Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Клейн, В. Б. Матвеев, А. О. Смирнов, Цилиндрическое уравнение Кадомцева–Петвиашвили: старые и новые результаты, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 2, 304–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6089>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:03:51

© 2007 г. К. Клейн*, В. Б. Матвеев†, А. О. Смирнов‡

ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ: СТАРЫЕ И НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Представлен обзор результатов по цилиндрическому уравнению Кадомцева–Петвиашвили, известному также как уравнение Джонсона. Изложение базируется в основном на результатах, полученных авторами. В частности, показана калибровочная эквивалентность пар Лакса, соответствующих уравнению Кадомцева–Петвиашвили и цилиндрическому уравнению Кадомцева–Петвиашвили, а также описываются некоторые важные классы решений, получаемых методом преобразований Дарбу. Приводятся изображения точных решений цилиндрического уравнения Кадомцева–Петвиашвили, включая конечнозонные.

Ключевые слова: уравнение Джонсона, солитоны, конечнозонные решения, преобразования Дарбу, двумерные солитоны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цилиндрическое уравнение Кадомцева–Петвиашвили (ЦКП) есть двумерное обобщение цилиндрического уравнения Кортевега–де Фриза (ЦКдФ). Оно было введено в 1978 г. в статье Джонсона [1] в контексте описания волн на поверхности мелкой несжимаемой жидкости. Позже это уравнение было выведено Липовским [2] для внутренних волн в стратифицированной среде. Уравнение Джонсона имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \frac{u}{2t} \right) = -3\alpha^2 \frac{u_{yy}}{t^2}. \quad (1)$$

Уравнение КП недавно было выведено в работе [3] для нелинейных акустических волн.

*Max Planck Institute for Mathematics in Sciences, Inselstr. 22, 04103 Leipzig, Germany.
E-mail: klein@mis.mpg.de

†Institut de Mathématique de Bourgogne, BP 47870-F-21078 Dijon France.
E-mail: matveev@u-bourgogne.fr

‡Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: Alsmir@peterlink.ru

Так же как и для уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП), различаются два случая в зависимости от знака вещественного параметра α^2 : уравнение ЦКП-I, соответствующее положительным значениям α^2 , и уравнение ЦКП-II, в котором величина α^2 предполагается отрицательной. При $\alpha = 0$ уравнение ЦКП очевидно редуцируется к уравнению ЦКдФ. Задача Коши для уравнения ЦКП может быть корректно поставлена для любого $t = t_0 > 0$.

В отличие от широко известного уравнения КП уравнение ЦКП имеет диссипативный характер: здесь нет солитоноподобных решений с линейным фронтом, локализованным вдоль прямой на xy -плоскости. Кроме того, существующие для уравнения КП-II [4] двумерные многосолитонные решения, сохраняющие свою форму при распространении, отсутствуют в случае уравнения ЦКП. В работе [5]¹⁾ было обнаружено, что, несмотря на это, в случае уравнения ЦКП мы имеем так же много точных решений, как и в случае уравнения КП. Уравнение ЦКП позволяет естественным образом объяснить существование подковообразных солитонов и многосолитонных решений. Подковообразные многосолитонные решения очень хорошо соответствуют реальным волнам, которые могут наблюдаться в тонких пленках мелкой воды, стекающей по наклонной плоскости. Можно сравнить, например, фотографию 19 на стр. 38 книги [7] с некоторыми изображениями в данной работе. В обоих случаях наблюдаются волны с пересекающимися параболическими профилями.

Из результатов работы [5] следует, что каждое решение уравнения КП порождает решение уравнения ЦКП, и наоборот. Соответствующее отображение было впервые построено [5] на основании исследований алгебро-геометрических решений. Последний факт почему-то никогда не объяснялся в литературе. Использование вышеупомянутого изоморфизма между многообразиями всех решений уравнений ЦКП и КП представляет один из наиболее мощных методов решения уравнения ЦКП, заключающийся в использовании всей информации о решениях уравнения КП, полученных различными методами. Необходимо отметить, что в работе Джонсона [1] также содержится изоморфизм $\text{КП} \leftrightarrow \text{ЦКП}$, но использован только его специальный случай для построения решений уравнения ЦКП из решений уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) (случай $x^2 > 0$ в обозначениях нашей работы). Изоморфизм $\text{КП} \leftrightarrow \text{ЦКП}$ не был ясно сформулирован в работе [1] и, по-видимому, по этой причине не был замечен и не цитировался в последующих работах других авторов (см. подстрочное примечание в работе [1]). Джонсон пришел к связи уравнений КП и ЦКП (которая была переоткрыта авторами работы [5]) из совершенно иных соображений, используя масштабные преобразования вместо пары Лакса. Точные решения, которые мы здесь обсуждаем, в работе Джонсона не рассматривались. Соответствие друг другу решений уравнений КП и ЦКП сохраняет классы убывающих во всех пространственных направлениях решений и классы рациональных решений, называемых двумерными солитонами. Это же соответствие трансформирует солитоны уравнения КП с прямолинейным фронтом в солитоны уравнения ЦКП с параболическим фронтом. Оно преобразует рациональные решения уравнения КП в диссипативные рациональные решения уравнения ЦКП и отображает

¹⁾См. также книгу [6] и объяснение ниже (раздел 5).

ограниченные почти-периодические решения модели КП в класс ограниченных решений, почти-периодических по переменным x и t . Изображения соответствующих тета-функциональных решений модели ЦКП тоже кажутся хорошо согласующимися с некоторыми реальными волнами на мелкой воде.

Здесь будет также объяснен другой подход к интегрированию уравнения ЦКП, кратко упомянутый в книге [6], который прямо использует ковариантность Дарбу соответствующей пары Лакса. По нашему мнению, результаты работ [5], [6], относящиеся к уравнению ЦКП, и их связь с моделью КП использовались недостаточно. Появление мощного программного обеспечения, позволяющего визуализировать даже тета-функциональные решения конечного рода, открывает новые возможности в сравнении соответствующих решений с экспериментальными данными. Поэтому мы решили представить расширенную версию результатов работ [5], [6], впервые включив графический материал, который важен для понимания качественных характеристик решений, имеющих сложную аналитическую структуру²⁾.

2. ПАРА ЛАКСА ДЛЯ ЦКП

Пара Лакса и ее связь с уравнением ЦКП даются формулами

$$\begin{aligned} \pm \alpha f_y^\pm &= t f_{xx}^\pm + \left(tu - \frac{x}{12} \right) f^\pm, \\ f_t^\pm &= -4 f_{xxx} - 6 u f_x^\pm - \left(3u_x \pm \frac{3\alpha v}{t} \right) f^\pm. \end{aligned} \quad (2)$$

Условия совместности (+)-системы (2) и (-)-системы (2) эквивалентны системе

$$v_x = u_y, \quad u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \frac{u}{2t} = -3\alpha^2 \frac{v_y}{t^2},$$

из которой с очевидностью получается уравнение ЦКП после дифференцирования второго уравнения по x и использования формулы $v_{yx} = v_{xy} = u_{yy}$. Пара Лакса (+) была впервые найдена Дрюма [10] и Саллем [11] в 1983 г. и переоткрыта годом позже Овелем и Стибом [12].

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЦКП

В соответствии с общей теоремой ковариантности [13] (см. также [5], [6]) оба уравнения (2) ковариантны по отношению к классическому преобразованию Дарбу (ДП)³⁾

$$f \rightarrow \psi_1^\pm, \quad u \rightarrow u_1^\pm, \quad \psi_1^\pm := f_x^\pm - \sigma^\pm f \equiv \frac{W(f_1^\pm, f^\pm)}{f_1^\pm},$$

²⁾В недавней работе [8] результаты работ [5], [6] были использованы для доказательства существования неубывающих решений уравнения ЦКП, которые быстро стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Некоторые дополнительные результаты, касающиеся физических приложений уравнения ЦКП, могут быть найдены в работе [9].

³⁾Дарбу рассматривал соответствующее преобразование лишь применительно к уравнению Штурма–Лиувилля. В гораздо более широком контексте оно было введено в теорию линейных и нелинейных уравнений в частных производных и в теорию солитонов Матвеевым [13].

$$\sigma^\pm := \frac{\partial_x f_1^\pm}{f_1^\pm}, \quad u_1^\pm := u + 2\sigma_x^\pm,$$

где $f_1^\pm$ суть некоторые фиксированные решения (2). Только (+)-итерации или только (-)-итерации ДП ведут к формулам, полностью аналогичным случаю КП:

$$u_n^\pm = u + 2\partial_x^2 \ln W(f_1^\pm, \dots, f_n^\pm),$$

$$\psi_n^\pm = \frac{W(f_1^\pm, \dots, f_n^\pm, f^\pm)}{W(f_1^\pm, \dots, f_n^\pm)},$$

где $f_j^\pm$ – произвольные линейно независимые решения (+)- или (-)-систем Лакса, соответственно.

Для любого комплексного значения p (+)-система (2) с $u = 0$ имеет решение экспоненциального типа:

$$f^+(k) := \exp \left[-\frac{x}{12\alpha}(y-p) + \frac{4t}{(12\alpha)^3}(y-p)^3 \right] =$$

$$= \exp \left[k \left(x - \frac{y^2 t}{12\alpha^2} \right) + k^2 \alpha^{-1} y t - 4k^3 t - \frac{xy}{12\alpha} + \frac{4ty^3}{(12\alpha)^3} \right], \quad p \equiv 12k\alpha. \quad (3)$$

Аналогично для (-)-систем (2) с $u = 0$ однопараметрическое семейство решений дается формулой

$$f^-(p) := \exp \left[\frac{x}{12\alpha}(y+p) - \frac{4t}{(12\alpha)^3}(y+p)^3 \right].$$

Поскольку система (2) линейна, то линейная комбинация решений, соответствующих различным величинам p или k , ведет к новым решениям. Производные произвольного порядка от $f^\pm(x, y, t, k)$ по k также дают решения той же системы. Далее, взяв $k = 0$ в $\partial_k^m f^\pm(x, y, t, k)$, мы получим бесконечное число решений, имеющих форму многочлена от x, y, t , умноженного на не зависящую от k экспоненту. Подставив их во вронскиан, мы получим бесконечное семейство рациональных решений уравнения ЦКП. Эта конструкция, очевидно, представляет собой естественный аналог рациональных решений уравнения КП, выраженных в терминах многочленов Фаа де Бруно, также часто называемых многочленами Белла. Для случая уравнения КП аналогичная конструкция рациональных решений была впервые предложена в работе [5]. В последнем случае она содержит рациональные решения “общего положения” для уравнения КП, построенные Кричевером в 1978 г., как очень простую специальную редукцию формул работы [5].

Мы можем также построить следующее широкое семейство решений $f_j^\pm$ “стартовой” системы (2) с $u = 0$:

$$f_j^+ = \int_{s_{j1}} f^+(k) d\mu_{j1}(k),$$

$$f_j^- = \int_{s_{j2}} f^-(k) d\mu_{j2}(k),$$

где $\mu_{j1}(k), \mu_{j2}(k)$ – некоторые меры. Ясно, что соответствующий вронскиан может быть написан как

$$W(f_1^+, \dots, f_n^+) = \exp \left[-\frac{nxy}{12\alpha} + \frac{4nty^3}{(12\alpha)^3} \right] W(f_{01}^+, \dots, f_{0n}^+),$$

$$f_{0j}^+ := \int_{s_{j1}} f_0^+(k) d\mu_{j1}(k),$$

где $f_0^+(k)$ обозначает зависящую от k часть экспоненты (3). Данные вронскианы могут быть также записаны как многократные интегралы следующей структуры:

$$W = \exp \left[-\frac{nxy}{12\alpha} + \frac{4nty^3}{(12\alpha)^3} \right] \int_{s_1} \cdots \int_{s_n} \prod_1^n f_0^+(k_j) \prod_{j>i} (k_j - k_i) \prod_1^n d\mu_{j1}(k_j)$$

в (+)-случае или

$$W = \exp \left[-\frac{nxy}{12\alpha} + \frac{4nty^3}{(12\alpha)^3} \right] \int_{s_1} \cdots \int_{s_n} \prod_1^n f_0^-(k_j) \prod_{j>i} (k_j - k_i) \prod_1^n d\mu_{j2}(k_j)$$

в (–)-случае. Ясно, что внешние, не зависящие от k множители не дают вклада в потенциал.

Таким образом, мы, как и в случае КП-I [13], [6], имеем большое количество решений, зависящих от произвольного числа функциональных параметров. Достаточно очевидно, что полученные решения уравнения ЦКП будут несингулярными и вещественными при выполнении следующих условий:

$$d\mu_j(k) = \rho_j(k) dk, \quad \rho_j(k) \geq 0, \quad \inf s_j > \sup s_{j-1},$$

для всех j , где $s_j =: \sup \rho_j(k)$.

Это достаточное условие несингулярности легко обобщается. Достаточно, например, чтобы носители s_j были непересекающимися конечными интервалами $[a_j, b_j]$, на которых плотности $\rho_j(k)$ сохраняют знак.

В частности, одно из семейств N -солитонных решений с подковообразным фронтом, удовлетворяющее условию несингулярности, указанному выше, может быть записано как

$$u = 2\partial_x^2 \ln W(f_1, \dots, f_n);$$

здесь

$$f_j = A_j e^{\vartheta_{2j-1}} + e^{\vartheta_{2j}}, \quad A_j > 0,$$

для всех j , где

$$\vartheta_m =: p_m \left(x - \frac{y^2 t}{12\alpha^2} \right) + p_m^2 \alpha^{-1} y t - 4p_m^3 t.$$

Это решение несингулярно, если $p_m < p_{m+1}$ для всех m , что соответствует вышеупомянутому условию несингулярности с $\rho_j(k) = \delta(k - p_{2j-1}) + \delta(k - p_{2j})$.

Альтернативное достаточное условие несингулярности (см. также книгу [6]) есть

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \rho_j &= [a_j, b_j] \cup [c_j, d_j], \quad j = 1, \dots, n; \\ a_n &\leq b_n \cdots < a_j \leq b_j \cdots < a_1 \leq b_1 < c_1 \leq d_1 < \cdots < c_j \leq d_j < \cdots < c_n \leq d_n, \end{aligned}$$

и

$$\rho_j(p_j) > 0,$$

если $p_j \in [c_j, d_j]$ для всех j или $p_j \in [a_j, b_j]$, $j = 2i - 1$;

$$\rho_j(p_j) < 0,$$

если $p_j \in [a_j, b_j]$, $j = 2i$. Это условие гарантирует, что произведение $\prod_{j=1}^n \rho_j(p_j) \det(p_j^{m-1})$ положительно и, следовательно, вронскиан $W(f_{01}^+, \dots, f_{0n}^+)$ также положителен. В частности, взяв

$$\rho_j(p_j) = A_j \delta(p_j - a_j) + \delta(p_j - c_j), \quad A_{2j} < 0, \quad A_{2j-1} > 0,$$

мы получим несингулярное решение уравнения ЦКП-I.

Это второе условие несингулярности дает другое семейство несингулярных N -солитонных решений с подковообразным фронтом, которое может быть получено при следующем выборе f_j :

$$f_j = A_j e^{\theta_{2j-1}} + e^{\theta_{2j}}, \quad A_{2j-1} > 0, \quad A_{2j} < 0,$$

для всех j ;

$$\begin{aligned} \theta_{2m-1} &=: a_m \left(x - \frac{y^2 t}{12\alpha^2} \right) + a_m^2 \alpha^{-1} y t - 4a_m^3 t, \\ \theta_{2m} &=: c_m \left(x - \frac{y^2 t}{12\alpha^2} \right) + c_m^2 \alpha^{-1} y t - 4c_m^3 t, \\ a_n &< \cdots < a_1 < c_1 < \cdots < c_n. \end{aligned}$$

В случае ЦКП-II, т.е. для $\operatorname{Re} \alpha = 0$, мы вводим следующую 1-форму:

$$\Omega(f, g) = fg \, dx - \alpha^{-1} t (f g_x - f_x g) \, dy + (-4f_{xx}g + 4f_x g_x - 4f g_{xx} - 6ufg) \, dt.$$

1-форма Ω замкнута, если f – произвольное решение $(+)$ -системы (2) и g – произвольное решение $(-)$ -системы (2), соответствующие одному и тому же стартовому решению $u(x, y, t)$ уравнения ЦКП. В терминах этой формы справедлива следующая

бинарная одевающая формула Дарбу для решений уравнения ЦКП⁴⁾:

$$\begin{aligned}
 {}_n u_m &= u + 2\partial_x^2 \ln \det M, \quad n \geq m, \\
 M &:= \begin{pmatrix} Q_{1,n+1} & Q_{2,n+1} & \cdots & Q_{n,n+1} \\ Q_{1,n+2} & Q_{2,n+2} & \cdots & Q_{n,n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{1,n+m} & Q_{2,n+m} & \cdots & Q_{n,n+m} \\ f_1^+ & f_2^+ & \cdots & f_n^+ \\ \partial_x f_1^+ & \partial_x f_2^+ & \cdots & \partial_x f_n^+ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_x^{(n-m-1)} f_1^+ & \partial_x^{(n-m-1)} f_2^+ & \cdots & \partial_x^{(n-m-1)} f_n^+ \end{pmatrix}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Взяв $m = 0$ в выражении (4), мы получим вронскианную формулу, написанную выше.

В случае $n = m$ матричные элементы M даются формулой

$$M_{jl} := Q_{j,n+l}, \quad Q_{jl} := A_{jl} + B_{jl} \int_{(x_0, y_0, t_0)}^{(x, y, t)} \Omega(f_j^+, f_l^-), \quad 1 \leq j, l \leq n;$$

все интегралы здесь не зависят от выбора пути интегрирования.

В частности, гладкое рациональное решение уравнения ЦКП-II с $\alpha = i/12$, получающееся из выражения (4) при $n = m = 1$, дается формулой

$$u = 2\partial_x^2 \ln \left[12t^2 \left| \frac{x}{12t} + y^2 - \gamma^2 - 2i\gamma y \right|^2 + \frac{1}{4\gamma^2} \right]. \quad (5)$$

4. ОТ ЦКдФ К ЦКП

Предположив, что решение уравнения ЦКП удовлетворяет уравнению ЦКдФ

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \frac{u}{2t} = 0, \quad (6)$$

т.е. что оно не зависит от y , мы можем построить решение системы (2) в виде

$$f(x, y, t) = e^{\lambda y} p(x, t, \lambda),$$

где p является решением системы Лакса для уравнения ЦКдФ, впервые найденной Дрюма [10]:

$$\begin{aligned}
 t p_{xx} + \left(tu - \frac{x}{12} \right) p &= \lambda p, \\
 p_t &= -4p_{xx} - 6up_x - 3u_x p.
 \end{aligned}$$

⁴⁾ Дарбу, несомненно, не знал этой формулы. Она была введена в работах Матвеева и Салля (см. книгу [6] и библиографию в ней).

Частные решения этой системы при $u = 0$ могут быть построены в виде

$$p(x, t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}} w\left(\frac{x - \lambda}{\sqrt[3]{t}}\right),$$

где $w(z)$ – произвольное решение уравнения Эйри

$$w'' = zw.$$

Следовательно, в частном случае $\alpha = i/12$ класс T -периодических по y решений (2) с $u = 0$ дается формулой

$$f^+ = \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[a_m \operatorname{Ai}\left(\frac{x - 2\pi m/T}{\sqrt[3]{t}}\right) + b_m \operatorname{Bi}\left(\frac{x - 2\pi m/T}{\sqrt[3]{t}}\right) \right] e^{2iy\pi m/T}, \quad (7)$$

где a_m, b_m – произвольные коэффициенты, обеспечивающие необходимую гладкость правой части, а $\operatorname{Ai}(z)$, $\operatorname{Bi}(z)$ – стандартные решения уравнения Эйри, определенные интегралами

$$\begin{aligned} \operatorname{Ai}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + tz\right) dt, \\ \operatorname{Bi}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[e^{-t^3/3 - zt} + \sin\left(\frac{t^3}{3} + zt\right) \right] dt. \end{aligned}$$

5. КАЛИБРОВОЧНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЦКП И КП

Существует замечательная связь между решениями широко известного уравнения КП

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (v_t + 6vv_\xi + v_{\xi\xi\xi}) = -3\alpha^2 v_{\eta\eta} \quad (8)$$

и решениями уравнения ЦКП, открытая в 1986 г. [6], а именно отображение

$$v(\xi, \eta, \tau) \rightarrow u(x, y, t) := v\left(x - \frac{y^2 t}{12\alpha^2}, y, t\right), \quad (9)$$

которое переводит любое решение уравнения (8) в решение уравнения ЦКП. И наоборот, для любого решения $u(x, y, t)$ уравнения ЦКП функция $v(\xi, \eta, \tau)$, определенная формулой

$$v(\xi, \eta, \tau) = u\left(\xi + \frac{\eta^2}{12\alpha^2\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \tau\right),$$

удовлетворяет уравнению КП. В действительности это соответствие может быть обнаружено уже при рассмотрении решений, полученных в разделе 3⁵⁾.

⁵⁾ Исторически впервые конечнозонные решения уравнения ЦКП и соответствующую функцию Бейкера–Ахиезера построил один из авторов данной работы (А. О. Смирнов). Поразительная аналогия полученных формул с соответствующими формулами Кричевера для решений общего уравнения КП подсказала, что за этим стоит более общий факт, а именно изоморфизм $\text{КП} \leftrightarrow \text{ЦКП}$, указанный выше. Проверка этого факта была затем произведена прямым вычислением.

Более того, соответствующая линейная система Лакса связана следующей калибровочной эквивалентностью, также вытекающей из формул раздела 3 или из структуры функции Бейкера–Ахиезера соответствующей пары Лакса:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{ЦКП}}(x, y, t) &= \psi_{\text{КП}}\left(x - \frac{y^2 t}{12\alpha^2}, yt, t\right) \exp\left[-\frac{xy}{12\alpha} + \frac{4ty^3}{(12\alpha)^3}\right], \\ \psi_{\text{КП}}(\xi, \eta, \tau) &= \psi_{\text{ЦКП}}\left(\xi + \frac{\eta^2}{12\alpha^2\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \tau\right) \exp\left[\frac{\xi\eta}{12\alpha\tau} + \frac{4\eta^3}{(12\alpha\tau)^2}\left(1 - \frac{1}{3\alpha}\right)\right].\end{aligned}\quad (10)$$

Эта калибровочная эквивалентность также может быть проверена прямыми вычислениями.

Соответствующая замена переменных $\xi = x - y^2 t / (12\alpha^2)$, $\eta = yt$, $\tau = t$ обратима, и ее якобиан равен t при $t > 0$. В частности, ясно, что глобально ограниченное решение уравнения КП отображается в глобально ограниченное решение уравнения ЦКП, и наоборот. Чтобы решить задачу Коши, поставленную при $t = t_0$, с начальными данными $u(x, y, t_0) = u_0(x, y)$, мы должны найти решение $v(\xi, \eta, \tau)$ задачи Коши для уравнения КП с начальными данными

$$v(\xi, \eta) = u\left(\xi + \frac{\eta^2 \tau}{12\alpha^2 \tau^0}, \frac{\eta}{\tau^0}\right).$$

Решение соответствующей задачи Коши для уравнения ЦКП дается формулой

$$u(x, y, t) = v\left(x - \frac{y^2 t}{12\alpha^2}, yt, t\right).$$

Хорошо известное конечнозонное решение уравнения КП (см., например, книгу [14]) приводит с помощью указанных выше соотношений к решениям уравнения ЦКП следующего вида:

$$u = 2\partial_x^2 \ln \Theta\left[\left(x - \frac{y^2 t}{12\alpha}\right)\vec{p} + yt\vec{v} + t\vec{q} + \vec{l}\right] + C.$$

Здесь Θ – n -мерная тета-функция Римана. Соответствующие решения в общем случае почти-периодичны по x (как и в случае уравнения КП), но они не периодичны или почти-периодичны по переменным y (но не по t).

Также ясно, что

$$\begin{aligned}\int_{R^2} \int v^2(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta &= t \int_{R^2} \int u^2(x, y, t) dx dy, \\ u(x, y, t) &= v\left(x - \frac{y^2 t}{12\alpha^2}, yt, t\right),\end{aligned}\quad (11)$$

где v – некоторое быстроубывающее на бесконечности решение уравнения КП.

Ранее некоторые замены переменных, не позволяющие решить задачу Коши для уравнения ЦКП на основании полученных для случая КП результатов, были найдены авторами работ [1], [10]. Стоит отметить, что еще до этого Липовский [15] развил метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши с быстроубывающими начальными данными для уравнений ЦКП-I и ЦКП-II, используя ту же технику (т.е. метод нелокальной задачи Римана–Гильберта, или $\bar{\partial}$ -подход), что и в случае КП.

6. ГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОДА К УРАВНЕНИЮ ЦКП-II

Вспомогательная спектральная задача имеет вид

$$\varphi_y = t\varphi_{xx} + 2t\left(ik - \frac{y}{12}\right)\varphi_x + tu\varphi. \quad (12)$$

Решением Йоста задачи (12) мы будем считать комплекснозначную функцию $\varphi(\mathbf{r}, k, \bar{k})$, где $\mathbf{r} := (x, y)$, ограниченную при всех $k \in \mathbb{C}$ и зафиксированную асимптотическим условием $\varphi(\mathbf{r}, k, \bar{k}) \rightarrow 1$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, k, \bar{k}) &= 1 + i \operatorname{sgn}(k + \bar{k}) \times \\ &\times \left[\frac{a(k, \bar{k})}{x - y^2 t / 12 + 2ikyt} - \frac{b(k, \bar{k})e^{s(\mathbf{r}, k, \bar{k})}}{x - y^2 t / 12 + 2i\bar{k}yt} \right] (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (13)$$

$$a(k, \bar{k}) = \frac{t}{2\pi} \int u(r) \varphi(\mathbf{r}, k, \bar{k}) dx dy, \quad (14)$$

$$b(k, \bar{k}) = \frac{t}{2\pi} \int u(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}, k, \bar{k}) e^{-s(\mathbf{r}, k, \bar{k})} dx dy, \quad (15)$$

$$s(\mathbf{r}, k, \bar{k}) := -i(k + \bar{k})\left(x - \frac{y^2 t}{12}\right) + (k^2 - \bar{k}^2)yt. \quad (16)$$

Предполагается, что начальные данные $u(\mathbf{r}, 0)$ представляют собой некую вещественнозначную функцию, принадлежащую классу Шварца $\mathbf{S}(\mathbb{R}^2)$. Это ограничение вещественности приводит к тому, что

$$a(k, \bar{k}) = \bar{a}(-\bar{k}, -k), \quad b(k, \bar{k}) = \bar{b}(-\bar{k}, -k).$$

Для решения $\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, k, \bar{k})$ “формально сопряженной задачи”, фиксированной единичной асимптотикой на бесконечности, имеют место аналогичные формулы по модулю замены знака квадратных скобок в (13) и изменения $s \rightarrow -s$. Функции a и b связаны дисперсионным соотношением

$$a(k, \bar{k}) = a_0 - \int \frac{|b(p, \bar{p})|^2 \operatorname{sgn}(p + \bar{p}) dp \wedge d\bar{p}}{p - k} \frac{1}{2i\pi}. \quad (17)$$

Спектральные данные прямой и сопряженной задач связаны соотношениями

$$\bar{b}(k, \bar{k}) = \tilde{b}(k, \bar{k}), \quad a(k, \bar{k}) = \tilde{a}(k, \bar{k}). \quad (18)$$

Функции φ и $\tilde{\varphi}$ удовлетворяют при $|k| \rightarrow \infty$ следующим асимптотическим разложениям:

$$\varphi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\mathbf{r}) k^{-n}, \quad \tilde{\varphi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_n(\mathbf{r}) k^{-n},$$

где

$$2i\varphi_{1,x} + u = 0, \quad -2i\tilde{\varphi}_{1,x} + u = 0,$$

а остальные коэффициенты могут быть вычислены из рекурсивных соотношений, вытекающих из уравнения (12) и его формального сопряжения. Из последних соотношений после подстановки их в выражения (13) получаем асимптотические разложения для a и $\tilde{a}$:

$$a(k, \bar{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n k^{-n}, \quad \tilde{a}(k, \bar{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n k^{-n}.$$

В дополнение из “условия вещественности” (18) мы можем вывести, что

$$a_n = \tilde{a}_n. \quad (19)$$

Сравнение этих асимптотических разложений с дисперсионными соотношениями (17) приводит к бесконечной серии “тождеств следов”. Первые три из них перечислены ниже:

$$\begin{aligned} P^x &:= -4\pi a_2 = \frac{t}{2} \int u^2 dx \wedge dy = 4 \int_0^\infty dk_R \int_{-\infty}^\infty dk_I |b(k, \bar{k})|^2 (k + \bar{k}), \\ P^y &:= -4\pi a_3 = \frac{1}{2} \int \left(u^2 \frac{yt}{6} + uw \right) dx \wedge dy = \\ &= 4i \int_0^\infty dk_R \int_{-\infty}^\infty dk_I |b(k, \bar{k})|^2 (k^2 - \bar{k}^2), \\ H &:= -16\pi a_4 = \frac{t}{2} \int \left[u_x^2 - 2u^3 - 3 \left(\frac{yu}{6} + \frac{w}{t} \right)^2 \right] dx \wedge dy = \\ &= 16 \int_0^\infty dk_R \int_{-\infty}^\infty dk_I |b(k, \bar{k})|^2 (k^3 + \bar{k}^3). \end{aligned}$$

При выводе этих формул должно быть принято во внимание второе из соотношений (18); $w(x, y)$ определяется равенством

$$w(x, y) := \int_{-\infty}^x u_y(x', y) dx'.$$

Соотношения $u \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^2)$ и (19) определяют фазовое пространство уравнения ЦКП-II. Соотношение (19) налагает ограничения на начальные данные:

$$\int u dx = 0, \quad \int w dx = 0.$$

Гамильтонова форма уравнения ЦКП-II описывается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{y^2}{12} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{t} \frac{\partial}{\partial y} \right) u &= \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u} = \{u, H\}, \\ \{u(\mathbf{r}), u(\mathbf{r}')\} &= \frac{1}{t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Скобки Пуассона для спектральных данных и переменные действие–угол для уравнения ЦКП-II. Запишем скобки Пуассона

$$\begin{aligned}\{a(k, \bar{k}), a(p, \bar{p})\} &= 0, \\ \{a(k, \bar{k}), b(p, \bar{p})\} &= \frac{ib(p, \bar{p})}{4\pi} \left(\frac{1}{k + \bar{p}} - \frac{1}{k - p} \right), \\ \{b(k, \bar{k}), b(p, \bar{p})\} &= \frac{i}{4} \operatorname{sgn}(p_R) \delta(p_R + k_R) \delta(p_I - k_I).\end{aligned}$$

Оставшиеся скобки могут быть получены из условий вещественности (18). Из последних трех соотношений следует, что $a(k, \bar{k})$ есть порождающий функционал интегралов движения a_n , а $b(k, \bar{k}, t)$ изменяется согласно формуле

$$b(k, \bar{k}, t) = b(k, \bar{k}, t_0) e^{-4i(k^3 + \bar{k}^3(t - t_0))}.$$

Для вывода этой формулы мы использовали также уравнение движения

$$b_t = \{b, H\}.$$

Переменными действие–угол являются

$$J(k, \bar{k}) = -4|b(k, \bar{k})|^2, \quad \Phi(k, \bar{k}) = \arg b(k, \bar{k}),$$

их зависимость от времени тривиальна:

$$J(k, \bar{k}, t) = J(k, \bar{k}, t_0), \quad \Phi(k, \bar{k}, t) = \Phi(k, \bar{k}, t_0) + \frac{\delta H}{\delta J(k, \bar{k})}(t - t_0).$$

Оказывается, что $b(k, \bar{k}) \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^2)$. Сжатая формулировка результатов данного раздела дается следующим утверждением.

ТЕОРЕМА. *На классе Шварца начальных данных с условием $a_n = \bar{a}_n$ уравнение ЦКП-II является полностью интегрируемой гамильтоновой системой, а отображение $u \rightarrow b$ – каноническим преобразованием к переменным действие–угол J, Φ . Здесь*

$$\begin{aligned}\{\Phi(k, \bar{k}), \Phi(p, \bar{p})\} &= \{J(k, \bar{k}), J(p, \bar{p})\} = 0, \\ \{\Phi(k, \bar{k}), J(p, \bar{p})\} &= \delta(k_R - p_R) \delta(k_I - p_I), \\ H &= -4 \int_0^\infty dk_R \int_{-\infty}^\infty J(k, \bar{k}) (k^3 + \bar{k}^3) dk_I.\end{aligned}$$

В этой формулировке из-за “условий вещественности” спектральные данные параметризуются правой полуплоскостью комплексной переменной k .

7. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

В этом разделе мы представляем набор изображений решений уравнения ЦКП. Рис. 1 соответствует образу двумерного солитона уравнения КП-II

$$u(x, y, t) = \frac{4\nu(1 - \nu(x - 3\nu t)^2 + \nu^2 y^2)}{(1 + \nu(x - 3\nu t)^2 + \nu^2 y^2)^2}$$

Рис. 1. Решение уравнения ЦКП-II, полученное как образ двумерного солитона при отображении КП-II $\rightarrow$ ЦКП-II при следующих значениях времени: $t = 0.01$ (а); $t = 0.1$ (б); $t = 1$ (в); $t = 4$ (г).

Рис. 2. Рациональное решение уравнения ЦКП-II, полученное прямым применением бинарного одевания Дарбу для следующих значений времени: $t = 0.005$ (а); $t = 0.01$ (б); $t = 0.1$ (в); $t = 1$ (г).

Рис. 3. Рациональное решение уравнения КП-II, полученное как образ обратного отображения ЦКП-II $\rightarrow$ КП-II, примененного к рациональному решению, показанному на рис. 2, для следующих значений времени: $t = 0.01$ (а); $t = 0.1$ (б); $t = 0.2$ (в); $t = 1$ (г).

Рис. 4. Односолитонное решение уравнения ЦКП-I при $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ для следующих значений времени: $t = 0.01$ (а); $t = 0.1$ (б); $t = 0.5$ (в); $t = 1$ (г).

Рис. 5. Двухсолитонное решение уравнения ЦКП-I при $k_1 = -1.5$, $k_2 = 0$, $k_3 = 2$, $k_4 = 0$ для следующих значений времени: $t = 0.01$ (а); $t = 0.1$ (б); $t = 0.5$ (в); $t = 0.8$ (г).

при отображении (9). Видно, что при $t \rightarrow 0$ фронт решения сужается и концентрируется в узкой полосе по переменной y .

На рис. 2 показана эволюция рационального решения, которое описывается формулой (5). При малых t оно имеет вид импульса, сжатого в x -направлении и расширенного в y -направлении. Для больших t y -расширение уменьшается, а импульс расширяется в x -направлении (направлении распространения).

На рис. 3 можно видеть эволюцию рационального решения уравнения КП-II, полученного как образ обратного отображения, примененного к формуле (5).

Линейный солитон уравнения ЦКП-I дается равенствами

$$u = 2\partial_x^2 \ln f_1 = 2\partial_x^2 \ln \operatorname{ch} \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2},$$

где

$$f_1 = e^{\vartheta_1} + e^{\vartheta_2}, \quad \vartheta_j := p_j \left(x - \frac{y^2 t}{12\alpha^2} \right) + p_j^2 \alpha^{-1} y t - 4p_j^3 t.$$

Его эволюция из линейного солитона КП-типа в подковообразную волну показана на рис. 4.

Мы изучаем двухсолитонное решение в форме

$$u = 2\partial_x^2 \ln W(e^{\vartheta_1} + e^{\vartheta_2}, e^{\vartheta_3} + e^{\vartheta_4}).$$

Рис. 6. Решение рода 2 уравнения ЦКП-I, порожденное кривой $w^2 = \prod_{i=1}^6 (z - e_i)$, $e_1 = -3$, $e_2 = -2$, $e_3 = -1$, $e_4 = 0$, $e_5 = 1$, $e_6 = 2$, для следующих значений времени: $t = 0.03$ (а); $t = 0.23$ (б); $t = 1.03$ (в); $t = 2.0$ (г).

На рис. 5 показано образование подковообразных волн.

Последний рис. 6 соответствует гиперэллиптической кривой рода 2 с точками ветвления $-1, -2, -3, 0, 1, 2$. Эти решения найдены численно с помощью спектрального кода Фраундинера и Клейна [16]–[18]. Соответствующие решения уравнения ЦКП-I порождены из соответствующих решений уравнения КП-I отображением (9). Ясно видно образование пересекающихся семейств параболических фронтов.

Благодарности. В. Б. Матвеев признателен организаторам конференции “Нелинейная физика. Теория и эксперимент. IV” и гранту ANR-05-BLAN-0029-01 (GIMP) за финансовую поддержку. К. Клейн благодарит MISGAM program of the European Science Foundation за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] R. Johnson, *J. Fluid Mech.*, **97** (1980), 701–719.
- [2] В. Д. Липовский, *Изв. РАН. Сер. физ. атм. океана*, **31** (1995), 664–871.
- [3] S. Leble, A. Sukhov, “On solutions of the Khokhlov–Zabolotskaya equation with KdV dispersion term”, *Nonlinear Acoustics at the Turn of the Millennium*, 15th Int. Symp.

- (Gottingen, Germany, 1999), AIP Conf. Proc., **524**, eds. W. Lauterborn, T. Kurz, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2000, 497–500.
- [4] L. A. Bordag, A. R. Its, S. V. Manakov, V. B. Matveev, V. E. Zakharov, *Phys. Lett. A*, **63**:3 (1977), 205–206.
 - [5] В. Д. Липовский, В. Б. Матвеев, А. О. Смирнов, *Записки научн. семин. ЛОМИ*, **150** (1986), 70–75.
 - [6] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer Ser. Nonlin. Dyn., Springer, Berlin, 1991.
 - [7] Б. Б. Кадомцев, В. И. Рыдник, *Волны вокруг нас*, Знание, М., 1981.
 - [8] I. Anders, A. Boutet de Monvel, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **7**:3 (2000), 284–302.
 - [9] Yi-Tian Gao, Bo Tian, *Phys. Lett. A*, **301** (2002), 74–82.
 - [10] В. С. Дрюма, *ДАН СССР*, **268**:1 (1983), 15–17.
 - [11] М. А. Салль, Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, ЛГУ, 1983.
 - [12] W. Oevel, W.-H. Steeb, *Phys. Lett. A*, **103**:5 (1984), 239–242.
 - [13] V. B. Matveev, *Lett. Math. Phys.*, **3** (1979), 216–219.
 - [14] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'skii, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*, Springer Ser. Nonlin. Dyn., Springer, Berlin, 1994.
 - [15] В. Д. Липовский, *ДАН СССР*, **286**:2 (1986), 334–338.
 - [16] J. Frauendiener, C. Klein, *J. Comput. Appl. Math.*, **167** (2004), 193–218.
 - [17] J. Frauendiener, C. Klein, *Lett. Math. Phys.*, **76** (2006), 249–267.
 - [18] C. Klein, O. Richter, *Ernst Equation and Riemann Surfaces. Analytical and Numerical Methods*, Lect. Notes Phys., **685**, Springer, Berlin, 2005.