^H \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx_h} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}/(2\pi k))}{\sqrt{\lambda} k \operatorname{ch} k/2},$$

где H и x_h задают соответственно число и положения фантомных корней Бете. В нашем случае оказывается, что $H \equiv 0$, так как $H = L - 2M$, и мы рассмотрим ситуацию с $M = L/2$ магнонами. Поэтому $b_1(\lambda) \equiv 0$. Для коэффициента при поправочном члене второго порядка имеем

$$b_2(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda} I_1(\sqrt{\lambda}/2)}{12 I_0(\sqrt{\lambda}/2)},$$

где $I_\nu(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода.

Можно сравнить два этих выражения в двойном пределе $\lambda, L \rightarrow \infty$. В формулировке Хаббарда аномальные размерности (3) можно разложить при больших L , что дает

$$\Delta_{AF}^H = \left[\frac{L}{\pi^2} + \frac{1}{24L} + o\left(\frac{1}{L}\right) \right] \sqrt{\lambda} + \frac{3}{4} L + (\delta_{AF,\infty} + \dots) \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\lambda}} L, \quad (5)$$

где коэффициент $\delta_{\text{AF},\infty} \sim 0.0240(1)$ был найден с помощью простой полиномиальной экстраполяции выражения для $\delta_{\text{AF},L}$. С другой стороны, предсказания БДШ можно вычислить в пределе сильной связи. Коэффициент при первом поправочном члене имеет асимптотическое разложение [23]

$$f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{x}{4} + \sum_{m=1}^N \mu_m x^{2m} + O(x^{2N+2}),$$

где

$$\mu_m = \frac{(2m-1)(2^{2m+1}-1)[(2m-3)!!]^3}{2^{3m-1}(m-1)!} \frac{\zeta(2m+1)}{\pi^{2m+1}}, \quad (-1)!! \equiv 1,$$

$\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана. Кроме того, можно легко проверить, что асимптотическое значение коэффициента при поправке второго порядка имеет простой вид $b_2(\lambda \rightarrow \infty) = \sqrt{\lambda}/12$. Подставляя последние разложения в уравнение (4), обнаруживаем, что два анзаца дают одинаковые предсказания для членов $\propto L$, но в члене $\sqrt{\lambda}/L$ появляется расхождение в два раза. Это показывает, что два разных подхода дают один и тот же результат только в термодинамическом пределе. Рассогласование в поправках, связанных с конечным размером, возможно, является следствием как неконтролируемого эффекта обертывающих взаимодействий, который начинает быть значимым при поправках порядка $o(\lambda^L)$ в описании БДШ, так и очередности взятия пределов $\lambda, L \rightarrow \infty$. Более интересно то, что лидирующее поведение в режиме сильной связи в обоих описаниях аномальных размерностей имеет масштаб $\lambda^{1/2}$.

Представляется затруднительным получить общий закон ГКП [5] $\Delta \sim 2\sqrt{n}\lambda^{1/4}$. В работе [14] было предложено отождествить состояние струны, дуальное антиферромагнитному состоянию, с обладающими тем же масштабным поведением решениями, которые отвечают *медленно движущимся* струнам. Однако эти струнные состояния подчиняются следующему закону масштабных преобразований: $\Delta \sim \sqrt{\lambda}L$. Отсюда следует, что струнное решение отличается в $1/\pi^2$ раз в числовом множителе от дуального калибровочного оператора. Ранее эта проблема объяснялась зависимостью результата от различного порядка взятия пределов, так как на струнной стороне соответствия сначала выполняется предел больших λ , а затем предел больших L , в то время, как со стороны калибровочной БДШ-теории сначала L берется большим, а затем пертурбативный результат по λ продолжается на режим сильной связи. Мы показали, что это рассогласование имеет место и в МХ, хотя в ней берется тот же порядок взятия пределов, что и в струнной теории, а обертывающие взаимодействия не дают вклада. Действуя другим образом, можно начать с классической струнной теории при больших λ и вывести уравнения струнного анзаца Бете, которые, как ожидается, будут находиться в согласии со струнными вычислениями, в том числе в ведущих квантовых поправках. Этот подход недавно был исследован в работе [15], в которой показано, что лидирующее поведение при больших λ для АФ-оператора воспроизводит закон ГКП.

4. СС-СОСТОЯНИЕ

Хорошо известно, что решение Бете для антиферромагнетика Гейзенберга допускает существование состояний со спиновыми быстройми, имеющими мнимую составляющую. В этом случае волновая функция Бете состоит из плоских волн с комплексными волновыми векторами. Эти состояния обычно называются бетевскими струнными решениями, и их можно отождествить с квантовыми блоховскими состояниями стенок [24], [25]. В АДС/КТП-подходе бетевские струнные состояния со всеми мнимыми быстройми оказываются [11] дуальными квазиклассическим струнам, рассмотренным в работе [26]. Мы рассмотрим состояние с комплексными спиновыми быстройми, которое отвечает состоянию с наименьшими аномальными размерностями в пертурбативном мультиплете, т.е. самому легкому состоянию. Ранее было показано, что корни Бете (спиновые быстроймы) для этого состояния конденсируются в термодинамическом пределе на двух симметрично расположенных кривых в комплексной плоскости [11], и потому это состояние было названо решением на двойном контуре. Дуальное к нему струнное состояние оказывается не чем иным, как состоянием сложной струны, описанным в работе [13].

Как и в случае АФ-оператора, определим при $g = 0$ спиновые быстроймы, рассматривая решетки с $L = 12, 20$ и найдем шаг за шагом эволюцию как u_i , так и бетевских импульсов q_n в режиме сильной связи. Для обеих решеток мы обнаружили, что в пределе $g \rightarrow \infty$ бетевские импульсы дрейфуют к состоянию, показанному на рис. 3, где положительные уровни энергии с модовыми числами $n = k, L-k-1$ имеют двойное заполнение, а зеркально расположенные уровни с отрицательной энергией пусты. Оставшиеся положительные уровни имеют одинарное заполнение, равно как и их зеркальные уровни с отрицательной энергией, а потому не дают вклада в ведущий член энергии состояния. Так как результаты идентичны для обеих решеток, можно предположить, что при всех $L = 4(2k+1)$ картина уровней будет одной и той же. Из дисперсионного соотношения для члена перескока в гамильтониане получим ведущий член для аномальной размерности в режиме сильной связи:

$$\Delta_{\text{FS}}^0(\lambda, L) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\pi}{2L} \sqrt{\lambda}. \quad (6)$$

Первый поправочный член можно вычислить из теории возмущений. Легко убедиться, что неисчезающие матричные элементы $\langle \psi_0^{\text{FS}} | H_0 | \psi_0^{\text{FS}} \rangle$ имеют вид

$$\Delta_{\text{FS}}^1(g, L) = \left\langle \psi_0^{\text{FS}} \left| L - \frac{1}{L} \sum_{n,m} a_{\uparrow,n}^\dagger a_{\uparrow,n} a_{\downarrow,m}^\dagger a_{\downarrow,m} - \frac{1}{L} \sum_{n,m} a_{\uparrow,n}^\dagger a_{\uparrow,m} a_{\downarrow,m}^\dagger a_{\downarrow,n} \right| \psi_0^{\text{FS}} \right\rangle. \quad (7)$$

Первые два члена были найдены для АФ-оператора. Третий член представляет собой спиновый переворот, который дает ненулевой вклад лишь в обкладках однократно заполненных зеркально расположенных уровней. Тем самым имеем

$$\Delta_{\text{FS}}^1(g, L) = L - \frac{1}{L} \left[\left(\frac{L}{2} \right)^2 + \left(\frac{L}{2} - 2 \right) \right]. \quad (8)$$

Рис. 3. Состояние свободных фермионов для сложенной струны. Моды $n = \pm 8$ пусты. Показана лишь частная конфигурация спинов для струнных заполненных уровней.

Разложение в ряд для аномальных СС-размерностей можно представить в виде

$$\Delta_{\text{FS}}(g, L) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\pi}{2L} \sqrt{\lambda} + \frac{3L^2 - 2L + 8}{4L} + \delta_{\lambda, L} \frac{2\sqrt{2}\pi}{g} L + \dots \quad (9)$$

Аналогично АФ-состоянию коэффициент при поправочном члене второго порядка $\delta_{\lambda, L}$ можно вычислить с помощью численного исследования уравнения Либба–Ву. Имеем

$$\delta_{\lambda, 12} = 0.597(1), \quad \delta_{\lambda, 20} = 0.953(1).$$

С другой стороны, энергия сложенной струны с угловым моментом $J = L/2$ имеет вид [27]

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\text{FS}}(\lambda' L^2, L)}{L} \equiv F(\lambda') = \frac{1}{2} K(q) \left[\frac{4q\lambda'}{\pi^2} + \frac{1}{E(q)^2} \right]^{1/2}, \quad (10)$$

где $q = q(\lambda') \leq 1$ – решение уравнения

$$\frac{4\lambda'}{\pi^2} = \frac{1}{(K(q) - E(q))^2} - \frac{1}{E(q)^2}, \quad (11)$$

а $K(q)$, $E(q)$ – стандартные полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Разлагая вторые уравнения при больших λ' , получим $q(\lambda') = 2/\sqrt{\lambda'}$; подставляя это разложение в выражение для Δ , придем к

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\text{FS}}(\lambda' L^2, L)}{L} \equiv F(\lambda') \xrightarrow{\lambda' \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda'^{1/4}.$$

Аналогично АФ-состоянию мы обнаруживаем естественное рассогласование в режиме сильной связи между калибровочным и струнным подходами. Различное масштабное поведение по λ предполагает, что использование уравнений анзаца Бете

при оценке пределов сильной связи для состояний общего положения оказывается неправомочным.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, отметим, что мы вычислили разложение в режиме сильной связи для аномальных размерностей АФ-состояний и СС-состояний в рамках МХ. В обоих случаях мы нашли, что ведущий член имеет поведение $\Delta \sim \sqrt{\lambda}$ при больших λ . Опираясь на результаты, приведенные во введении, мы можем сделать несколько выводов.

Во-первых, в случае АФ-состояния МХ совершенно не способна предсказать поведение в режиме сильной связи. Закон ГКП в ней нарушается, в то время как имеются весомые аргументы в поддержку этого закона, вытекающие из явных решений струнных уравнений анзаца Бете.

Во-вторых, как следствие, дуальность АФ $\leftrightarrow$ МС представляется весьма проблематичной. Может оказаться, что для некоторых составных операторов калибровочной теории масштабное поведение вида $\Delta \sim \sqrt{\lambda}$ имеет место. Это однако представляется неверным, по крайней мере для АФ-состояния.

Наконец, в случае СС-состояния вывод некоторым образом зависит от (еще не построенного) решения струнного анзаца Бете. Если бы было найдено, что масштабное поведение ГКП-типа имеет место, то можно было бы заключить, что даже и в этом случае МХ не предсказывает правильное поведение в режиме сильной связи. Конечно, также возможно нарушение закона ГКП. Это обстоятельство, однако, может привести к нарушению дуальности с СС-конфигурацией. С нашей точки зрения, это вряд ли возможно, если принимать во внимание согласие в теории возмущений (с точностью до рассогласования в третьей петле) между струнными вычислениями и (слабым) пертурбативным разложением калибровочной теории в пределе Бейсера–Малдачены–Настасе [28].

Список литературы

- [1] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2** (1998), 253; [hep-th/9802150](#).
- [2] V. A. Kazakov, A. Marshakov, J. A. Minahan, K. Zarembo, *JHEP*, **05** (2004), 024; [hep-th/0402207](#).
- [3] I. R. Klebanov, “TASI lectures: introduction to the AdS/CFT correspondence”, *Strings, Branes and Gravity*, TASI 99 (Boulder, CO, USA, 1999), eds. J. A. Harvey, S. Kachru, E. Silverstein, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001, 615; [hep-th/0009139](#).
- [4] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2** (1998), 231; *Internat. J. Theoret. Phys.*, **38** (1999), 1113; [hep-th/9711200](#).
- [5] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **428** (1998), 105; [hep-th/9802109](#).
- [6] K. Zarembo, *C. R. Phys.*, **5** (2004), 1081; *Fortschr. Phys.*, **53** (2005), 647; [hep-th/0411191](#).
- [7] N. Beisert, *C. R. Phys.*, **5** (2004), 1039; [hep-th/0409147](#).
- [8] N. Beisert, *Phys. Rep.*, **405** (2005), 1; [hep-th/0407277](#).
- [9] N. Beisert, V. Dippel, M. Staudacher, *JHEP*, **07** (2004), 075; [hep-th/0405001](#).
- [10] K. Zarembo, *Phys. Lett. B*, **634** (2006), 552; [hep-th/0512079](#).

- [11] N. Beisert, J. A. Minahan, M. Staudacher, K. Zarembo, *JHEP*, **09** (2003), 010; [hep-th/0306139](#).
- [12] A. Rej, D. Serban, M. Staudacher, *JHEP*, **03** (2006), 018; [hep-th/0512077](#).
- [13] S. Frolov, A. A. Tseytlin, *Phys. Lett. B*, **570** (2003), 96; [hep-th/0306143](#).
- [14] R. Roiban, A. Tirziu, A. A. Tseytlin, *Phys. Rev. D*, **73** (2006), 066003; [hep-th/0601074](#).
- [15] M. Beccaria, L. Del Debbio, *JHEP*, **09** (2006), 025; [hep-th/0607236](#).
- [16] G. Arutyunov, S. Frolov, M. Staudacher, *JHEP*, **10** (2004), 016; [hep-th/0406256](#).
- [17] M. Beccaria, C. Ortix, *JHEP*, **09** (2006), 016; [hep-th/0606138](#).
- [18] J. A. Minahan, *J. Phys. A*, **39** (2006), 13083; [hep-th/0603175](#).
- [19] E. A. Yuzbashyan, B. L. Altshuler, B. S. Shastry, *J. Phys. A*, **35** (2002), 7525; [cond-mat/0201551](#).
- [20] E. H. Lieb, F. Y. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **20** (1968), 1445; Erratum, **21** (1968), 192.
- [21] L. Hulthén, “Über das Austauschproblem eines Kristalles”, *Ark. Mat. Astron. Fysik. A*, **26** (1938), 1.
- [22] G. Feverati, D. Fioravanti, P. Grinza, M. Rossi, *JHEP*, **05** (2006), 068; [hep-th/0602189](#).
- [23] W. Metzner, D. Vollhardt, *Phys. Rev. B*, **39** (1989), 4462.
- [24] A. Dhar, B. Shastry, *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2000), 2813.
- [25] B. Sutherland, *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995), 816.
- [26] S. Frolov, A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **668** (2003), 77; [hep-th/0304255](#).
- [27] J. Plefka, *Spinning strings and integrable spin chains in the AdS/CFT correspondence*, [hep-th/0507136](#).
- [28] D. Serban, M. Staudacher, *JHEP*, **06** (2004), 001; [hep-th/0401057](#).