Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Хренников, Квантовая механика как квадратичная тейлоровская аппроксимация классической механики: конечномерный случай, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 2, 278–291

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6087>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:50:11

© 2007 г.

А. Ю. Хренников*

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА КАК КВАДРАТИЧНАЯ ТЕЙЛОРОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ: КОНЕЧНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Показано, что вопреки довольно распространенному мнению квантовую механику можно представить как аппроксимацию классической статистической механики. Рассмотрена аппроксимация, основанная на обычном разложении Тейлора физических переменных. Квантовый вклад дается членом второго порядка. Во избежание технических трудностей, связанных с бесконечной размерностью фазового пространства в квантовой механике, рассмотрена конечномерная квантовая механика. С одной стороны, она представляет собой простой пример, имеющий большое педагогическое значение. С другой стороны, в теории квантовой информации используется конечномерное пространство состояний. Поэтому проведенные исследования можно рассматривать как построение классической статистической модели квантовой информации.

Ключевые слова: квантовые и классические средние, формула фон Неймана для следа, аппроксимация, малый параметр, разложение Тейлора.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема соотношения между классической статистической механикой и квантовой механикой была источником постоянных дискуссий в течение последних ста лет (по поводу недавних обсуждений см. работы [1], [2] и приведенную в них библиографию).

Основные аргументы против возможности сведения квантовой случайности к классической были представлены в виде так называемых “теорем о невозможности”: фон Неймана [3], Кохена–Спекера, Белла. Наши контраргументы [4] состоят в том, что вся деятельность по поводу “невозможности” не слишком серьезно

*International Center for Mathematical Modeling in Physics and Cognitive Sciences, MSI, University of Växjö, S-35195, Sweden. E-mail: Andrei.Khrennikov@msi.vxu.se

обоснована, поскольку никто не знает, как должно выглядеть соответствие “классическое $\rightarrow$ квантовое”¹⁾. Авторы теорем “о невозможности” придумали свои собственные правила для соответствия “классическое $\rightarrow$ квантовое” и доказали, что для таких правил не может быть построена классическая предквантовая модель. Они критиковали друг друга (например, Белл сильно критиковал фон Неймана [3]) и изобретали новые и новые правила и теоремы.

Мы покажем, что вопреки довольно распространенному мнению квантовую механику можно представить как аппроксимацию классической статистической механики. Аппроксимация основана на обычном разложении Тейлора физических переменных. Квантовый вклад дается членом второго порядка. Во избежание технических трудностей, связанных с бесконечной размерностью фазового пространства в квантовой механике [4], в настоящей работе мы будем рассматривать предквантовую классическую модель *конечномерной квантовой механики*. С одной стороны, она представляет собой простой пример, имеющий большое педагогическое значение. С другой стороны, в теории квантовой информации используется конечномерное пространство состояний. Поэтому наши исследования можно рассматривать как построение классической статистической модели квантовой информации.

Как было отмечено, имея дело с конечномерным фазовым пространством, мы крайне упрощаем модель, представленную в работе [4] для бесконечномерного случая. Вместо функциональных интегралов в настоящей работе мы рассмотрим обычные гауссовы интегралы по $\mathbb{R}^{2m}$. Это позволяет провести точные вычисления и прояснить структуру модели. Поскольку автор пришел к выводу (в результате докладов на ряде конференций), что понимание бесконечномерной модели вызывает существенные трудности, в настоящей работе мы подробно обсудим конечномерную модель²⁾.

2. КВАНТОВАЯ МОДЕЛЬ

Вещественная квантовая механика. Мы будем использовать упрощенную (toy) модель квантовой механики, основанную на вещественном пространстве. Для такой упрощенной модели статистические особенности соответствия между предквантовой классической статистической моделью и квантовой механикой наиболее очевидны. Обозначим алгебру всех вещественных $(m \times m)$ -матриц символом $M^{(r)}(m)$. Обозначим через $\mathcal{D}^{(r)}(m)$ класс неотрицательных симметричных матриц

¹⁾Подчеркнем, что мы не говорим о так называемом деформационном квантовании: “когда постоянная Планка рассматривается как пренебрежимо малая, квантовая механика преобразуется в классическую”. Мы ищем более общую классическую модель, которая воспроизводит квантовую механику в качестве аппроксимации.

²⁾Упомянем и другие отличия от предыдущих работ: параметр деформации α более не отождествляется с постоянной Планка, ср. с [4]; найдена фундаментальная группа преобразований предквантового фазового пространства, ср. с [4], где требовалась согласованность с симплектической структурой; в работе [4] мы имели дело с аналитическими классическими переменными, а в настоящей работе мы можем оперировать с гладкими переменными (действительно, все рассмотрения можно выполнить для непрерывных четырежды дифференцируемых функций).

$\rho \in M^{(r)}(m)$ со следом, равным единице. Мы будем называть их “матрицами плотности”. Обозначим через $L_s^{(r)}(m)$ класс всех симметричных матриц. В квантовой модели (для случая m -мерного вещественного пространства) статистические состояния (описывающие ансамбли систем, приготовленных для измерения) представляются матрицами плотности, а квантовые наблюдаемые – матрицами, принадлежащими $L_s^{(r)}(m)$. *Квантовое среднее* наблюдаемой $A \in L_s^{(r)}(m)$ по отношению к статистическому состоянию $\rho \in \mathcal{D}^{(r)}(m)$ задается с помощью операторного следа (формула фон Неймана [3]):

$$\langle A \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho A). \quad (1)$$

В операторном представлении наблюдаемые и матрицы плотности задаются соответствующими классами $\mathbb{R}$ -линейных операторов. Обозначим квантовую модель через $N_{\text{quant}}^{(r)} = (\mathcal{D}^{(r)}(m), L_s^{(r)}(m))$.

Если $m = 1$, то квантовые наблюдаемые задаются вещественными числами (операторами умножения на вещественные числа на вещественной прямой), и существует только одно статистическое состояние $\rho = 1$. При этом $\langle A \rangle_\rho = \rho A = A$.

Комплексная квантовая механика. Обозначим алгебру всех комплексных $(m \times m)$ -матриц символом $M^{(c)}(m)$. Обозначим через $\mathcal{D}^{(c)}(m)$ класс неотрицательных симметричных матриц $\rho \in M^{(c)}(m)$ со следом, равным единице. Мы будем называть их “матрицами плотности”. Обозначим через $L_s^{(c)}(m)$ класс всех симметричных матриц. В квантовой модели (для m -мерного комплексного пространства) статистические состояния (описывающие ансамбли систем, приготовленных для измерения) представляются матрицами плотности, а квантовые наблюдаемые – матрицами, принадлежащими $L_s^{(c)}(m)$. *Квантовое среднее* дается [3] выражением (1). В операторном представлении наблюдаемые и матрицы плотности задаются соответствующими классами $\mathbb{C}$ -линейных операторов. Обозначим квантовую модель через $N_{\text{quant}}^{(c)} = (\mathcal{D}^{(c)}(m), L_s^{(c)}(m))$.

Если $m = 1$, то квантовые наблюдаемые задаются вещественными числами (операторами умножения на вещественные числа на комплексной плоскости), и имеется только одно статистическое состояние $\rho = 1$. При этом $\langle A \rangle_\rho = \rho A = A$.

3. СРЕДНИЕ КВАНТОВОГО ТИПА: ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Состояния систем представляются вещественными числами, $q \in Q = \mathbb{R}$. Ансамбли таких систем описываются вероятностными мерами на вещественной прямой – *статистическими состояниями*. Рассмотрим специальный класс процедур приготовления. Они готовят ансамбли систем, описываемых гауссовыми распределениями вероятности на Q с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma^2(\mu) = \alpha + O(\alpha^2), \quad (2)$$

где, как всегда, $|O(\alpha^2)| \leq C\alpha^2$ для некоторой константы C , а α достаточно мало. Важнейший момент состоит в том, что α является *малым параметром* нашей модели. Обозначим этот класс распределений вероятности символом $S_G^\alpha(Q)$.

Для вероятности $\mu \in S_G^\alpha(Q)$ имеем $d\mu(q) = [\sqrt{2\pi(\alpha + O(\alpha^2))}]^{-1} e^{-\frac{q^2}{2(\alpha + O(\alpha^2))}} dq$. Напомним, что для вероятности с нулевым средним дисперсия имеет вид

$$\sigma^2(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha + O(\alpha^2))}} \int_{-\infty}^{\infty} q^2 e^{-\frac{q^2}{2(\alpha + O(\alpha^2))}} dq. \quad (3)$$

Как уже было сказано, мы рассматриваем α как малый параметр. Поэтому гауссовы распределения вероятности *сосредоточены в очень узкой области вблизи точки* $q_0 = 0$. Используя терминологию функционального анализа, мы будем говорить, что $\{\mu \equiv \mu(\alpha)\}$ представляет собой δ -семейство $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu(\alpha) = \delta$ в смысле теории обобщенных функций.

В приближении $\alpha = 0$ все системы локализованы в одной точке, а именно в точке q_0 . Однако точное описание (в котором параметром α нельзя пренебречь) дает картину гауссовых “колоколов”, сосредоточенных в окрестности точки q_0 . Заметим, что в среднем система не может уйти далеко от точки q_0 . Используя неравенство Чебышева, для любого $C > 0$ получаем

$$\mu\{q: |q| > C\} \leq \frac{\alpha + O(\alpha^2)}{C^2} \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (4)$$

Однако вероятностное неравенство (4) не исключает возможности того, что некоторые системы могут уходить далеко от точки q_0 (конечно, с малой вероятностью).

Введем также класс *физических переменных* в рассматриваемой классической статистической модели как множество функций f , удовлетворяющих следующим условиям: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ – гладкая функция; $f(0) = 0$; $|f^{(4)}(q)| \leq c_f e^{r_f |q|}$, где $c_f, r_f \geq 0$. Обозначим это функциональное пространство символом $\mathcal{V}(Q)$, $Q = \mathbb{R}^3$.

ЛЕММА 3.1. Пусть функция $f \in C^n$ (n раз непрерывно дифференцируема) и ее n -я производная есть функция экспоненциального роста. Тогда все производные порядка $0, \dots, n-1$ также будут иметь экспоненциальный рост (в частности, $f(q)$ экспоненциально возрастает).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем разложение Тейлора с интегральным остаточным членом:

$$f(q) = f(0) + f'(0)q + \frac{f''(0)q^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)q^3}{3!} + \dots + \frac{q^n}{n!} \int_0^1 (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta q) d\theta. \quad (5)$$

Поскольку рост любого многочлена можно компенсировать уменьшением величины $e^{-r|q|}$, используя экспоненциальную оценку для n -й производной, получаем

$$|f(q)| = C_1 e^{r|q|} + C_2 \frac{q^n}{n!} \int_0^1 (1-\theta)^{n-1} e^{r|q\theta|} d\theta \leq C e^{r|q|}. \quad (6)$$

³⁾ Ограничение роста четвертой производной будет использовано, когда мы будем рассматривать разложение Тейлора функции f вплоть до четвертого члена. Из экспоненциального роста следует интегрируемость по любой гауссовой мере.

Здесь все константы зависят от f .

Это простое упражнение из курса математического анализа будет полезно в наших дальнейших рассмотрениях. Мы определили следующую классическую статистическую модель на вещественной прямой:

- 1) *состояния* систем являются вещественными числами;
- 2) *статистические состояния* (ансамблей систем) представлены гауссовыми распределениями с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2(\mu) = \alpha + O(\alpha^2)$, $\alpha \rightarrow 0$;
- 3) *физические переменные* являются гладкими функциями f с экспоненциально возрастающими четвертыми производными, причем $f(0) = 0$.

Обозначим эту модель через $N_{\text{class}}^\alpha = (S_G^\alpha(Q), \mathcal{V}(Q))$. Как всегда в классической статистической физике, среднее физической переменной $f \in \mathcal{V}(Q)$ по ансамблю систем, описываемому вероятностью $\mu \in S_G^\alpha(Q)$, задается интегралом

$$\langle f \rangle_\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha + O(\alpha^2))}} \int_{-\infty}^{\infty} f(q) e^{-\frac{q^2}{2(\alpha + O(\alpha^2))}} dq. \quad (7)$$

Поскольку α – параметр модели, можно рассмотреть средние как функции α : $\langle f \rangle_\mu \equiv \langle f \rangle_\mu(\alpha)$. Мы интересуемся асимптотическим разложением средних при $\alpha \rightarrow 0$. В частности, такое асимптотическое разложение дает нам возможность приближенного вычисления средних.

ЛЕММА 3.2. Пусть $f \in \mathcal{V}(Q)$, $\mu \in S_G^\alpha(Q)$. Тогда

$$\langle f \rangle_\mu(\alpha) = \frac{\alpha}{2} f''(0) + O(\alpha^2). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем со скейлинга переменной состояния:

$$q = \sigma(\mu)x. \quad (9)$$

Имеем

$$\langle f \rangle_\mu(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma(\mu)x) e^{-x^2/2} dx. \quad (10)$$

Теперь разложим $f(\sigma(\mu)x)$, используя формулу Тейлора четвертого порядка с интегральным остаточным членом, см. лемму 3.1:

$$\langle f \rangle_\mu(\alpha) = \frac{\sigma^2(\mu)}{2} f''(0) + \frac{\sigma^4(\mu)}{4! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \left(\int_0^1 (1-\theta)^3 f^{(4)}(\sigma(\mu)x\theta) d\theta \right) e^{-x^2/2} dx. \quad (11)$$

Напомним, что для гауссовой меры с нулевым средним все нечетные моменты равны нулю. Этот факт важен для нашего рассмотрения. Из него следует, что первый ненулевой вклад в классическое среднее дается второй производной – квадратичным членом. Исчезновение члена третьего порядка имеет своим следствием асимптотическое поведение $O(\alpha^2)$. Для того чтобы получить эту асимптотику, оценим остаточный член:

$$|R(f, \mu)| \leq \frac{C\sigma^4(\mu)}{4! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \left(\int_0^1 (1-\theta)^3 e^{r\sigma(\mu)|x|\theta} d\theta \right) e^{-x^2/2} dx.$$

Поскольку мы рассматриваем α как малый параметр, можно предположить, что в показателе экспоненты $|\sigma(\mu)| \leq 1$. Таким образом, получаем

$$|R(f, \mu)| \leq C' \sigma^4(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{r|x| - x^2/2} dx.$$

Поскольку $\sigma^2(\mu) = \alpha + O(\alpha^2)$, имеем $R(f, \mu) = O(\alpha^2)$, $\alpha \rightarrow 0$.

Рассмотрим дисперсию $\sigma^2(\mu)$ как *интенсивность флуктуаций* в ансамбле систем. Определим *относительное среднее* по интенсивности флуктуаций посредством нормирования среднего на главный член (на α) в выражении для интенсивности флуктуаций:

$$\langle\langle f \rangle\rangle_{\mu} = \frac{\langle f \rangle_{\mu}}{\alpha}.$$

Конечно, $\langle\langle f \rangle\rangle_{\mu}$ является также функцией параметра α : $\langle\langle f \rangle\rangle_{\mu}(\alpha) = \langle f \rangle_{\mu}(\alpha)/\alpha$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $f \in \mathcal{V}(Q)$, $\mu \in S_G^{\alpha}(Q)$. Тогда

$$\langle\langle f \rangle\rangle_{\mu} = \frac{f''(0)}{2} + O(\alpha). \quad (12)$$

В частности, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \langle\langle f \rangle\rangle_{\mu}(\alpha) = f''(0)/2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Справедлива следующая формула:

$$\langle\langle f \rangle\rangle_{\mu} = \frac{\langle f \rangle_{\mu}}{\sigma^2(\mu)} + O(\alpha). \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Второй член в формуле Тейлора дает множитель $1/2$, который выглядит как помеха в нашей асимптотической формуле для классического среднего. В комплексном представлении этот множитель исчезает, и формула становится симпатичнее.

Мы показали, что $f''(0)/2$ дает аппроксимацию (классического) относительного среднего. Точность такой аппроксимации равна α . Если уровень развития измерительной технологии таков, что в измерениях пренебрегают всеми вкладами порядка α , то средние можно вычислить, используя следующее простое правило:

$$\langle\langle f \rangle\rangle_{\mu}^{\text{approx}} = \left[\frac{\langle f \rangle_{\mu}}{\sigma^2(\mu)} \right]^{\text{approx}} = \frac{f''(0)}{2}. \quad (14)$$

На первый взгляд, такие средние не имеют ничего общего с классическими средними, которые вычисляются с помощью интегралов. Можно было бы даже дать такую интерпретацию физики, в которой утверждается, что правила классической теории вероятности нарушаются, и которая связывает экзотическое правило (14) вычисления средних со специальными свойствами рассматриваемых систем (а не со специальной процедурой аппроксимации для средних).

Наконец, заметим, что вычисление средних с помощью формулы (14) существенно проще, чем вычисление классических вероятностных средних с помощью интегралов Лебега.

4. СРЕДНИЕ КВАНТОВОГО ТИПА: МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Состояния являются векторами $q \in Q = \mathbb{R}^m$; статистические состояния являются гауссовыми распределениями с нулевым средним и с дисперсией $\sigma^2(\mu) = \alpha + O(\alpha^2)$. Обозначим такой класс вероятностей символом $S_G^\alpha(Q)$. Введем скалярное произведение и норму на Q : $(\xi, q) = \sum_{j=1}^m \xi_j q_j$ и $\|q\|^2 = \sum_{j=1}^m q_j^2$. Если гауссова мера μ невырождена (так что мера любого открытого множества положительна), то

$$d\mu(q) = \frac{e^{-(B^{-1}q, q)/2} dq}{\sqrt{(2\pi)^m \det B}},$$

где B – положительный оператор (мы всюду рассматриваем только гауссовы меры с нулевыми средними). Если $\mu \in S_G^\alpha(Q)$ и невырождена, то

$$\sigma^2(\mu) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det B}} \int_{\mathbb{R}^m} \|q\|^2 e^{-(B^{-1}q, q)/2} dq = \alpha + O(\alpha^2).$$

В общем случае самый простой способ определения гауссовой меры состоит в использовании ее фурье-преобразования:

$$\tilde{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i(\xi, q)} d\mu(q) = e^{-(Bq, q)/2},$$

где $B = \text{cov } \mu$ – ковариационный оператор:

$$(B\xi_1, \xi_2) = \int_{\mathbb{R}^m} (\xi_1, q)(\xi_2, q) d\mu(q).$$

Заметим, что ковариационный оператор положительно определен и симметричен.

ЛЕММА 4.1. Пусть μ – гауссова мера с нулевым средним значением и A – симметричный оператор. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^m} (Aq, q) d\mu(q) = \text{Tr}(BA), \quad B = \text{cov } \mu.$$

Для доказательства этой леммы достаточно разложить квадратичную форму (Aq, q) по ортогональному базису.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Справедливо следующее равенство:

$$\sigma^2(\mu) = \int_{\mathbb{R}^m} \|q\|^2 d\mu(q) = \text{Tr } B.$$

Таким образом, для $\mu \in S_G^\alpha(Q)$ имеем $\text{Tr cov } \mu = \alpha + O(\alpha^2)$. Теперь определим класс физических переменных $\mathcal{V}(Q)$ как множество функций f , удовлетворяющих следующим условиям: $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$; $f(0) = 0$; $\|f^{(4)}(q)\| \leq c_f e^{r_f \|q\|}$, где $c_f, r_f \geq 0$.

Заметим, что n -я производная функции $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ является (симметричным) n -линейным функционалом $f^{(n)}(q): \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Норма этого функционала дается выражением $\|f^{(n)}(q)\| = \sup_{\|h_j\|=1} |f^{(n)}(q)(h_1, \dots, h_n)|$. Лемму 3.1 легко обобщить на многомерный случай.

Таким образом, мы определили классическую статистическую модель $N_{\text{class}} = (S_G^\alpha(Q), \mathcal{V}(Q))$.

ЛЕММА 4.2. Пусть $f \in \mathcal{V}(Q)$, $\mu \in S_G^\alpha(Q)$. Тогда

$$\langle f \rangle_\mu(\alpha) \equiv \int_{\mathbb{R}^m} f(q) d\mu(q) = \frac{\alpha}{2} \text{Tr}(\rho f''(0)) + O(\alpha^2), \quad (15)$$

где ρ – оператор плотности, $\rho = \text{cov } \mu / \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя скейлинг переменной состояния (9) и разлагая $f(\sigma(\mu)x)$ по формуле Тейлора до четвертого порядка с интегральным остаточным членом, получаем

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_\mu(\alpha) &= \frac{\sigma^2(\mu)}{2} \text{Tr}(\rho f''(0)) + \\ &+ \frac{\sigma^4(\mu)}{4!} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_0^1 (1-\theta)^3 f^{(4)}(\sigma(\mu)x\theta)(q, q, q, q) d\theta \right) d\mu_{\text{scal}}(x), \end{aligned} \quad (16)$$

где нормированная гауссова мера μ_{scal} есть образ μ при скейлинге (9). Теперь оценим остаточный член:

$$\begin{aligned} |R(f, \mu)| &\leq \frac{C\sigma^4(\mu)}{4!} \int_{\mathbb{R}^m} \|x\|^4 \left(\int_0^1 (1-\theta)^3 e^{r\sigma(\mu)\|x\|\theta} d\theta \right) d\mu_{\text{scal}}(x) \leq \\ &\leq C'\sigma^4(\mu) \int_{\mathbb{R}^m} \|x\|^4 e^{r\|x\|} d\mu_{\text{scal}}(x). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем $R(f, \mu) = O(\alpha^2)$, $\alpha \rightarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $f \in \mathcal{V}(Q)$ и $\mu \in S_G^\alpha(Q)$ невырожденна. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det B}} \int_{\mathbb{R}^m} f(q) e^{-(B^{-1}q, q)/2} dq = \frac{\alpha}{2} \text{Tr}(\rho f''(0)) + O(\alpha^2), \quad (17)$$

где $\rho = B/\alpha$.

Как и в одномерном случае, введем относительное среднее

$$\langle \langle f \rangle \rangle_\mu \equiv \frac{\langle f \rangle_\mu}{\alpha} = \frac{\int_{\mathbb{R}^m} f(q) d\mu(q)}{\int_{\mathbb{R}^m} \|q\|^2 d\mu(q)} + O(\alpha).$$

В случае невырожденной гауссовой меры имеем

$$\langle \langle f \rangle \rangle_\mu = \frac{\int_{\mathbb{R}^m} f(q) e^{-(B^{-1}q, q)/2} dq}{\int_{\mathbb{R}^m} \|q\|^2 e^{-(B^{-1}q, q)/2} dq} + O(\alpha).$$

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $f \in \mathcal{V}(Q)$ и $\mu \in S_G^\alpha(Q)$. Тогда

$$\langle \langle f \rangle \rangle_\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\rho f''(0)) + O(\alpha). \quad (18)$$

Таким образом, если пренебречь членом порядка α , то можно использовать следующее приближенное вычисление средних: $\langle\langle f \rangle\rangle_\mu^{\text{approx}} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\rho A)$, где $A = f''(0)$ и $\rho = \text{cov } \mu_{\text{scal}}$. Это есть не что иное, как следовая формула фон Неймана для квантовых средних (см. (1)). Действуя более формально, рассмотрим отображения

$$T: S_G^\alpha(Q) \rightarrow \mathcal{D}^{(r)}(m), \quad \rho = T(\mu) = \text{cov } \mu_{\text{scal}}; \quad (19)$$

$$T: \mathcal{V}(Q) \rightarrow L_s^{(r)}(m), \quad A = T(f) = f''(0) \quad (20)$$

(напомним, что гессиан всегда есть симметричная матрица).

ТЕОРЕМА 4.1. *Отображения (19), (20) проецируют классическую статистическую модель $N_{\text{class}} = (S_G^\alpha(Q), \mathcal{V}(Q))$ на квантовую $N_{\text{quant}}^{(r)} = (\mathcal{D}^{(r)}(m), L_s^{(r)}(m))$ так, что классические и квантовые средние оказываются связанными асимптотическим равенством*

$$\langle\langle f \rangle\rangle_\mu = \frac{1}{2} \langle T(f) \rangle_{T(\mu)} + O(\alpha). \quad (21)$$

5. ПРЕДКВАНТОВОЕ ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО: ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В предыдущих разделах мы рассматривали предквантовую упрощенную модель, в которой не учитывалась структура фазового пространства. Соответствующая квантовая модель была моделью над вещественными числами (см. также [4]). С другой стороны, физическая реальность описывается с помощью механики классического фазового пространства и комплексной квантовой механики. Мы увидим, что можно создать модель предквантового фазового пространства, воспроизводящую комплексную квантовую механику. Важный момент состоит в том, что классические переменные и статистические состояния – функции и меры на фазовом пространстве – должны быть инвариантны относительно специальной группы преобразований фазового пространства. Эта фундаментальная предквантовая группа весьма проста – это *специальная ортогональная группа* $SO(2)$ группа вращений фазового пространства.

Состояния систем теперь представляются точками $\psi = (q, p) \in \Omega = Q \times P$, где $Q = P = \mathbb{R}$. Здесь q – координата, а p – импульс, Ω обозначает фазовое пространство. Статистические состояния представляются гауссовыми $SO(2)$ -инвариантными мерами, имеющими нулевые среднее значение и дисперсию

$$\sigma^2(\mu) = 2\alpha + O(\alpha^2); \quad (22)$$

физические переменные задаются $SO(2)$ -инвариантными отображениями, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющими тем же условиям, что определяют переменные f в вещественном случае. Пусть классы мер и функций суть $S_G^\alpha(\Omega | SO(2))$ и $\mathcal{V}(\Omega | SO(2))$, соответственно.

Появление множителя 2 в формуле (22) имеет следующее объяснение: имеют-ся два вклада в флуктуации – флуктуации координат и импульсов. Мы увидим,

что они одинаково распределены. Поэтому в качестве малого параметра модели естественно рассмотреть дисперсию, например, q -флуктуаций (равную дисперсии p -флуктуаций).

Рассмотрим классическую модель $N_{\text{class}} = (S_G^\alpha(\Omega | SO(2)), \mathcal{V}(\Omega | SO(2)))$. Как и в вещественном случае, мы можем получить асимптотическое разложение классических средних (см. (18)). Однако в квантовой механике мы рассматриваем комплексную структуру. Мы бы хотели воспроизвести ее в нашей классической модели. Для этого более детально изучим свойства классических вероятностей и переменных.

Мера μ инвариантна, если для любого $u \in SO(2)$ выполнено следующее равенство: $\int_{\mathbb{R}^2} f(uq) d\mu(q) = \int_{\mathbb{R}^2} f(q) d\mu(q)$. Для гауссовой меры μ с ковариационной матрицей B это эквивалентно условию $[u, B] = 0$, $u \in SO(2)$.

Пусть f – дважды дифференцируемое инвариантное отображение, $f(u\psi) = f(\psi)$, для любого $u \in SO(2)$. Представляя u в виде

$$u = u_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

получаем $f(\cos \theta q - \sin \theta p, \sin \theta q + \cos \theta p) = f(q, p)$. Это выражение представляет собой достаточно сильное ограничение, определяющее очень специальный класс отображений. В частности, получаем $u^* \nabla f(u\psi) = \nabla f(\psi)$ и $u^* f''(u\psi)u = f''(\psi)$. Поэтому $u^* \nabla f(0) = \nabla f(0)$ для любого вращения, откуда $\nabla f(0) = 0$ и $[f''(0), u] = 0$, $u \in SO(2)$.

Удобно ввести коммутант множества $SO(2)$ в алгебре всех (2×2) -матриц $M^{(r)}(2)$:

$$SO'(2) = \{A \in M^{(r)}(2) : [A, u] = 0, u \in SO(2)\}.$$

Заметим, что в качестве $SO(2)$ -генератора можно выбрать симплектический оператор: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому коммутант $SO'(2)$ совпадает с коммутантом J , задаваемым как $\{J\}' = \{A \in M^{(r)}(2) : [A, J] = 0\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $\mu \in S_G^\alpha(\Omega | SO(2))$, $f \in \mathcal{V}(\Omega | SO(2))$. Тогда $B = \text{cov } \mu$ и $A = f''(0)$ принадлежат $SO'(2)$.

ЛЕММА 5.1. Матрица A принадлежит коммутанту $SO'(2)$, если и только если

$$A = \begin{pmatrix} R & -S \\ S & R \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Если, кроме того, A симметрична, то она диагональна: $A = \text{diag}(R, R)$. В частности, ее след равен

$$\text{Tr } A = 2R. \quad (24)$$

Таким образом, если $\mu \in S_G^\alpha(\Omega | SO(2))$, то ее матрица ковариаций диагональна, $B = \text{diag}(b, b)$, где $2b = \alpha + O(\alpha^2)$. Флуктуации координаты q и импульса p независимы и одинаково распределены: $d\mu(p, q) = \frac{1}{2\pi b} \exp\left\{-\frac{q^2 + p^2}{2b}\right\} dp dq$. Обозначим

маргинальные распределения меры μ символами μ_q и μ_p , соответственно. Тогда

$$\sigma^2(\mu_q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 e^{-\frac{q^2}{2b}} dq = \sigma^2(\mu_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 e^{-\frac{p^2}{2b}} dp.$$

Поэтому $\sigma^2(\mu_q) = \sigma^2(\mu_p) = \sigma^2(\mu)/2 = \alpha + O(\alpha^2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть функция $f \in \mathcal{V}(\Omega | SO(2))$. Тогда все ее нечетные производные в точке $q_0 = 0$ равны нулю.

Гессиан функции $f \in \mathcal{V}(\Omega | SO(2))$ имеет вид $f''(0) = \text{diag}(R, R)$, где $R \in \mathbb{R}$, поэтому $f(q, p) = R(q^2 + p^2)/2 + O(\alpha^2)$.

Заметим, что несмотря на совпадение коммутантов $SO(2)$ -инвариантность не эквивалентна J -инвариантности (последняя использовалась в работе [4] в качестве основы при построении теории).

ПРИМЕР. Пусть $f(q, p) = q^3 p - qp^3 = qp(q^2 - p^2)$. Тогда $f(J\psi) = f(\psi)$. Теперь положим $\theta = \pi/4$. Здесь

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (q-p)/\sqrt{2} \\ (q+p)/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому $f(u\psi) = (q-p)(q+p)(q-p-q-p)(q-p+q+p)/4 = -qp(q^2 - p^2)$.

Теперь мы полностью готовы воспроизвести комплексную структуру квантовой механики. Согласно лемме 6.1 любую матрицу, принадлежащую $SO'(2)$, можно представить в виде $A = RI + S(-J)$. С помощью отображений I в 1 и $(-J)$ в i получаем отображение коммутанта $SO'(2)$ в множество комплексных чисел $\mathbb{C}$:

$$j: SO'(2) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z = j(A) = R + iS. \quad (25)$$

Это отображение задает изоморфизм двух полей. В частности, симметричная матрица $A = \text{diag}(R, R)$ представляется вещественным числом $j(A) = R$. Это оператор умножения на R . След этого оператора в одномерном комплексном пространстве $\mathbb{C}$ (со скалярным произведением $(z, w) = z\bar{w}$) равен R . Согласно (24) получаем

$$\text{Tr } A = 2 \text{Tr } j(A), \quad (26)$$

где в левой части мы имеем вещественный след, а в правой части – комплексный. Теперь можно записать основное асимптотическое равенство для средних в комплексном виде. Забавным образом множитель Тейлора $1/2$ исчезает при переходе от вещественной структуры к комплексной (см. (26)).

ЛЕММА 5.2. Пусть $f \in \mathcal{V}(\Omega | SO(2))$, $\mu \in S_G^\alpha(\Omega | SO(2))$. Тогда

$$\langle f \rangle_\mu(\alpha) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} f(q, p) d\mu(q, p) = \alpha j(f''(0)) + O(\alpha^2). \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполним скейлинг переменной состояния:

$$\psi = \frac{\sigma(\mu)}{\sqrt{2}} \Psi. \quad (28)$$

Тогда образом меры μ снова будет гауссова мера, а именно μ_{scal} , дисперсия которой равна $\sigma^2(\mu_{\text{scal}}) = 2$. Положим $D = \text{cov } \mu_{\text{scal}}$. В двумерном случае $D = \text{diag}(1, 1)$ и $\text{Tr } D = 2$. Теперь мы имеем $\langle f \rangle_\mu(\alpha) = \frac{\sigma^2(\mu)}{4} \text{Tr}(Df''(0)) + O(\alpha^2)$. Таким образом, $\langle f \rangle_\mu(\alpha) = \frac{\sigma^2(\mu)}{2} j(D)j(f''(0)) + O(\alpha^2)$. Наконец заметим, что в двумерном случае $j(D) = 1$. Тогда получаем $\langle f \rangle_\mu(\alpha) = \frac{\sigma^2(\mu)}{2} j(f''(0)) + O(\alpha^2)$, откуда следует (27).

Напомним, что в одномерной квантовой механике имеется ровно одна “матрица плотности” $\rho = 1 \in \mathbb{R}$.

Удобно рассмотреть перенормировку средних с помощью главного члена в интенсивностях флуктуаций координаты и импульса: $\langle \langle f \rangle \rangle_\mu = \langle f \rangle_\mu / \alpha$. Тогда получаем $\langle \langle f \rangle \rangle_\mu(\alpha) = j(f''(0)) + O(\alpha)$.

6. ПРЕДКВАНТОВОЕ ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО: МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Состояния систем теперь представляются точками $\psi = (q, p) \in \Omega = Q \times P$, где $Q = P = \mathbb{R}^m$. Здесь $q = (q_1, \dots, q_n)$ – координата, а $p = (p_1, \dots, p_n)$ – импульс, Ω обозначает фазовое пространство. Рассмотрим каноническое представление группы $SO(2)$ в фазовом пространстве $\Omega = Q \times P$:

$$u = u_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta I & -\sin \theta I \\ \sin \theta I & \cos \theta I \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица из $M^{(r)}(m)$. Соответствующую группу $\mathbb{R}$ -линейных операторов (или $(2m \times 2m)$ -матриц) обозначим символом $SO_m(2)$.

Классическая модель $N_{\text{class}} = (S_G^\alpha(\Omega | SO_m(2))$ и $\mathcal{V}(\Omega | SO_m(2))$ определена аналогично двумерному случаю. Гауссова мера инвариантна, если и только если ее ковариационный оператор принадлежит коммутанту

$$SO'_m(2) = \{A \in M^{(r)}(2m): [A, u] = 0, u \in SO_m(2)\}.$$

Если гладкая функция f инвариантна, то все ее нечетные производные равны нулю, а вторая производная принадлежит $SO'_m(2)$. Матрица $A \in SO'_m(2)$, если она имеет вид (23), где $R, S \in M^{(r)}(m)$. В отличие от двумерного случая симметричная матрица из $SO'_m(2)$ может быть недиагональной. Она имеет вид (23), где $R^* = R$ и $S^* = -S$.

Имеется естественное отображение (обобщающее отображение $j: SO'(2) \rightarrow \mathbb{C}$) коммутанта $SO'_m(2)$ на множество комплексных матриц $M^{(c)}(m)$:

$$j: SO'_m(2) \rightarrow M^{(c)}(m), \quad z = j(A) = R + iS. \quad (29)$$

Это отображение задает изоморфизм двух колец. Симметричные матрицы отображаются в симметричные матрицы. Обозначим вещественное и комплексное сопряжения через $*$ и $\star$, соответственно. Имеем $(R + iS)^* = R^* - iS^* = R + iS$. Заметим также, что для симметричной комплексной матрицы

$$\mathrm{Tr} j(A) = \mathrm{Tr}(R + iS) = \mathrm{Tr} R = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} A. \quad (30)$$

ЛЕММА 6.1. Пусть $f \in \mathcal{V}(\Omega | SO_m(2))$, $\mu \in S_G^\alpha(\Omega | SO_m(2))$. Тогда

$$\langle f \rangle_\mu(\alpha) = \alpha \mathrm{Tr} [\rho j(f''(0))] + O(\alpha^2), \quad (31)$$

где $\rho \in \mathcal{D}^{(c)}(m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполним скейлинг (28) и получим μ_{scal} , где $D = \mathrm{cov} \mu_{\mathrm{scal}}$, и $\mathrm{Tr} D = 2$. Положим $\rho = j(D)$, где $\mathrm{Tr} \rho = (\mathrm{Tr} D)/2 = 1$ и $\rho \in \mathcal{D}^{(c)}(m)$. В итоге получаем, что $\langle f \rangle_\mu(\alpha) = \frac{\sigma^2(\mu)}{2} \mathrm{Tr} [j(D) j(f''(0))] + O(\alpha^2)$ влечет за собой (31).

Теперь модифицируем проекции “классическое $\rightarrow$ квантовое”, заданные формулами (19) и (20), так, чтобы они были согласованы с комплексной структурой:

$$T: S_G^\alpha(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}^{(c)}(m), \quad \rho = T(\mu) = j(\mathrm{cov} \mu_{\mathrm{scal}}); \quad (32)$$

$$T: \mathcal{V}(Q) \rightarrow L_s^{(c)}(m), \quad A = T(f) = j(f'')(0). \quad (33)$$

ТЕОРЕМА 6.1. Отображения (32), (33) проецируют классическую статистическую модель $N_{\mathrm{class}} = (S_G^\alpha(\Omega | SO_m(2)))$ и $\mathcal{V}(\Omega | SO_m(2))$ на квантовую модель $N_{\mathrm{quant}}^{(c)} = (\mathcal{D}^{(c)}(m), L_s^{(c)}(m))$ так, что классические и квантовые средние оказываются связанными асимптотическим равенством

$$\langle \langle f \rangle \rangle_\mu = \langle T(f) \rangle_{T(\mu)} + O(\alpha). \quad (34)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Средние в квантовой механике с конечномерным пространством состояний можно рассматривать как тейлоровские аппроксимации средних в классической статистической механике на фазовом пространстве. В квантовом формализме классическая физическая переменная (гладкая функция в классическом фазовом пространстве) представляется своей второй производной. Классическое статистическое состояние, т.е. вероятностная мера в фазовом пространстве, задается своей матрицей ковариаций (с соответствующей нормировкой) – матрицей плотности фон Неймана (ср. с работами [5]–[8]).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке EU Human Potential Programme (контракт № HPRN-CT-2002-00279).

Список литературы

- [1] A. Yu. Khrennikov (ed.), *Foundations of Probability and Physics*, Proc. Conf. (Växjö, Sweden, 2000), QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., **13**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001; *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations*, Proc. Conf. (Växjö, Sweden, 2001), Math. Model. Phys. Eng. Cogn. Sci., **2**, Växjö Univ. Press, Växjö, 2002; *Foundations of Probability and Physics* – 2, Proc. Conf. (Växjö, Sweden, 2002), Math. Model. Phys. Eng. Cogn. Sci., **5**, Växjö Univ. Press, Växjö, 2003; *Foundations of Probability and Physics* – 3, Proc. Conf. (Växjö, Sweden, 2004), AIP Conf. Proc., **750**, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2005.
- [2] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, *Open Syst. Inf. Dyn.*, **12**:3 (2005), 303–318.
- [3] И. фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, М., 1964.
- [4] A. Yu. Khrennikov, *J. Phys. A*, **38** (2005), 9051–9073; А. Ю. Хренников, *Докл. РАН*, **408**:3 (2006), 321–324; *Phys. Lett. A*, **357**:3 (2006), 171–176.
- [5] V. I. Manko, *J. Russ. Laser Res.*, **17** (1996), 579–584.
- [6] O. V. Manko, V. I. Manko, *J. Russ. Laser Res.*, **25** (2004), 477–492.
- [7] A. J. Bracken, *Rep. Math. Phys.*, **57** (2006), 17–26.
- [8] A. J. Bracken, J. G. Wood, *Phys. Rev. A*, **73** (2006), 012104.