Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Канфора, Л. Паризи, Г. Вилази, Нелинейные гравитационные волны, их поляризация и реалистичные источники, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 2, 225–240

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6083>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:55:56

© 2007 г.

Ф. Канфора*, Л. Паризи*, Г. Вилази*

НЕЛИНЕЙНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, ИХ ПОЛЯРИЗАЦИЯ И РЕАЛИСТИЧНЫЕ ИСТОЧНИКИ

Описаны точные решения полевых уравнений Эйнштейна, инвариантные относительно неабелевой двумерной алгебры Ли полей Киллинга. Подкласс этих гравитационных полей имеет волноподобный характер. Показано, что они имеют спин 1. Обсуждаются также некоторые не прямые наблюдаемые эффекты. В частности, показано, что в присутствии топологических дефектов нельзя пренебрегать векторными космологическими возмущениями, что можно проверить, изучая анизотропии реликтового излучения.

Ключевые слова: метрики, векторы Киллинга, гравитационные волны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы проиллюстрировать некоторые интересные и в определенном смысле неожиданные физические свойства специальных решений полевых уравнений Эйнштейна, принадлежащих к широкому классу эйнштейновских метрик, инвариантных относительно неабелевой двумерной алгебры Ли симметрий.

Несколько десятилетий назад Белинский и Захаров показали [1], что существуют такие метрики, для которых вакуумные полевые уравнения Эйнштейна сводятся к системе нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, *обобщенный лаксов вид* которых характерен для интегрируемых систем. Таким образом, используя подходящее обобщение *метода обратной задачи рассеяния*, авторы смогли найти *решения в виде уединенных волн*.

Как следствие этого успеха немедленно возникли несколько интересных вопросов.

1. Интегрируемые системы обычно обладают *оператором рекурсии*, ответственным за построение последовательности сохраняющихся функционалов. Такое тензорное поле имеет обращающееся в нуль кручение Нийенхейса и специальные спектральные свойства, позволяющие обобщить классическую теорему Лиувилля о полной интегрируемости на бесконечномерные многообразия [2]–[5]. Сколько сохраняющихся функционалов существует в нашем гравитационном случае, и каково их

*Dipartimento di Fisica E. R. Caianiello, Università di Salerno, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Napoli, GC Salerno, Via S. Allende, I-84081 Baronissi (Salerno), Italy. E-mail: vilasi@sa.infn.it

физическое значение? Для такой гравитационной модели интересно было бы построить *оператор рекурсии*.

2. Точные решения полевых уравнений Эйнштейна заслуживают особого внимания, когда они имеют волноподобный характер. Гравитационные волны пока еще не зарегистрированы непосредственно, хотя их не прямое влияние было обнаружено и измерено с большой точностью. Необходимость полного учета нелинейности уравнений Эйнштейна при исследовании генерации гравитационных волн сильными источниками [6] широко признана¹⁾.

Геометрическое исследование упомянутых выше метрик показывает, что они инварианты относительно трансляций вдоль осей x и y , т.е. допускают два поля Киллинга ∂_x и ∂_y , которые замыкаются в абелеву двумерную алгебру Ли $\mathcal{A}_2$. Более того, распределение $\mathcal{D}$, порожденное производными ∂_x и ∂_y ²⁾, является двумерным, а распределение $\mathcal{D}^\perp$, ортогональное к $\mathcal{D}$, является интегрируемым³⁾ и трансверсальным к $\mathcal{D}$ ⁴⁾.

Поскольку двумерная алгебра Ли является либо абелевой ($\mathcal{A}_2$), либо неабелевой ($\mathcal{G}_2$), естественно рассмотреть [9]–[11] задачу, характеризующую все гравитационные поля g , допускающие алгебру Ли $\mathcal{G}$ полей Киллинга, причем:

1) распределение $\mathcal{D}$, порожденное векторными полями из алгебры $\mathcal{G}$, является двумерным;

2) распределение $\mathcal{D}^\perp$, ортогональное к $\mathcal{D}$, является интегрируемым и трансверсальным к $\mathcal{D}$.

Условие трансверсальности можно ослабить [12], [13], поэтому, для того чтобы различать случаи, мы используем обозначение $(\mathcal{G}, r)$: метрики, удовлетворяющие условиям 1 и 2, называются метриками $(\mathcal{G}, 2)$ -типа; метрики, удовлетворяющие условиям 1 и 2, но не удовлетворяющие условию трансверсальности, называются метриками $(\mathcal{G}, 0)$ -типа или метриками $(\mathcal{G}, 1)$ -типа в зависимости от ранга их ограничения на листы распределения $\mathcal{D}$, которые также называются *листами Киллинга*.

Все возможные ситуации, соответствующие двумерной алгебре Ли изометрий, приведены в таблице, причем случаи, выделенные жирным шрифтом, в основном решены [9]–[15].

Исследование $\mathcal{A}_2$ -инвариантных эйнштейновских метрик восходит к работам [1], [16]–[20], так что некоторые точные решения, уже известные ранее в литературе [21],

¹⁾ Несмотря на значительную удаленность источников от Земли, имеются ситуации, когда нелинейными эффектами нельзя пренебречь. Например, в работе [7] было показано, что вторичная волна, называемая *памятью Христодулоса*, возникает из-за нелинейности полевых уравнений Эйнштейна. Память, по-видимому, имеет тот же порядок, что и линейные эффекты, связанные с тем же источником [8]; таким образом подчеркивается значимость нелинейности уравнений Эйнштейна также и с экспериментальной точки зрения.

²⁾ $\mathcal{D}$ представляет собой множество всех векторных полей Z вида $Z = \alpha(x, y)\partial_x + \beta(x, y)\partial_y$, где $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ – произвольные функции.

³⁾ Двумерное распределение называется *интегрируемым*, если фарадеевские силовые линии (*интегральные кривые* на языке дифференциальной геометрии) двух порождающих векторных полей образуют поверхность, т.е. переплетаются друг с другом как хлопковые нити в полотне. Такие поверхности называются листами распределения. Неинтегрируемое двумерное распределение называется *полуинтегрируемым*, если оно является частью (т.е. подходящим ограничением) трехмерного интегрируемого распределения.

⁴⁾ Это означает, что $\mathcal{D}^\perp$ и $\mathcal{D}$ имеют только одно общее обращающееся в нуль векторное поле.

	$\mathcal{D}^\perp, r = 0$	$\mathcal{D}^\perp, r = 1$	$\mathcal{D}^\perp, r = 2$
$\mathcal{G}_2$	интегрируемая	интегрируемая	интегрируемая
$\mathcal{G}_2$	полуинтегрируемая	полуинтегрируемая	полуинтегрируемая
$\mathcal{G}_2$	неинтегрируемая	неинтегрируемая	неинтегрируемая
$\mathcal{A}_2$	интегрируемая	интегрируемая	интегрируемая
$\mathcal{A}_2$	полуинтегрируемая	полуинтегрируемая	полуинтегрируемая
$\mathcal{A}_2$	неинтегрируемая	неинтегрируемая	неинтегрируемая

были переоткрыты. Тем не менее наш геометрический подход позволяет выбрать координаты естественным образом, т.е. те, которые приспособлены к симметриям метрик, даже если они не допускают интегрируемого $\mathcal{D}^\perp$ -распределения. Обычно стандартная техника нахождения точных решений с самого начала предполагает, что существуют естественные векторные поля, образующие поверхность; это упрощает выбор системы координат. Такие допущения (помимо алгебры Ли полей Киллинга) представляют собой весьма сильные топологические условия, наложенные на пространство-время: метод, развитый в работах [9]–[15], можно также применять, когда подобные топологические допущения не выполняются.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 с геометрической точки зрения характеризуются гравитационные поля, инвариантные относительно неабелевой двумерной алгебры Ли, причем коммутатор генераторов алгебры Ли является коомутатором *светоподобного типа*. В разделе 3 вводятся канонический псевдотензор энергии-импульса и псевдотензоры энергии-импульса Ландау, и проводится сравнение с линеаризованной теорией. Описывается также роль (реалистичных) источников для таких гравитационных волн. Анализ поляризации приводит к окончательному выводу, что эти поля представляют собой гравитационные волны спина 1. В разделе 4 сравниваются гравитационные волны спина 1 и спина 2 с гравито-электромагнитной точки зрения. Раздел 5 посвящен анализу наблюдаемых эффектов.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Пусть g – метрика на пространстве-времени $\mathcal{M}$, а $\mathcal{G}_2$ – одна из ее алгебр Киллинга, генераторы которой X и Y удовлетворяют соотношению $[X, Y] = sY$, $s = 0, 1$. Распределение Фробениуса $\mathcal{D}$, порожденное метрикой $\mathcal{G}_2$, является двумерным, а в окрестности несингулярной точки существуют *приспособленные координаты* (x, y, p, q) [9]–[13], [15] такие, что

$$X = \frac{\partial}{\partial p}, \quad Y = e^{sp} \frac{\partial}{\partial q}.$$

В этих координатах общее решение вакуумных уравнений Эйнштейна в случае, когда поле Киллинга Y является полем *светоподобного типа*, имеет вид

$$g = 2f(dx^2 \pm dy^2) + \mu[(w(x, y) - 2sq) dp^2 + 2dp dq], \quad (1)$$

где $\mu = A\Phi + B$, $A, B \in \mathbb{R}$, $\Phi(x, y)$ – непостоянная гармоническая функция, $f = (\nabla\Phi)^2 \sqrt{|\mu|}/\mu$, $w(x, y)$ – решение уравнения Эйлера–Дарбу

$$\Delta_{\pm} w + (\partial_x \ln |\mu|) \partial_x w \pm (\partial_y \ln |\mu|) \partial_y w = 0,$$

а Δ_+ (Δ_-) – оператор Лапласа (д’Аламбера) в плоскости (x, y) . Метрики (1) являются лоренцевыми, если ортогональные листы конформно евклидовы, т.е. выбирается положительный знак, а в противоположном случае – клейновыми. Мы рассмотрим только лоренцев случай, а соответствующие метрики будем называть метриками $(\mathcal{G}_2, 2)$ -изотропного типа.

В частном случае $s = 1$, $f = 1/2$ и $\mu = 1$ рассматриваемые (лоренцевы) метрики локально диффеоморфны [22] подклассу вакуумных решений Переса [21], [23], [24], которые мы для наших дальнейших нужд запишем в виде

$$g = dx^2 + dy^2 + 2 du dv + 2(\varphi_{,x} dx + \varphi_{,y} dy) du. \quad (2)$$

Соответствие между решениями (1) и (2) зависит от специального выбора функции $\varphi(x, y, u)$ (которая в общем случае является гармонической по x и y); в нашем случае

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y, \quad u \rightarrow u, \quad v \rightarrow v + \varphi(x, y, u), \quad h = \varphi_{,u}.$$

В случае $\mu = \text{const}$ уравнение Эйлера–Дарбу редуцируется к уравнению Лапласа; при $\mu = 1$ в системе гармонических координат (x, y, z, t) , определенных в работе [25], рассматриваемые эйнштейновские метрики принимают особенно простой вид:

$$g = 2f(dx^2 + dy^2) + dz^2 - dt^2 + d(w) d(\ln |z - t|). \quad (3)$$

Это показывает, что при постоянной w задаваемые уравнением (3) эйнштейновские метрики являются статическими, и если далее предположить, что $\Phi = x\sqrt{2}$, то они редуцируются к метрике Минковского. Более того, когда w не постоянна, гравитационные поля (3) выглядят как *возмущение*, распространяющееся со скоростью света по листам Киллинга вдоль направления z . Далее мы будем рассматривать только случай $\Phi = x\sqrt{2}$.

3. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА: ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ СПИНА 1

Ниже мы будем анализировать физические свойства метрик (1) только для случая лоренцевой сигнатуры⁵⁾. Волноподобная природа гравитационных полей (1) подвергалась проверке [25] с использованием критерия ковариантности. Мы кратко напомним наиболее важные свойства этих волн, которые, как окажется, имеют спин 1.

⁵⁾Риччи-плоские многообразия клейновой сигнатуры возникают в “no boundary”-предложении Хартля и Хокинга (см. работу [26], где была высказана идея, согласно которой сигнатура пространственно-временной метрики могла изменяться в ранней вселенной). Несколько других примеров клейновой геометрии в физике возникают в теории гетеротической $N = 2$ струны (см. работы [27], [28]), для которой таргет-пространство является четырехмерным.

Заметим, что определение и смысл спина или поляризации для такой теории, как общая теория относительности, являющейся нелинейной и обладающей гораздо большей инвариантностью, чем просто пуанкаре-инвариантность, заслуживают тщательного анализа. Хорошо известно, что концепция частицы, обладающей такими степенями свободы, как спин, может быть введена только в линейных теориях (например, в теориях Янга–Миллса, которые являются нелинейными, необходимо использовать пертурбативное разложение вокруг линеаризованной теории). В этих теориях при наличии пуанкаре-инвариантности частицы классифицируются в терминах собственных значений двух операторов Казимира группы Пуанкаре, P^2 и W^2 , где P_μ – генераторы трансляции, а $W_\mu = (1/2)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}$ – вектор поляризации Паули–Любанского, $M^{\mu\nu}$ – генераторы Лоренца. Тогда полный момент импульса $J = L + S$ определяется в терминах генераторов $M_{\mu\nu}$ как $J^i = (1/2)\epsilon^{0ijk}M_{jk}$. Генераторы P_μ и $M_{\mu\nu}$ линейно порождают алгебру Пуанкаре $\mathcal{ISO}(3,1)$. При $P^2 = 0$ и $W^2 = 0$ величины W и P линейно зависят друг от друга, $W_\mu = \lambda P_\mu$; коэффициент пропорциональности равен $\lambda = \vec{P} \cdot \vec{J} / P_0$ и определяет *спиральность* для безмассовых частиц типа фотонов.

Рассмотрим теперь гравитационные поля, представленные уравнением (3). Как было отмечено, они определяют гравитационные волны, движущиеся со скоростью света, т.е. в подлежащей квантованию теории – частицы с нулевой массой покоя. Таким образом, если бы можно было провести классификацию в терминах инвариантов групп Пуанкаре, эти волны принадлежали бы к классу унитарных (бесконечномерных) представлений группы Пуанкаре, характеризующихся условиями $P^2 = 0$, $W^2 = 0$. Напомним, что для осмысленности такой классификации P^2 и W^2 должны быть инвариантами теории. Это не имеет места в случае общей теории относительности, если только мы не ограничимся подмножеством преобразований, выбранным, например, с помощью некоторого физического критерия или экспериментальных условий. Выбору гармонической калибровки для решения линеаризованных вакуумных уравнений Эйнштейна посвящена монография [29]. Там остаточная свобода калибровки соответствует одним только преобразованиям Лоренца.

3.1. Стандартная линеаризованная теория. Проведем стандартный анализ линеаризованной теории и вопроса о поляризации. В частности, обычная трансверсально-бесследовая калибровка в линеаризованных вакуумных уравнениях Эйнштейна и (обычно неявные) допущения, необходимые для сведения к такой калибровке, играют важную роль: общность обычного утверждения “гравитон имеет спин 2” (что, конечно, строго связано с возможностью достижения такой специальной калибровки в любой “разумной” физической ситуации) строго связана с этими допущениями.

Говорят, что гравитационное поле *слабое* (в M'), если существуют (гармоническая) система координат и область $M' \subset M$ пространства-времени, в которых выполняются следующие условия:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad |h_{\mu\nu,\alpha}| \ll 1. \quad (4)$$

Как известно, в приближении слабого поля уравнения Эйнштейна в гармонической системе координат имеют вид

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (5)$$

Выбор гармонической калибровки играет ключевую роль при выводе уравнения (5); при этом не делается никаких других специальных допущений ни относительно вида, ни относительно аналитических свойств возмущения h . Считается, что при соответствующем калибровочном преобразовании, сохраняющем гармоничность системы координат и “слабый характер” поля, всегда можно избавиться от содержащихся в гравитационных волнах компонент “спина 1”. Однако, даже если об этом не говорится явно, предлагаемый в учебниках стандартный анализ поляризации проводится для *глобально квадратично-интегрируемых* решений волнового уравнения (5) (т.е. решений, являющихся квадратично-интегрируемыми всюду на M), но, как мы увидим ниже, некоторые очень интересные решения не принадлежат этому классу. Чтобы прояснить этот вопрос, кратко опишем стандартный анализ, применяемый для устранения компонент спина 1, обращая особое внимание на роль, которую играет допущение *глобальной квадратичной интегрируемости*.

Действительно, глобально квадратично-интегрируемые решения уравнений (5) всегда можно разложить в ряды Фурье по плосковолновым функциям с *вещественным* светоподобным волновым вектором k_μ . Стандартные решения уравнения (5) в виде плоских волн имеют вид $h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}e^{ir} + e_{\mu\nu}^*e^{-ir}$, где $r = k_\mu x^\mu$, k_μ – вектор направления распространения, удовлетворяющий соотношению $k_\mu k^\mu = 0$, при этом условие гармоничности сводится к

$$\frac{1}{2}k_\lambda \eta^{\mu\nu} e_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} k_\nu e_{\mu\lambda}, \quad (6)$$

а калибровочные преобразования линеаризованной теории в этом случае имеют вид

$$e_{\mu\nu} \rightarrow e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + k_\mu l_\nu + k_\nu l_\mu, \quad k^\mu l_\mu = 0. \quad (7)$$

Здесь l_μ – также вещественный вектор. Вещественный вектор направления распространения k_μ всегда можно выбрать в виде $k_\mu = (1, 0, 0, -1)$, так что гравитационное возмущение будет распространяться вдоль оси z . Тогда легко показать (см., например, монографию [29]), что компоненты спина 1 и спина 2 для $e_{\mu\nu}$ имеют соответственно вид e_{it} и e_{ij} , где $i, j = x, y$ (т.е. компоненты спина 2 представляют собой компоненты с обоими индексами в плоскости, ортогональной к направлению распространения). Легко также доказать (используя аргументы стандартной линейной алгебры), что e_{it} -компоненты можно устранить с помощью подходящего преобразования (7). Формально это означает, что линейная система уравнений для фурье-компонент вектора l_μ

$$e_{it} + k_i l_t + k_t l_i = 0 \quad (8)$$

всегда имеет решение.

Однако для комплексного k_μ такого, что $k_\mu k^\mu = 0$ (например, $(1, a, \pm ia, 1)$, где $a \in \mathbb{R}$), это уже не так, т.е. рассматриваемая система уравнений не имеет в общем

случае вещественного решения для l_μ : легко проверить, что в этом случае определитель неоднородной линейной системы для l_μ (8) обращается в нуль. Следует заметить, что для представления инфинитезимального диффеоморфизма компоненты Фурье l_μ должны быть вещественными, иначе преобразование, порожденное вектором l_μ , не будет инфинитезимальным⁶⁾.

В этом случае, очевидно, не хватает глобальной *квадратичной интегрируемости* вследствие отсутствия решения двумерного уравнения Лапласа в виде гармонической функции⁷⁾. Поэтому неглобально квадратично-интегрируемые возмущения спина 1 не являются чисто калибровочными, поскольку их нельзя устранить с помощью инфинитезимальных диффеоморфизмов. Даже если глобальная *квадратичная интегрируемость* отсутствует, существуют решения такого вида, что вдали от особенностей⁸⁾ они демонстрируют хорошее поведение. Другими словами, можно найти возмущения спина 1, которые являются квадратично-интегрируемыми на подмногообразии $M' \subset M$ всего пространства-времени; таким образом, для существования возмущений спина 1 обязательно требуется некоторое количество особенностей и/или некоторая область с нетривиальной топологией.

Наглядный метод определения спина гравитационной волны состоит в рассмотрении ее физических степеней свободы, т.е. компонент, дающих вклад в энергию [30]. Необходимо использовать (псевдо)тензор Ландау–Лифшица t_ν^μ , который в асимптотически плоском случае совпадает с потоком Бонди на бесконечности [31].

Заметим, что канонический псевдотензор и псевдотензор энергии-импульса Ландау–Лифшица являются тензорами относительно преобразований Лоренца. Таким образом, любое преобразование Лоренца будет сохранять вид этих тензоров; это позволяет провести анализ согласно процедуре Дирака⁹⁾. Глобально квадратично-интегрируемое решение $h_{\mu\nu}$ волнового уравнения является функцией от $r = k_\mu x^\mu$, при этом $k_\mu k^\mu = 0$. Если выбрать $k_\mu = (1, 0, 0, -1)$, то в результате мы получим следующие выражения для плотности энергии t_0^0 и импульса энергии t_0^3 :

$$16\pi t_0^0 = \frac{1}{4}(u_{11} - u_{22})^2 + u_{12}^2, \quad t_0^0 = t_0^3,$$

где $u_{\mu\nu} \equiv dh_{\mu\nu}/dr$. Таким образом, физические компоненты, дающие вклад в плотность энергии, это $h_{11} - h_{22}$ и h_{12} . Следуя анализу, проведенному в работе [30], мы видим, что они представляют собой собственные векторы инфинитезимального генератора вращения $\mathcal{R}$ в плоскости (x, y) , относящиеся к собственным значениям $\pm 2i$.

⁶⁾Если l_μ имел бы комплексные компоненты Фурье, он не был бы квадратично-интегрируемым и, следовательно, оказался бы где-то неограниченным. В этом случае l_μ не мог бы представлять инфинитезимальный диффеоморфизм.

⁷⁾Гармонические функции не являются глобально квадратично-интегрируемыми, обычно имеется две возможности: они или не убывают на бесконечности, или имеют особенности. Во втором случае, однако, их можно квадратично интегрировать, если исключить особенности из пространства-времени.

⁸⁾Как немедленно будет показано, особенности необходимы для получения пространственно-асимптотических плоских решений.

⁹⁾Конечно, можно было бы придерживаться и обычной альтернативной процедуры, описываемой почти во всех учебниках.

Таким образом, те компоненты $h_{\mu\nu}$, которые дают вклад в энергию, соответствуют спину 2.

В случае прототипа гравитационных волн спина 1 (3) при $f = 1/2$ имеем

$$\tau_0^0 \sim c_1(h_{0x,x})^2 + c_2(h_{0y,x})^2, \quad t_0^0 = t_0^3,$$

где c_1 и c_2 – константы, так что физическими компонентами метрики являются h_{0x} и h_{0y} . Аналогично предыдущему анализу можно видеть, что эти две компоненты представляют собой собственные векторы генератора $i\mathcal{R}$, соответствующие собственным значениям ± 1 . Другими словами, метрики (3), не являющиеся чистыми калибровками из-за ненулевого тензора Римана, представляют собой гравитационные волны спина 1, распространяющиеся вдоль оси z со скоростью света.

Это связано с гармонической функцией трансверсальных координат: чтобы получить асимптотически плоскую волну, требуются особенности или какой-либо тип нетривиальности в топологии пространства-времени. Вопрос состоит в том, можно ли объявить эти решения нефизическими? Может ли оказаться, что разумные источники будут сглаживать особенности? Как будет подробно показано в следующих разделах, ответ на эти вопросы положителен. Теперь продемонстрируем простой и интересный пример таких решений.

ПРИМЕР. Рассмотрим возмущения, как в уравнении (3), вида $h = dw(x, y) df(z - t)$, не являющиеся глобально квадратично-интегрируемыми. Метрика

$$g = \eta + dw(x, y) df(u), \quad u = z - t, \quad (\partial_x^2 + \partial_y^2)w = 0, \quad (9)$$

является пространственно асимптотически плоской для широкого выбора гармонических функций w . Действительно, она представляет физически интересное гравитационное поле: гравитационные волны, распространяющиеся вдоль оси z со скоростью света. Кроме того, что она дает решение линеаризованных уравнений Эйнштейна на плоском фоне, она также является точным решением уравнений Эйнштейна.

Тривиально проверить, что метрика (9) записывается в гармонических координатах и имеет *внедиагональный* вид, т.е. возмущение h имеет только один индекс в плоскости (x, y) , ортогональной направлению распространения z ; по этой причине рассматриваемая гравитационная волна имеет спин, равный 1, и не является чистой калибровкой [25]. С помощью соответствующего преобразования можно привести данную гравитационную волну к стандартному *трансверсально-бесследовому* виду, однако можно проверить, что новые координаты более не являются гармоническими.

Подведем итог. *Глобально квадратично-интегрируемые гравитационные волны спина 1, распространяющиеся на плоском фоне, всегда являются чистой калибровкой. Гравитационные волны спина 1, не являющиеся глобально квадратично-интегрируемыми, не являются чистой калибровкой.*

3.2. Условие асимптотической плоскости и материальные источники.

В вакуумном случае координаты (x, y, z, t) метрик (9) являются гармоническими.

При выбранном направлении распространения z физические эффекты проявляются в плоскости (x, y) , ортогональной к направлению распространения. Чтобы эти метрики *асимптотически были метриками Минковского* при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, требуется, чтобы функция w удовлетворяла условию

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} (w - c_1 x + c_2 y - c_3) = 0,$$

где c_1 , c_2 и c_3 – произвольные константы, а поведение w легко получить из тензора Римана для метрик (9):

$$R_{uiuj} = f_{,u} w_{,ij}, \quad (10)$$

зависящего от вторых производных двумерной гармонической функции w .

Поэтому, для того чтобы получить метрику, асимптотически являющуюся метрикой Минковского, функция w должна асимптотически приближаться к линейной функции. Однако согласно стандартным результатам теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных это возможно, лишь когда сама функция w является всюду линейной, откуда должно следовать, что метрики являются плоскими (9). Но если мы допускаем наличие δ -образных особенностей в плоскости (x, y) , то могут существовать нетривиальные вакуумные решения с $w \neq \text{const}$, асимптотически являющиеся метриками Минковского [22]. Конечно, нет необходимости рассматривать δ -образные особенности, достаточно учесть материальные источники. Например, в присутствии электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси z , с плотностью энергии ρ , которая обращается в нуль вне компактной области плоскости (x, y) , точные невакуумные уравнения Эйнштейна для метрик (9) имеют вид (см., например, работу [22])

$$f_{,u} (\partial_x^2 + \partial_y^2) w = \kappa \rho,$$

где κ – постоянная гравитационного взаимодействия¹⁰⁾. Таким образом, можно получить несингулярные гравитационные волны спина 1, рассматривая соответствующие материальные источники, которые сглаживают особенности.

С феноменологической точки зрения уместно заметить, что такой тип волноподобных гравитационных полей в отличие от стандартных гравитационных волн спина 2, которые могут не иметь особенностей даже в вакуумном случае, должен взаимодействовать с материальными источниками, для того чтобы представлять собой разумные гравитационные поля. Наблюдательные следствия этого факта состоят в том, что гравитационные волны спина 1 естественным образом слабее, чем гравитационные волны спина 2 [33]: как правило, если характерная скорость материального источника равна v , то волна спина 1 подавлена множителями $(v/c)^n$ по сравнению с волной спина 2. Заметим, что гравитационное поле также может носить отталкивающий характер; например, черная дыра Керра является “более отталкивающей”, нежели черная дыра Шварцшильда с той же массой. Это, очевидно, связано с моментом импульса. Грубо говоря, этот эффект может быть связан с “гравитомагнитной” частью керровской метрики, которая, по нашей терминологии,

¹⁰⁾ К этому классу решений принадлежит решение Эйхельбурга–Сексла [32].

является частью “спина 1”. С другой стороны, механизм Калуцы–Клейна позволяет построить в чисто пятимерной гравитации решения с возбуждениями спина 1 (которые в четырехмерном случае могут интерпретироваться как электромагнитные – а следовательно, *отталкивающие* – степени свободы). Конечно, механизм Калуцы–Клейна работает и при редукции от четырехмерного случая к трехмерному. Решения, которые мы называем *гравитационными волнами спина 1*, при переходе к трехмерному случаю (при рассмотрении дополнительного измерения в качестве направления распространения волны) порождают чисто электромагнитные поля.

3.3. Еще о волновом характере поля. До настоящего момента предполагалось, что метрики (9) действительно представляют волноподобные гравитационные поля. Хотя это и кажется очевидным с “линеаризованной” точки зрения, тем не менее, поскольку эти метрики также являются решениями точных уравнений Эйнштейна, следует попытаться использовать ковариантные критерии для установления их волнового характера. Здесь мы будем рассматривать гравитационные поля (2), где

$$\partial_u(\partial_x^2 + \partial_y^2)\varphi = 0, \quad (\partial_x^2 + \partial_y^2)\varphi = 0$$

– вакуумные уравнения Эйнштейна и условия гармоничности, соответственно.

Волновой характер и поляризацию этих гравитационных полей можно анализировать различными способами. Например, можно использовать критерий Зельманова [34], чтобы показать, что они являются гравитационными волнами, и псевдотензор Ландау–Лифшица для нахождения направления их распространения [25], [31]. Однако легче использовать алгебраический критерий Пирани, поскольку он определяет одновременно и волновой характер решений, и направление распространения. Более того, было показано, что в вакуумном случае эти два метода согласуются [31]. Чтобы использовать этот критерий, скаляры Вейля следует вычислять согласно классификации Петрова–Пенроуза [35], [36].

Для классификации Петрова–Пенроуза следует выбрать *тетрадный* базис с двумя вещественными светоподобными векторными полями и двумя вещественными пространственноподобными (или двумя комплексными светоподобными) векторными полями. Тогда, согласно критерию Пирани, если метрика по классификации Петрова принадлежит типу **N**, то она является гравитационной волной, распространяющейся вдоль одного из двух вещественных светоподобных векторных полей. Поскольку ∂_u и ∂_v – светоподобные вещественные векторные поля, а ∂_x и ∂_y – пространственноподобные вещественные векторные поля, приведенный выше набор координат является правильным для приложения критерия Пирани.

Так как ненулевые компоненты тензора Римана, соответствующие метрике (2), имеют вид

$$R_{iuju} = -\partial_{ij}^2 \partial_u \varphi, \quad i, j = x, y,$$

это гравитационное поле принадлежит типу **N** по классификации Петрова [34], [37]. Тогда, согласно критерию Пирани, метрика (2) действительно представляет собой гравитационную волну, распространяющуюся вдоль светоподобного векторного поля ∂_u .

Хорошо известно, что линеаризованные гравитационные волны можно полностью характеризовать в терминах линеаризованных и калибровочных инвариантных скаляров Вейля. Ненулевой скаляр Вейля типичной гравитационной волны спина 2 есть Ψ_4 . Метрики (2) также имеют Ψ_4 в качестве не обращающегося в нуль скаляра Вейля. Что действительно отличает гравитационные волны спина 1 от гравитационных волн спина 2, так это тот факт, что в случае спина 1 скаляр Вейля нетривиально зависит от трансверсальных координат x, y из-за наличия гармонической функции. Это может привести к эффектам, наблюдаемым на масштабах больших, чем *характеристическая длина*, на которой гармоническая функция существенно изменяется. Действительно, скаляр Вейля входит в уравнение геодезического отклонения, откуда следует нестандартная деформация кольца пробных частиц, нарушающая инвариантность при вращении на π вокруг направления распространения. Можно сказать, что отличительные эффекты для волн спина 1 должны наблюдаться на достаточно больших масштабах длин.

Следует также подчеркнуть, что, согласно результатам работы [38], источники асимптотически плоских РР-волн (которые в работах [25], [31] были интерпретированы как гравитационные волны спина 1) отталкивают друг друга. Таким образом, с точки зрения теории поля “РР-гравитоны” должны иметь спин 1 [39].

4. ГРАВИТОЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ

Другая точка зрения, полезная для прояснения природы гравитационных волн спина 1, основана на *гравитоэлектромагнетизме* (ГЭМ) (см., например, работу [40]). В этом подходе делается попытка использовать настолько, насколько это возможно, сходство между уравнениями Максвелла и линеаризованными уравнениями Эйнштейна. Чтобы сделать эту аналогию явной, достаточно записать слабое гравитационное поле, удовлетворяющее условиям (4), в ГЭМ-виде (см., например, работы [40], [41]):

$$ds^2 = c^2 \left(1 + 2 \frac{\Phi}{c^2} \right) dt^2 + \frac{4}{c} (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}) dt - \left(1 - 2 \frac{\Phi}{c^2} \right) \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (11)$$

где

$$h_{00} = \frac{4\Phi}{c^2}, \quad h_{0i} = -\frac{4A_i}{c^2}$$

(в данном разделе скорость света c указана явно). Здесь и далее пространственную часть 4-векторов мы будем обозначать жирными символами, а также использовать стандартные обозначения трехмерного векторного анализа. В терминах Φ и $\mathbf{A}$ условие гармонической калибровки имеет вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (12)$$

и, поскольку гравитоэлектрическое и гравитомагнитное поля определяются в терминах ГЭМ-потенциалов как

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{2c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (13)$$

мы получаем, что линеаризованные уравнения Эйнштейна оказываются похожими на уравнения Максвелла. Следовательно, поскольку динамика полностью определяется уравнениями типа уравнений Максвелла, ГЭМ-формализм описывает физические эффекты векторной части гравитационного поля. Случаи, обычно описываемые с помощью такого формализма, как правило, являются статическими: в действительности при отказе от данного допущения оказываются также возможными гравитационные ГЭМ-волны.

В асимптотически плоском случае энергетически-импульсное содержание гравитационных полей вида (11) хорошо описывается псевдотензором Ландау–Лифшица $t^{\mu\nu}$ [40].

Как можно ожидать исходя из теории Калуцы–Клейна, гравитационные волны спина 1 можно привести к “почти” ГЭМ-виду. Это можно понять, если вспомнить, что они имеют только один индекс в плоскости, трансверсальной к направлению распространения. В случае общего положения гравитационные волны спина 1, распространяющиеся вдоль оси z в плоском пространстве-времени, имеют вид (2) с $u = z - t$ и $v = z + t$, что практически совпадает с видом (11), если заменить времениподобный индекс 0 светоподобным индексом u , определяющим направление распространения волны. Аналог гравитомагнитного потенциала в этом случае имеет вид $\mathbf{A}(x, y, u) = (\varphi_{,x}, \varphi_{,y}, 0)$, а условие гармонической калибровки записывается как

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = (\partial_x^2 + \partial_y^2)\varphi = 0. \quad (14)$$

Таким образом, аналоги гравитоэлектрического и магнитного полей имеют вид

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2c}(\varphi_{,xu}, \varphi_{,yu}, 0), \quad \mathbf{B} = (\varphi_{,yu}, -\varphi_{,xu}, 0), \quad (15)$$

а уравнения Эйнштейна сводятся к

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi G\rho, \quad (16)$$

так что вне материальных источников из условия гармонической калибровки следуют вакуумные уравнения поля.

5. НЕПРЯМЫЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ ЭФФЕКТЫ

В этом разделе мы кратко обсудим два возможных эффекта для гравитационных волн спина 1: убывание орбитального периода в бинарных системах и векторные космологические возмущения.

5.1. Излучение спина 1 в бинарных системах. Непрямые наблюдаемые эффекты очень важны для проверки предсказаний теории гравитационных волн. До настоящего времени единственное доступное наблюдение излучения гравитационных волн физической системой относится к бинарному пульсару PSR1913+16 [42]. В частности, было замечено, что его период обращения убывает с течением времени из-за испускания им гравитационных волн спина 2, уносящих энергию из системы на бесконечность; наблюдаемое поведение очень хорошо согласуется с предсказаниями общей теории относительности (см., например, книги [29], [43]). Поскольку

не известны точные решения, описывающие динамику бинарной системы, следует подумать об учете вклада волн спина 1 в полные энергетические потери. Поток энергии, излучаемый гравитационными волнами спина 1, можно явно вычислить, используя псевдотензор Ландау–Лифшица в ГЭМ-виде (который подходит для работы с компонентами спина 1). Можно проверить, что отношение вклада спина 1 к вкладу спина 2 в светимость излучаемых гравитационных волн имеет вид

$$\frac{L_{(1)}^{\text{BS}}}{L_{(2)}^{\text{BS}}} \approx \left(\frac{a}{R}\right)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2,$$

где R – расстояние между наблюдателем и источником, а v – орбитальная скорость источника. Порядок величины этого отношения для бинарных систем типа PSR1913+16

$$\frac{L_{(1)}^{\text{BS}}}{L_{(2)}^{\text{BS}}} \approx 10^{-26}.$$

Таким образом, очень маловероятно, что в ближайшем будущем мы сможем наблюдать вклад спина 1 в бинарных системах.

5.2. Векторные космологические возмущения. Анализ космологических возмущений мог бы объяснить анизотропии, наблюдаемые в реликтовом излучении. Космологические возмущения метрики можно разложить на скалярную, векторную и тензорную части. Обычно предполагается, что векторные возмущения (без материальных источников) являются чистой калибровкой, но это не относится к случаю наличия топологических дефектов. Такие возмущения могли бы иметь наблюдаемые следствия, связанные, например, с анизотропиями реликтового излучения. В этом разделе мы рассмотрим векторные возмущения на плоском фоне Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ). Гравитационные поля, описывающие векторные возмущения, имеют вид

$$g = dt^2 - a^2(t)(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}) - (\mathbf{S} \cdot d\mathbf{x}) dt, \quad (17)$$

где $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \delta_{ij} dx^i dx^j$ (точка обозначает евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$), $\mathbf{S} = S^1(t, x^i), S^2(t, x^i), S^3(t, x^i)$ – векторное возмущение, t – стандартное время в системе отсчета, сопровождающей фоновую метрику ФРУ. Это не самый общий случай векторного возмущения, но его достаточно, чтобы пролить свет на интересные свойства возмущений такого типа¹¹⁾. Как и в случае гравитационных волн спина 1 в плоском пространстве-времени (присутствие которых связано с нетривиальными топологическими дефектами и/или с соответствующими материальными источниками), в присутствии топологических дефектов векторные возмущения также не являются чистой калибровкой. Линеаризованный тензор Эйнштейна в так называемой ньютоновской калибровке для рассматриваемого возмущения имеет вид (см.,

¹¹⁾Используя технику, развитую в работе [44], можно показать, что векторное возмущение на ФРУ-фоне с помощью выбора калибровки всегда можно зафиксировать в виде (17).

например, работу [45])

$$\kappa^2 \delta T_0^i = -\Delta S^i, \quad (18)$$

$$\kappa^2 \delta T_j^i = -\frac{1}{2a^4} \partial_t [a^2 (S_{,i}^j + S_{,j}^i)], \quad (19)$$

где Δ – обыкновенный плоский лапласиан, а δT_μ^ν – тензор энергии-импульса возмущений. В работе [45] было показано, что если тензор δT_μ^ν не обращается в нуль, то возмущение метрики $\mathbf{S}$ всегда возрастает при убывании масштабного множителя. С другой стороны, обычно утверждают, что *когда δT_μ^ν обращается в нуль, нетривиальных векторных возмущений нет*, поскольку в этом случае уравнение (18) сводится к уравнению

$$\Delta \mathbf{S} = 0. \quad (20)$$

Здесь замечают, что не имеется решений рассматриваемых уравнений, поскольку с помощью преобразования Фурье получается

$$(\mathbf{k})^2 \mathbf{S} = 0,$$

так что, с первого взгляда, остается только тривиальное решение. Таким образом, заключение об отсутствии нетривиальных векторных возмущений при обращении δT_μ^ν в нуль в общем случае неверно: при наличии топологических дефектов (монополей, космических струн и т.д., см., например, работу [22]) имеются гармонические функции с хорошим асимптотическим поведением, которые нельзя подвергнуть преобразованию Фурье, и особенности которых сглаживаются самими топологическими дефектами. В области $\mathcal{S}_0$, где имеется топологический дефект, естественно предположить невозможность использования линейаризованных уравнений из-за наличия сильных полей. Действительно, вне области сильных полей (т.е. в области, которая топологически эквивалентна $\mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{S}_0$) можно использовать линейаризованную теорию: область сильных полей проявляется через нетривиальные граничные условия, разрешающие наличие нетривиальных решений уравнения (20) в $\mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{S}_0$. Например, можно найти такие факторизованные решения вида

$$\mathbf{S} = \frac{1}{a^2} (S^1(x, y, z), S^2(x, y, z), S^3(x, y, z)), \quad (21)$$

$$\Delta S^i = 0, \quad \partial_i S^i = 0, \quad (22)$$

что S^i будут сингулярными гармоническими функциями пространственноподобных координат с хорошим поведением в $\mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{S}_0$, например,

$$S^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k, \quad \Delta A_j = 0, \quad (23)$$

$$A_j = \partial_k \left(\frac{1}{r} \right), \quad k \neq j, \quad (24)$$

где последнее условие добавлено для того, чтобы избежать обращающихся в нуль S^i . Более точно, решение (22) следует интерпретировать как векторное возмущение, порожденное сингулярным тензором энергии-импульса $\delta T_\mu^\nu \sim \delta^{3-p}(x^i)$, где $\delta^{3-p}(x^i)$ –

$(3 - p)$ -мерная дельта-функция Дирака, особенности которой в трехмерных пространственноподобных срезах соответствуют положениям топологических дефектов: $p = 0$ для монополей, $p = 1$ для космических струн и $p = 2$ для доменных стенок. Пространственное преобразование Фурье векторных возмущений в уравнении (23) существенно отличается от обычных, приводящих, например, к плоскому спектру как для скалярных, так и для тензорных возмущений. При вычислении преобразования Фурье векторного возмущения S^i вклады внутри и вне сферической области $\mathcal{S}_0$ радиуса r_0 , в которой живет монополь при заданном сопутствующем времени, рассматриваются по отдельности. Таким образом, имеем

$$S^i(k) \sim \frac{k_j k_l}{k^2}$$

при $k \lesssim 1/r_0 = k_0$ и

$$S^i(k) \sim \frac{(k_j k_l k_0^2)}{k^4} \left[b_2 \frac{\sin(k/k_0)}{(k/k_0)} - b_1 \cos\left(\frac{k}{k_0}\right) + (b_1 - b_2) \right]$$

при $k \gg k_0$; здесь b_i — две числовые константы, а гравитационный потенциал внутри области $\mathcal{S}_0$ выбран непрерывным вместе со своей первой производной. Даже если плотность топологических дефектов в настоящее время сильно подавлена, они могут оставить след в мелкомасштабных анизотропиях реликтового излучения как векторные возмущения, порожденные в течение инфляционной фазы. Такие следы можно было бы наблюдать в виде импульсов порядка $\sim 1/r_0$, где r_0 — радиус области сильных полей, в которой живет монополь. Не следует ожидать значительных эффектов, порожденных векторными модами, поскольку они убывают во времени. Поэтому можно надеяться на обнаружение подобных эффектов, проявивших себя до конца инфляционного периода (после которого масштабный множитель становится слишком большим).

Благодарности. Г. Вилази благодарит профессоров Д. Алексеевского и Х. Баум за любезное приглашение принять участие в Программе “Применение геометрии псевдоримановых многообразий в физике” в Shrödinger Institute for Mathematical Physics в Вене и за интересные обсуждения.

Список литературы

- [1] В. А. Белинский, В. Е. Захаров, *ЖЭТФ*, **75**:6 (1978), 1955; **77**:1 (1979), 3.
- [2] S. De Filippo, G. Marmo, M. Salerno, G. Vilasi, *On the phase manifold geometry of integrable nonlinear field theory*, Preprint IFUSA, Salerno, 1982.
- [3] S. De Filippo, G. Marmo, M. Salerno, G. Vilasi, *Nuovo Cimento B*, **83**:2 (1984), 97.
- [4] S. De Filippo, M. Salerno, G. Vilasi, *Lett. Math. Phys.*, **9** (1985), 85.
- [5] G. Landi, G. Marmo, G. Vilasi, *J. Math. Phys.*, **35** (1994), 808.
- [6] K. S. Thorne, *Gravitational waves*, [gr-qc/9506086](#).
- [7] D. Christodoulou, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991), 1486.
- [8] K. S. Thorne, *Phys. Rev. D*, **45** (1992), 520.
- [9] G. Sparano, G. Vilasi, A. M. Vinogradov, *Phys. Lett. B*, **513** (2001), 142.
- [10] G. Sparano, G. Vilasi, A. M. Vinogradov, *Diff. Geometry Appl.*, **16** (2002), 95.
- [11] G. Sparano, G. Vilasi, A. M. Vinogradov, *Diff. Geometry Appl.*, **17** (2002), 15.

- [12] D. Catalano Ferraioli, A.M. Vinogradov, *Acta Appl. Math.*, **94** (2006), 193; Preprint DIPS 7/2004, <http://diffiety.org/preprint/2004/07-04abs.htm>.
- [13] D. Catalano Ferraioli, A.M. Vinogradov, *Acta Appl. Math.*, **94** (2006), 209; Preprint DIPS 8/2004, <http://www.diffiety.ac.ru/preprint/2004/08-04abs.htm>.
- [14] M. Bächtold, *Ricci flat metrics with bidimensional null orbits and non-integrable orthogonal distribution*, Preprint DIPS 3/2005, <http://www.diffiety.ac.ru/preprint/2005/03-05abs.htm>.
- [15] G. Sparano, G. Vilasi, A.M. Vinogradov, "Einstein metrics with 2-dimensional Killing leaves. III. The semi-integrable case" (to appear).
- [16] A. Einstein, N. Rosen, *J. Franklin Inst.*, **223** (1937), 43.
- [17] N. Rosen, *Bull. Res. Council Israel*, **3** (1954), 328.
- [18] А. С. Компанеев, *ЖЭТФ*, **34** (1958), 953.
- [19] R. Geroch, *J. Math. Phys.*, **13** (1972), 394.
- [20] В. А. Белинский, И. М. Халатников, *ЖЭТФ*, **57** (1970), 2163.
- [21] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, 2nd ed., Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [22] F. Canfora, G. Vilasi, *Phys. Lett. B*, **585** (2004), 193.
- [23] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.*, **3** (1959), 571.
- [24] A. Peres, *Phys. Rev. (2)*, **118** (1960), 1105.
- [25] F. Canfora, G. Vilasi, P. Vitale, *Phys. Lett. B*, **545** (2002), 373.
- [26] J. B. Hartle, S. W. Hawking, *Phys. Rev. D*, **28** (1983), 2960.
- [27] H. Ooguri, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **367** (1991), 83.
- [28] J. Barret, G. W. Gibbons, M. J. Perry, C. N. Pope, P. Ruback, *Int. J. Mod. Phys. A*, **9** (1994), 1457.
- [29] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, New York, 1972.
- [30] P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*, Wiley, New York, 1975.
- [31] F. Canfora, G. Vilasi, P. Vitale, *Int. J. Mod. Phys. B*, **18** (2004), 527.
- [32] P. C. Aichelburg, R. U. Sexl, *Gen. Relat. Grav.*, **2** (1971), 303.
- [33] E. C. de Rey Neto, *Phys. Rev. D*, **68** (2003), 124013.
- [34] В. Д. Захаров, *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна*, Наука, М., 1972.
- [35] А. З. Петров, *Пространства Эйнштейна*, Физматгиз, М., 1961.
- [36] R. Penrose, *Ann. Phys.*, **10** (1960), 171.
- [37] С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр*, Мир, М., 1986.
- [38] G. W. Gibbons, P. J. Ruback, *Phys. Rev. Lett.*, **57** (1986), 1492.
- [39] F. Canfora, G. Vilasi, *Class. Q. Grav.*, **22** (2005), 1193.
- [40] B. Mashhoon, "Gravitoelectromagnetism", *Reference Frames and Gravitomagnetism* (Val-ladolid, Spain, 2000), eds. J. F. Pascual-Sánchez, L. Floría, A. San Miguel, F. Vicente, World Scientific, River Edge, NJ, 2001, 121; [gr-qc/0011014](http://arxiv.org/abs/gr-qc/0011014).
- [41] M. L. Ruggiero, A. Tartaglia, *Nuovo Cimento B*, **117** (2002), 743.
- [42] R. A. Hulse, J. H. Taylor, *Astrophys. J.*, **195** (1975), L51.
- [43] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Релятивистская астрофизика*, Наука, М., 1967.
- [44] J. Bardeen, *Phys. Rev. D*, **22** (1980), 1882.
- [45] T. Battefeld, R. Brandenberger, *Phys. Rev. D*, **70** (2004), 121302(R).