Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Смирнов, М. А. Соловьев, Функциональная область определения виковых степенных рядов, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 3, 355–373

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf609>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:09:49

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИКОВЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Получен удобный в приложениях критерий, точно характеризующий тот класс пробных функций, на котором возможна операторная реализация заданного ряда по виковым степеням свободного поля. Предложенный вывод не опирается на положительность метрики пространства состояний и тем самым применим к калибровочной теории. Его основу составляют систематическое использование аналитических свойств гильбертовой мажоранты индефинитной метрики и применение подходящей теоремы о безусловной сходимости рядов граничных значений аналитических функций.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье исследуются условия сходимости бесконечных рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot \phi^k(x) \quad (1)$$

по виковым степеням свободного поля $\phi(x)$. Впервые анализ такого рода был выполнен Джаффе [1] при определении класса Борхерса массивного свободного поля в двумерном пространстве-времени. В работе [1] показано, что нормально упорядоченные целые функции этого поля экспоненциального типа корректно определены как операторнозначные распределения умеренного роста и удовлетворяют всем аксиомам Вайтмана. Благодаря последующим работам Джаффе и других авторов стало ясно, что в класс Борхерса следует включать и те виковы ряды, которые являются ультрараспределениями и гиперфункциями, а при распространении аксиоматического подхода на нелокальные поля естественно рассматривать и более сингулярные обобщенные функции. Рикерс [2] показал, что для любого викового ряда массивного свободного поля в пространстве-времени размерности $d \geq 2$ найдется подходящее пространство Гельфанда–Шилова S^β , при усреднении с пробными функциями из которого этот ряд сходится. Используемая в работах [1, 2] техника существенным образом опирается на положительную определенность двухточечной функции $\Delta^+(x; m)$, и ее обобщение на поля с индефинитной метрикой далеко не очевидно, хотя именно этот случай представляет особый интерес, поскольку через нормальные экспоненты таких полей выражаются точные

---

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

решения ряда простых калибровочных моделей, включая модель Швингера. Вопрос об адекватном выборе пробных функций при нарушении условия положительности был поднят Вайтманом [3] и анализировался в работах [4–6] на примерах безмассового скалярного двумерного поля и поля дипольного духа. Важное наблюдение этих работ состоит в том, что в случае индефинитной метрики операторная реализация поля (1) возможна лишь при более жестких ограничениях на пробные функции, чем те условия, при которых определены его вайтмановские функции, вычисляемые по теореме Вика. Прямая оценка сходимости рядов в импульсном представлении, подобная выполненной Рикерсом, оказывается при этом крайне трудоемкой, и в работе [7] был предложен другой подход, основанный на использовании аналитических свойств гильбертовой мажоранты индефинитной метрики в координатном представлении и замене исследования сходимости рядов распределений исследованием сходимости (в подходящей топологии) рядов тех аналитических функций, граничными значениями которых эти распределения служат. Здесь мы покажем, что на этом пути удастся получить критерий, который решает задачу в общем виде и позволяет легко найти функциональную область определения любого викового ряда (1) с заданными коэффициентами, исходя из инфракрасного и ультрафиолетового поведения двухточечной функции свободного поля $\phi(x)$.

Мы будем использовать обобщенные пространства Гельфанда-Шилова S_a^b и S^b [8] и опираться на результаты статьи [9], которые позволяют работать с функционалами из сопряженных пространств $S_a'^b$ и S'^b столь же просто, как с обычными распределениями Шварца. Нужные для доказательств определения даны ниже, а пока скажем, что индексы a и b , которые в оригинальной формулировке [8] были числовыми последовательностями, могут быть отождествлены с индикаторными функциями, характеризующими соответственно убывание пробных функций из S_a^b и их фурье-образов на бесконечности, а элементы S^b убывают при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее, чем любая степень $1/|x|$. Элементы наиболее часто используемых пространств S_α^β из этой шкалы имеют экспоненциальное убывание порядка $1/\alpha$ в координатном представлении и порядка $1/\beta$ в импульсном.

В разделе 2 приводятся необходимые сведения о квантовании с индефинитной метрикой и уточняется, как именно следует понимать сходимость ряда (1) в псевдогильбертовом пространстве состояний. Ключевая теорема о сходимости рядов граничных значений аналитических функций доказана в разделе 4, а в разделе 3 выводится лемма о продолжении функционалов, позволяющая сделать это доказательство весьма простым. Итоговый общий критерий сходимости викового ряда свободного поля получен в разделе 5. В разделе 6 дано применение к случаю положительной метрики, усиливающее результаты работы [2]. В разделе 7 в качестве примера рассмотрены целые функции двумерного безмассового свободного поля с конечным порядком роста, в этом случае особенности логарифмические и использование обобщенных пространств S_a^b вместо S_α^β позволяет гораздо точнее охарактеризовать функциональную область определения. Раздел 8 посвящен заключительным замечаниям.

2. ГРАФ-ПРЕДЕЛЫ ВИКОВЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

При условии положительности операторная реализация свободного поля $\phi(x)$ воспроизводится с точностью до унитарной эквивалентности по его двухточечной функции

$w(x - x')$. Основная трудность в обобщении теоремы реконструкции на индефинитный случай состоит в том, чтобы должным образом связать с w распределение положительного типа $w_{\text{maj}}(x, x')$, задающее гильбертову топологию, пополнением по которой получается пространство состояний $\mathcal{H}$. Решение этой задачи описано в [10, 11], а мы возьмем за отправную точку ту математическую структуру, которая возникает в результате. Пространство $\mathcal{H}$ оказывается снабженным двумя полуторалинейными формами $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $(\cdot, \cdot)$, определяемыми w и w_{maj} и связанными соотношением

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = (\Phi, \theta \Psi), \quad \Phi, \Psi \in \mathcal{H}, \quad (2)$$

где θ — инволютивный и эрмитовый относительно положительной формы $(\cdot, \cdot)$ оператор, называемый оператором Крейна. Эта псевдогильбертова структура согласована с фоксовской, которую пространство $\mathcal{H}$ также имеет, поскольку речь идет о свободной теории. На одночастичном уровне скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $(\cdot, \cdot)$ выражаются через w и w_{maj} по формулам

$$\begin{aligned} \langle \phi(f) \Psi_0, \phi(g) \Psi_0 \rangle &= \int \bar{f}(x) w(x - x') g(x') dx dx', \\ (\phi(f) \Psi_0, \phi(g) \Psi_0) &= \int \bar{f}(x) w_{\text{maj}}(x, x') g(x') dx dx', \end{aligned} \quad (3)$$

где Ψ_0 — вакуумное состояние, а f, g — пробные функции из пространства Шварца. Согласованность с фоксовской структурой означает, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} \langle : \phi(f_1) \dots \phi(f_m) : \Psi_0, : \phi(g_1) \dots \phi(g_n) : \Psi_0 \rangle &= \delta_{mn} \sum_{\pi} \prod_j \langle \phi(f_j) \Psi_0, \phi(g_{\pi(j)}) \Psi_0 \rangle, \\ (: \phi(f_1) \dots \phi(f_m) : \Psi_0, : \phi(g_1) \dots \phi(g_n) : \Psi_0) &= \delta_{mn} \sum_{\pi} \prod_j (\phi(f_j) \Psi_0, \phi(g_{\pi(j)}) \Psi_0), \end{aligned} \quad (4)$$

где суммирование ведется по всем перестановкам индексов.

Далее мы используем свойства, которыми мажоранта w_{maj} должна обладать по своему смыслу и которые легко проверяются в каждом конкретном случае. Именно, мы предполагаем, что w_{maj} , как и w , принадлежит классу распределений умеренного роста S' и наследует спектральные свойства w в том смысле, что функция

$$\hat{w}_{\text{maj}}(p, p') = \int e^{ipx + ip'x'} w_{\text{maj}}(x, x') dx dx'$$

удовлетворяет условию

$$\text{supp } \hat{w}_{\text{maj}}(p, p') \subset \overline{\mathbb{V}_+} \times \overline{\mathbb{V}_-},$$

где $\mathbb{V}_+$ и $\mathbb{V}_-$ — верхний и нижний световые конусы, а черта означает замыкание. Подчеркнем, что мажоранта не обязана быть трансляционно-инвариантной, и поэтому условие $p + p' = 0$ мы не накладываем. В терминах координатного представления наше предположение означает, что w_{maj} является граничным значением аналитической функции $\mathbf{w}_{\text{maj}}(z, z')$, голоморфной в трубчатой области $\{z, z': y = \text{Im } z \in \mathbb{V}_-, y' = \text{Im } z' \in \mathbb{V}_+\}$ и удовлетворяющей условию

$$|\mathbf{w}_{\text{maj}}(z, z')| \leq C(V) (1 + |z| + |z'|)^{\omega} (|y| + |y'|)^{-\sigma}, \quad y, y' \in V, \quad (5)$$

где V – любой конус, компактный в $\mathbb{V}_- \times \mathbb{V}_+^{1)}$, а числа $\omega \geq 0$ и $\sigma \geq 0$ не зависят от V .

Сходимость интересующего нас ряда (1), как и существование самих мономов Вика, формально определяемых равенством

$$:\phi^k:(x) = \lim_{x_1, \dots, x_k \rightarrow x} :\phi(x_1) \dots \phi(x_k):,$$

должна устанавливаться по топологии, определяемой скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Более аккуратное определение выглядит следующим образом. Пусть $f \in S(\mathbb{R}^d)$, где d – размерность пространства-времени. Возьмем любую δ -образную (т.е. сходящуюся в S' к δ -функции Дирака) последовательность $\delta_\nu(x)$ неотрицательных пробных функций, также принадлежащих $S(\mathbb{R}^d)$, и рассмотрим последовательность операторов

$$\varphi_\nu(k, f) = \int :\phi(x_1) \dots \phi(x_k): f(x_1) \prod_{j=2}^k \delta_\nu(x_1 - x_j) dx_1 \dots dx_k \quad (6)$$

с областью определения D_0 , составленной из линейных комбинаций Ψ_0 и векторов вида

$$\Psi = \int :\phi(x_1) \dots \phi(x_n): g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \Psi_0, \quad g \in S(\mathbb{R}^{nd}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Можно показать, что последовательность (6) имеет сильный граф-предел, не зависящий от выбора $\delta_\nu(x)$, который и обозначается $:\phi^k:(f)$. Его область определения содержит всевозможные векторы

$$\prod_{j=1}^n :\phi^{k_j}:(g_j) \Psi_0, \quad (7)$$

где $g_j \in S(\mathbb{R}^d)$, линейная оболочка которых служит инвариантной областью определения всех мономов. Каждый моном является операторным распределением умеренного роста и удовлетворяет требованиям лоренц-ковариантности, локальности и спектральному условию. Стоит отметить, что используемая ниже техника позволяет значительно упростить рутинный вывод перечисленных фактов, но мы не будем на этом останавливаться.

Приступим к анализу условий сходимости ряда (1), введя обозначение

$$\varphi_N(f) = \sum_{k \leq N} d_k :\phi^k:(f). \quad (8)$$

Прежде всего рассмотрим действие последовательности частичных сумм (8) на вакуумное состояние. Согласно определению $:\phi^k:$ и формулам (3) и (4) мы имеем

$$\|\varphi_N(f) \Psi_0\|^2 = \sum_{k \leq N} |d_k|^2 \|:\phi^k:(f) \Psi_0\|^2 = \sum_{k \leq N} k! |d_k|^2 w_{\text{maj}}^k(\bar{f} \otimes f), \quad (9)$$

¹⁾Компактность означает, что соблюдается включение $\bar{V} \setminus \{0\} \subset \mathbb{V}_- \times \mathbb{V}_+$. Норму $|\cdot|$ здесь и далее считаем евклидовой.

откуда видно, на чем сказывается отсутствие положительности: ряд справа имеет ту же структуру, что и ряд распределений, представляющий двухточечную функцию поля (1), но только с заменой w на w_{maj} . Операторная реализация поля (1) подразумевает, что должно быть определено любое повторное действие его на Ψ_0 . Мы укажем область определения в $\mathcal{H}$, инвариантную не только относительно его самого, но и относительно действия любого поля, задаваемого рядом с коэффициентами d'_k такими, что $|d'_k| \leq C|d_k|$, где C – зависящая от ряда положительная константа. Этим условием на множестве рядов устанавливается предпорядок, для которого мы используем обозначение $\triangleleft$, называя ряд с коэффициентами d'_k подчиненным ряду с коэффициентами d_k .

ЛЕММА 1. Пусть ϕ – нейтральное скалярное свободное поле, действующее в псевдогильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и $\mathfrak{s}(\phi)$ – ряд (1) по виковым степеням этого поля. Пусть E – бочечное пространство пробных функций, плотное в S , и подпространство $D^E \subset \mathcal{H}$ порождается Ψ_0 и векторами вида (7), где $g_j \in E$. Предположим, что для всякого натурального числа n и для любого набора рядов $\mathfrak{s}^{(j)} \triangleleft \mathfrak{s}$ и функций $f_j \in E$, $1 \leq j \leq n$, последовательность векторов

$$\Phi_N = \sum_{\substack{k_j \leq N \\ 1 \leq j \leq n}} d_{k_1}^{(1)} \dots d_{k_n}^{(n)} : \phi^{k_1} : (f_1) \dots : \phi^{k_n} : (f_n) \Psi_0, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где $d_{k_j}^{(j)}$ – коэффициенты $\mathfrak{s}^{(j)}$, сходится по норме $\mathcal{H}$. Тогда ряд $\mathfrak{s}(\phi)$ с областью определения D^E сходится в смысле сильного граф-предела к полю φ , являющемуся операторнозначной обобщенной функцией над E . Более того, сходится любой виков ряд, подчиненный $\mathfrak{s}$, и все такие поля имеют общую плотную и инвариантную область определения $D^E(\mathfrak{s})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Psi_N, \Psi'_N \in D^E$ и $\Psi_N \rightarrow \Psi$, $\Psi'_N \rightarrow \Psi$, $\varphi_N(f)\Psi_N \rightarrow \Phi$, $\varphi_N(f)\Psi'_N \rightarrow \Phi'$. Согласно определению сильного граф-предела [12] надо убедиться, что $\Phi = \Phi'$. Пусть

$$\Omega = : \phi(f_1) \dots \phi(f_n) : \Psi_0, \quad f_j \in E, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (11)$$

Из теоремы Вика следует, что

$$\varphi_N(f)^* \mid D^E = \sum_{k \leq N} \bar{d}_k : \phi^k : (\bar{f}),$$

где знак “*” означает псевдоэрмитово сопряжение. Значит,

$$\langle \Phi - \Phi', \Omega \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \varphi_N(f)(\Psi_N - \Psi'_N), \Omega \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Psi_N - \Psi'_N, \varphi_N(f)^* \Omega \rangle = 0,$$

ибо последовательность $\varphi_N(f)^* \Omega$ сходится, являясь конечной линейной комбинацией последовательностей (10) частного вида. Таким образом, требуемое равенство $\Phi = \Phi'$ обеспечивается плотностью линейной оболочки векторов вида (11) в $\mathcal{H}$, которая вытекает из плотности E в S . В самом деле, пусть $\bar{\Omega}$ – вектор того же вида, но с пробными функциями $g_j \in S$, и пусть $f_{j\nu} \in E$, $f_{j\nu} \rightarrow g_j$ в S . Обозначим $g = g_1 \otimes \dots \otimes g_n$, $f_\nu = f_{1\nu} \otimes \dots \otimes f_{n\nu}$ и $\Omega_\nu = : \phi(f_{1\nu}) \dots \phi(f_{n\nu}) : \Psi_0$. Тогда

$$\|\bar{\Omega} - \Omega_\nu\|^2 = T_n((\overline{f - f_\nu}) \otimes (f - f_\nu)),$$

где согласно (3) и (4)

$$T_n(x, x') = \sum_{\pi} \prod_{j=1}^n w_{\text{maj}}(x_j, x'_{\pi(j)}).$$

Принадлежность $T_n \in S'$ влечет $\Omega_{\nu} \rightarrow \Omega$, и указанное свойство плотности имеет место в силу цикличности вакуума.

Обозначим граф-предел последовательности (8) через $\varphi(f)$. Пара $\{\Psi, \Phi\}$ принадлежит графику этого оператора, если найдется последовательность $\Psi_N \in D^E$ такая, что $\Psi_N \rightarrow \Psi$, $\varphi_N(f)\Psi_N \rightarrow \Phi$. Частичные суммы любого подчиненного ряда $\mathfrak{s}^{(j)}(\phi)$ также имеют предел. Векторы $\prod_{1 \leq j \leq n} \varphi^{(j)}(f_j)\Psi_0$, где $f_j \in E$, $n = 1, 2, \dots$, корректно определены и в качестве подпространства $D^E(\mathfrak{s})$ можно взять линейную оболочку Ψ_0 и всевозможных векторов этого вида. Оно инвариантно и плотно в $\mathcal{H}$. Роль условия бочечности E состоит в том, что для бочечных пространств справедлив принцип равномерной ограниченности и поточечная сходимость последовательности непрерывных линейных отображений $f \rightarrow \varphi_N(f)\Psi_N$ из E в $\mathcal{H}$ влечет непрерывность предельного отображения $f \rightarrow \varphi(f)\Psi$ (см. [13, теорема III.4.6]). Как следствие $\langle \Phi, \varphi(f)\Psi \rangle$ есть обобщенная функция над пространством E при любых $\Phi, \Psi \in D^E(\mathfrak{s})$. Лемма доказана.

Даваемое теоремой Вика выражение для n -точечного вакуумного среднего поля φ есть степенной ряд от $n(n-1)/2$ переменных $w(x_j - x_m)$, который может быть записан следующим образом:

$$\langle \Psi_0, \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \Psi_0 \rangle = \sum_K D_K W^K. \quad (12)$$

Здесь K — целочисленный вектор с неотрицательными компонентами k_{jm} , где $1 \leq j < m \leq n$, и

$$W^K \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j < m} w(x_j - x_m)^{k_{jm}}.$$

Анализ связанной с теоремой Вика комбинаторики показывает [1], что

$$D_K = \frac{\kappa!}{K!} \prod_{1 \leq j \leq n} d_{\kappa_j},$$

где $\kappa_j = k_{1j} + \dots + k_{j-1j} + k_{jj+1} + \dots + k_{jn}$ есть общее число тех спариваний в данном члене ряда, в которые вовлечен аргумент x_j , и использовано обычное соглашение

$$K! = \prod_{j < m} k_{jm}!, \quad \kappa! = \prod_{1 \leq j \leq n} \kappa_j!.$$

Для вывода конкретных условий сходимости мультииндексного ряда, частичной суммой которого служит вектор (10), мы воспользуемся еще одной простой леммой.

ЛЕММА 2. Пусть I — счетное множество индексов, $\{\Phi_k\}_{k \in I}$ — семейство элементов гильбертова пространства со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Если двойной числовой ряд $\sum_{k, l \in I} (\Phi_k, \Phi_l)$ абсолютно сходится, то семейство $\{\Phi_k\}_{k \in I}$ безусловно суммируемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Безусловная суммируемость по определению означает, что для любого биективного отображения $\nu \rightarrow k_\nu$ множества неотрицательных целых чисел $\mathbb{N}$ на I ряд $\sum_{\nu \in \mathbb{N}} \Phi_{k_\nu}$ сходится, т.е. по любому $\epsilon > 0$ найдется номер λ_0 такой, что при $\lambda_0 \leq \lambda \leq \Lambda$ имеет место неравенство $\left\| \sum_{\lambda \leq \nu \leq \Lambda} \Phi_{k_\nu} \right\| < \epsilon$. Поскольку квадрат входящей сюда нормы не превосходит $\sum_{\lambda \leq \mu, \nu \leq \Lambda} |(\Phi_{k_\mu}, \Phi_{k_\nu})|$, лемма вытекает из того элементарного факта, что сходящийся ряд положительных чисел остается сходящимся и удовлетворяет критерию Коши при любой перестановке членов. Лемма 2 доказана.

Таким образом, условия леммы 1 будут выполнены, если при любом n и для всех $f_j \in E$ абсолютно сходится числовой ряд

$$\sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \\ l_1, \dots, l_n}} \left(\prod_{1 \leq j \leq n} d_{k_j} : \phi^{k_j} : (f_j) \Psi_0, \prod_{1 \leq j \leq n} d_{l_j} : \phi^{l_j} : (f_j) \Psi_0 \right),$$

представляющий в этом случае $\left\| \prod_{1 \leq j \leq n} \varphi(f_j) \Psi_0 \right\|^2$. Далее мы придерживаемся нумерации аргументов, соответствующей формальной записи этого выражения в виде

$$\int (\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \Psi_0, \varphi(x_{n+1}) \dots \varphi(x_{2n}) \Psi_0) \times \\ \times \overline{f_1(x_1) \dots f_n(x_n)} f_1(x_{n+1}) \dots f_n(x_{2n}) dx_1 \dots dx_{2n}.$$

Приводя каждое из произведений виковых степеней к полностью нормально упорядоченному виду (см. [1, приложение А]) и используя затем (4), мы получаем

$$\left\| \prod_{1 \leq j \leq n} \varphi(f_j) \Psi_0 \right\|^2 = \sum_K D_K W^K (\bar{f} \otimes f), \quad (13)$$

где $f = f_1 \otimes \dots \otimes f_n$. Эта запись аналогична формуле (12), с очевидным изменением $n \rightarrow 2n$ в определении мультииндексов K и κ . Кроме того,

$$D_K = \frac{\kappa!}{K!} \prod_{1 \leq j \leq n} \bar{d}_{\kappa_j} \prod_{n \leq j \leq 2n} d_{\kappa_j}.$$

Более существенно, что в данном случае

$$W^K = \prod_{1 \leq j < m \leq n} w(x_m - x_j)^{k_{jm}} \times \\ \times \prod_{n+1 \leq j < m \leq 2n} w(x_j - x_m)^{k_{jm}} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ n+1 \leq m \leq 2n}} w_{\text{maj}}(x_j, x_m)^{k_{jm}}. \quad (14)$$

Теперь задача сведена к выяснению условий сходимости ряда распределений специальной структуры, члены которого являются граничными значениями функций, аналитических в одной и той же трубчатой области. Основная трудность состоит в определении того, какую сингулярность имеет сумма ряда, когда он суммируем. Сингулярность функционала связана с поведением его фурье-образа на бесконечности, и мы будем ее характеризовать, оценивая свертку фурье-образа с быстро убывающими пробными функциями.

3. ЛЕММА О ПРОДОЛЖЕНИИ

ЛЕММА 3. Пусть $u \in S'_{b_0}$ и $b(s) \leq b_0(s)$. Если для свертки функционала u с функциями $g \in S'_{b_0, B}$ при некотором $B > 0$ и любом $A > 0$ справедлива оценка

$$|(u * g)(p)| \leq C_{\epsilon, A} \|g\|_{A, B} b(\epsilon|p|) \quad (15)$$

со сколь угодно малым $\epsilon > 0$, то функционал u допускает непрерывное продолжение на пространство S'_b , причем оно единственно. Если семейство функционалов из S'_{b_0} допускает равномерную оценку (15), то их продолжения образуют ограниченное множество в S'_b . Аналогичным образом, если $u \in S'_{b_0}$ и при некотором B для всех $g \in S_{b_0, B}$ имеет место оценка

$$|(u * g)(p)| \leq C_{\epsilon} \|g\|_{B, N} b(\epsilon|p|) \quad (16)$$

с любым $\epsilon > 0$ и некоторым N (которое может зависеть от ϵ), то функционал u может быть продолжен единственным образом до элемента пространства S'_b , причем продолжение семейства функционалов дает ограниченное множество в случае равномерной оценки.

Леммы такого типа использовались в работе [9], но здесь мы привели несколько более сильную формулировку, удобную для дальнейшего. Подчеркнем, что индикаторные функции этих пространств по определению обладают некоторыми свойствами регулярности. В частности, они выпуклы и монотонно растут начиная с единицы, поэтому

$$b\left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right) \leq \frac{b(s_1) + b(s_2)}{2} \leq b(s_1)b(s_2). \quad (17)$$

Кроме того, должно выполняться неравенство

$$sb(s) \leq Cb(\lambda s) \quad (18)$$

с некоторыми константами C и λ , что обеспечивает существование операции умножения на независимую переменную. Оба эти свойства существенны для вывода леммы 3, а последовательность b_0 должна удовлетворять даже более сильному, чем (18), ограничению

$$b_0^2(s) \leq Cb_0(\lambda s). \quad (19)$$

Мы изложим здесь доказательство леммы 3 лишь для случая функционалов класса S'_{b_0} , который не рассматривался в [9]. Напомним, что S_{b_0} является объединением счетно-нормированных пространств $S_{b_0, B}$ и участвующая в (16) норма $\|g\|_{B, N}$ имеет вид

$$\|g\|_{B, N} = \sup_q \max_{|\kappa| \leq N} |\partial^{\kappa} g(q)| b_0\left(\frac{|q|}{B}\right).$$

Желаемое продолжение $\tilde{u}$ можно задать формулой

$$(\tilde{u}, h) = \int (u, h_0(p - \cdot)h(\cdot)) dp, \quad h \in S_b, \quad (20)$$

где h_0 — любой элемент $S_{b_0, B/\lambda}$ со свойством

$$\int h_0(p) dp = 1.$$

Из оценки (16) следует неравенство

$$|(u, h_0(p - \cdot)h(\cdot))| \leq C_\epsilon \|g_p\|_{B, N} b(\epsilon|p|), \quad (21)$$

где $g_p(q) \stackrel{\text{def}}{=} h_0(q)h(p - q)$. Если $h \in S_{b, B_1}$, $B_1 \geq B$, то применение формулы Лейбница дает

$$\|g_p\|_{B, N} \leq 2^N \|h_0\|_{B/\lambda, N} \|h\|_{B_1, N} \sup_q \frac{b_0(|q|/B)}{b_0(\lambda|q|/B)b(|p - q|/B_1)}. \quad (22)$$

Последовательное использование свойства (19), неравенства $b(s) \leq b_0(s)$ и свойства (17) показывает, что дробь в правой части (22) оценивается функцией $C/b(|p|/2B_1)$. Подставляя ее в (21) и учитывая (18), мы видим, что подынтегральное выражение в (20) убывает при $|p| \rightarrow \infty$ быстрее, чем степенным образом, и интеграл определяет линейный функционал на S_b , непрерывность которого гарантирована наличием фактора $\|h\|_{B_1, N}$ в правой части неравенства (22). На функциях $h \in S_{b_0}$ построенный функционал совпадает с исходным, поскольку тогда интеграл (20) существует не только для u , но и для любого распределения из S'_{b_0} , а следовательно, последовательность римановых интегральных сумм для $\int h_0(p - \cdot)h(\cdot) dp$ слабо фундаментальна в S_{b_0} и в силу монтелевости²⁾ этого пространства сходится в нем к некоторому элементу, которым может быть только h . Последний аргумент доказывает также плотность S_{b_0} в S_b , а тем самым единственность продолжения. Если семейство функционалов из S'_{b_0} допускает равномерную оценку (16), то очевидна слабая ограниченность множества их продолжений в S'_b , а поскольку S_b бочечно, то это множество и сильно ограничено.

4. УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Как уже отмечалось, участвующие в мультииндексном ряде (13) распределения являются граничными значениями функций $\mathbf{v}_K$, голоморфных в одной и той же трубчатой области. Ее основанием служит некоторый выпуклый конус V и для любого компактного подмножества $Q \subset V$ соблюдается условие полиномиальной ограниченности

$$|\mathbf{v}_K(x + iy)| \leq C(1 + |x|)^\omega \quad (y \in Q), \quad (23)$$

где константы C и ω зависят, вообще говоря, от Q . Мы будем рассматривать ряд (13) вначале на пространствах S_a^1 , где индекс 1 означает $\beta = 1$, т.е. индикаторной функцией $b(s)$ этих пространств служит e^s . Сопряженные им пространства состоят из гиперфункций с ростом $\sim a(|x|)$ на бесконечности. Известно, что гиперфункции дают наиболее широкие рамки для построения локальной теории поля. По определению $S_a^1 =$

²⁾В [8] вместо этого общепринятого сейчас термина использовался термин “совершенное”. Относительно используемых здесь свойств топологических векторных пространств см. [13].

$\bigcup_{A, B > 0} S_{a, A}^{1, B}$, где $S_{a, A}^{1, B}$ – банахово пространство функций, аналитических в области $T_B = \{x + iy : |y| < 1/B\}$, непрерывных в ее замыкании и имеющих конечную норму

$$\|f\|_{A, B} = \sup_{z \in T_B} |f(z)| a \left(\frac{|x|}{A} \right). \quad (24)$$

Выделенная роль таких пробных функций в нашей задаче проявляется, в частности, в том, что на них граничное значение v_K аналитической функции $\mathbf{v}_K$ допускает удобное для анализа представление

$$v_K(f) = \int \mathbf{v}_K(x + iy) f(x + iy) dx \quad \left(y \in V, \quad |y| < \frac{1}{B} \right). \quad (25)$$

Действительно, в силу теоремы Коши–Пуанкаре интеграл справа не зависит от y и совпадает с левой частью в силу предельного соотношения $\lim_{y \rightarrow 0} f(x + iy) = f(x)$, верного по топологии S_a^1 и тем более в S .

ТЕОРЕМА 1. Пусть V – открытый выпуклый конус, $(v_K)_{K \in I}$ – счетное семейство распределений умеренного роста, являющихся граничными значениями функций $\mathbf{v}_K(z)$, голоморфных в области $T^V = \{z : \text{Im } z \in V\}$ и удовлетворяющих условию (23). Предположим, что a, b – индикаторные функции пространства S_a^b с нетривиальным подпространством S_a^1 . Если найдется вектор $\eta \in V$ такой, что

$$\sum_{K \in I} \inf_{0 < t < \delta} e^{st} \int \frac{|\mathbf{v}_K(x + it\eta)|}{a(|x|/A)} dx \leq C_{\delta, \epsilon, A} b(\epsilon s) \quad (26)$$

при любых положительных δ, ϵ и A , то семейство $(v_K)_{K \in I}$ безусловно суммируемо в S_a^b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in S_{a, A}^{1, B}$ и $|\eta| = 1$. Последовательное использование представления (25), определения (24) и неравенства (26) с $s = 0$ и $\delta < 1/B$ дает

$$\sum_{K \in I} |v_K(f)| \leq \|f\|_{A, B} \sum_{K \in I} \inf_{0 < t < \delta} \int \frac{|\mathbf{v}_K(x + it\eta)|}{a(|x|/A)} dx \leq C_{A, B}.$$

Таким образом, семейство распределений v_K абсолютно суммируемо на каждом элементе S_a^1 . Поскольку это пространство монтелевское, его сильное сопряженное тоже является монтелевским, и в нем найдется элемент v , к которому рассматриваемое семейство безусловно суммируемо по сильной топологии. Рассмотрим свертку фурье-образа $\hat{v} = u \in S_1^{\prime a}$ с пробной функцией $g \in S_{1, B}^{a, A}$, используя равенство

$$(u * g)(p) = \sum_{K \in I} \int \mathbf{v}_K(x + iy) e^{ip(x + iy)} f(x + iy) dx, \quad (27)$$

которое верно при любом y , принадлежащем как V , так и базе области аналитичности функции

$$f(z) = \int g(-p) e^{ipz} dp.$$

Преобразование Фурье является взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением S_1^a на S_a^1 , и существуют $A' > A$, $B' > B$ такие, что $\|f\|_{S_{a,A'}^{1,B'}} \leq C\|g\|_{S_{1,B}^{a,A}}$. Тогда из (26), (27) следует оценка

$$\begin{aligned} |(u * g)(p)| &\leq C\|g\|_{A,B} \sum_{K \in I} \inf_{0 < t < 1/B'} e^{|p|t} \int \frac{|\mathbf{v}_K(x + it\eta)|}{a(|x|/A')} dx \leq \\ &\leq C_{\epsilon,A}\|g\|_{A,B} b(\epsilon|p|), \end{aligned} \quad (28)$$

и, значит, $u \in S_b'^a$ по лемме 3.

Пусть теперь $f \in S_a^b$, $f_\mu \in S_a^1$, $f_\mu \rightarrow f$ в S_a^b . Фиксируем биективное отображение $\mathbb{N} \rightarrow I: \nu \rightarrow K_\nu$ и обозначим

$$v_\lambda(f) = \sum_{\nu \leq \lambda} v_{K_\nu}(f).$$

Запишем

$$v(f) - v_\lambda(f) = v(f - f_\mu) + [v(f_\mu) - v_\lambda(f_\mu)] + v_\lambda(f_\mu - f).$$

Фурье-образ каждого v_λ удовлетворяет оценке вида (28) с одной и той же константой $C_{\epsilon,A}$. Значит, эта последовательность распределений ограничена в $S_a'^b$ по лемме 3. Топология S_a^b , как и любого бочечного пространства, совпадает с топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах. Поэтому при $\mu \rightarrow \infty$ предельное соотношение $v_\lambda(f_\mu - f) \rightarrow 0$ выполнено равномерно по λ . Фиксируя достаточно большое μ , по любому $\epsilon > 0$ можно указать число $\lambda_{\epsilon,\mu}$ такое, что $|v(f_\mu) - v_\lambda(f_\mu)| < \epsilon$ при $\lambda > \lambda_{\epsilon,\mu}$. Таким образом, $v_\lambda \rightarrow v$ по слабой, а значит, и по сильной топологии монтелевского пространства $S_a'^b$. Теорема доказана.

В теории поля с положительной метрикой представляют интерес виковы степенные ряды, сходящиеся к нелокальным полям [2]. При их анализе полезен аналог теоремы 1, при выводе которого роль S_a^1 играет пространство S^0 ($\beta = 0$), являющееся фурье-образом пространства $S_0 = C_0^\infty$ гладких функций с компактным носителем. Подробнее, $S^0 = \bigcup_{B>0} S^{0,B}$, где $S^{0,B}$ состоит из целых функций $f(z)$, для которых при любом N конечна норма

$$\|f\|_{B,N} = \sup_{z=x+iy} (1 + |z|)^N |f(z)| e^{-B|y|}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть, как и в теореме 1, $(v_K)_{K \in I}$ – счетное семейство распределений умеренного роста, являющихся граничными значениями функций $\mathbf{v}_K(z)$, голоморфных в области T^V и удовлетворяющих условию (23). Предположим, что b – индикаторная функция пространства S^b . Если найдется вектор $\eta \in V$ такой, что

$$\sum_{K \in I} \inf_{t>0} e^{st} \int \frac{|\mathbf{v}_K(x + it\eta)|}{(1 + |x|)^N} dx \leq C_\epsilon b(\epsilon s) \quad (29)$$

при любом $\epsilon > 0$ и некотором $N(\epsilon)$, то семейство $(v_K)_{K \in I}$ безусловно суммируемо в S'^b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in S^{0,B}$ и $|\eta| = 1$. Тогда

$$|f(x + it\eta)| \leq \|f\|_{B,N} e^{Bt} (1 + |x|)^{-N}.$$

Используя (25) и (29) с $s = B$, мы видим, что семейство распределений v_K абсолютно суммируемо на каждом элементе S^0 . Фурье-образ предела обозначим u и рассмотрим его свертку с функцией g из $S_{0,B}$. По определению этого пространства носитель g лежит в шаре $|p| < B$ и все нормы $\|g\|_{S_{0,B,N}} = \sup_{|p| \leq B} \max_{|\kappa| \leq N} |\partial^\kappa g(p)|$ конечны. Пусть функция $f(z)$ определена так же, как в доказательстве теоремы 1. При достаточно большом B' имеем непрерывное вложение $S_{0,B} \rightarrow S^{0,B'}$, и при любом N' найдется N такое, что

$$\|f\|_{S^{0,B'},N'} \leq C \|g\|_{S_{0,B,N}}. \quad (30)$$

Пусть $C_\epsilon, N'(\epsilon)$ — те числа, которые участвуют в (29). Используя последовательно (27), (30), (29) и (17), получаем

$$|(u * g)(p)| \leq C C_\epsilon \|g\|_{B,N(\epsilon)} b(2B'\epsilon) b(2\epsilon|p|).$$

Применяя теперь лемму 3 к u и к семейству фурье-образов u_λ частичных сумм v_λ ($\lambda \in \mathbb{N}$), заключаем, что $v \in S'^b$ и последовательность v_λ ограничена в S'^b . Оставшаяся часть доказательства совпадает с концом доказательства теоремы 1, поскольку пространства S^b также монтелиевы.

5. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИКОВЫХ РЯДОВ

Оценивая поведение аналитических функций, граничными значениями которых служат распределения (14), все функции $\mathbf{w}(z_j - z_m)$ можно заменить на $\mathbf{w}_{\text{maj}}(z_j, z_m)$, поскольку

$$|\mathbf{w}(x - x' - 2iy)|^2 \leq |\mathbf{w}_{\text{maj}}(x - iy, x + iy)| |\mathbf{w}_{\text{maj}}(x' - iy, x' + iy)| \quad (31)$$

для всех $y \in \mathbb{V}_+$. Действительно, из (2) следует неравенство

$$|\langle \phi(f) \Psi_0, \phi(g) \Psi_0 \rangle| \leq \|\phi(f) \Psi_0\| \cdot \|\phi(g) \Psi_0\|.$$

Взяв $f(\xi) = (\nu/\sqrt{\pi})^d e^{-\nu^2(\xi - x - iy)^2}$, $g(\xi) = (\nu/\sqrt{\pi})^d e^{-\nu^2(\xi - x' - iy)^2}$, записав левую и правую части этого неравенства в виде интегралов по плоскости в области аналитичности и переходя к пределу $\nu \rightarrow \infty$, получаем (31). Всюду далее считаем, что мнимые части первого и второго аргументов функции $\mathbf{w}_{\text{maj}}$ принадлежат соответственно отрицательной и положительной y_0 -полуосям, и будем характеризовать ее инфракрасное и ультрафиолетовое поведение парой монотонных неотрицательных функций $w_{\text{IR}}, w_{\text{UV}}$, первая из которых растет при увеличении аргумента, а вторая — при стремлении его к нулю, таких, что

$$|\mathbf{w}_{\text{maj}}(z, z')| \leq C_0 + C_1 w_{\text{IR}}(|z| + |z'|) + C_2 w_{\text{UV}}(|y| + |y'|). \quad (32)$$

Согласно формуле (5) такая характеристика существует, а выбрать ее оптимальным образом нетрудно в каждом конкретном случае, соблюдая, в частности, условия нормировки $w_{\text{IR}}(0) = w_{\text{UV}}(\infty) = 0$.

При нахождении функциональной области определения ряда (1) мы будем накладывать на его коэффициенты несколько естественных требований. Считаем, что

$$d_k \geq 0, \quad d_0 = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (k! d_k^2)^{1/k} = 0. \quad (33)$$

Первые два условия технические и оправданы тем, что любой ряд подчинен ряду, удовлетворяющему им. Третье условие в теории с положительной метрикой гарантирует локализуемость суммы ряда, а в случае индефинитной метрики требуется для самого ее существования. Если оно соблюдается, то двухточечная функция

$$\langle \Psi_0, \varphi(x_1) \varphi(x_2) \Psi_0 \rangle = \sum_k k! d_k^2 w(x_1 - x_2)^k$$

аналитична в обычной области локальной теории, поскольку является суперпозицией w и некоторой целой функции. Аналогичным образом функция $\sum_k k! d_k^2 w_{\text{maj}}(x_1, x_2)^k$, входящая в (9), будет наследовать аналитические свойства w_{maj} . Кроме того, предполагаем, что

$$d_k d_l \leq C h^{k+l} d_{k+l}, \quad (34)$$

где C, h – некоторые константы. Тогда ограничения на пробные функции, обеспечивающие полную операторную реализацию поля (1), совпадают по существу с ограничениями, обеспечивающими сходимость этого ряда на вакуумном векторе.

ТЕОРЕМА 3. Пусть ϕ – свободное поле, действующее в псевдогильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и пусть для положительной мажоранты его корреляционной функции справедлива оценка (32), где $w_{\text{IR}}, w_{\text{UV}}$ монотонны. При условиях (33), (34) на коэффициенты ряд $\varphi = \mathfrak{s}(\phi)$ по виковым степеням этого поля, а также любой подчиненный ему ряд корректно определены как операторнозначные обобщенные функции на всяком пространстве S_a^b , содержащем нетривиальное подпространство S_a^1 , индикаторные функции которого удовлетворяют неравенствам

$$\sum_k L^k k! d_{2k} w_{\text{IR}}(r)^k \leq C_{L,\epsilon} a(\epsilon r), \quad \inf_{t>0} e^{st} \sum_k L^k k! d_{2k} w_{\text{UV}}(t)^k \leq C_{L,\epsilon} b(\epsilon s) \quad (35)$$

при сколь угодно большом $L > 0$ и сколь угодно малом $\epsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 1 к ряду (13), полагая $v_K = D_K W^K$. Пусть e_0 – орт $(1, \mathbf{0})$ в $\mathbb{R}^d$, η – вектор в $\mathbb{R}^{2nd}$ с компонентами $\eta_j = -j e_0$ при $1 \leq j \leq n$, $\eta_j = (j - n) e_0$ при $n + 1 \leq j \leq 2n$, и пусть $r = |x|$, где $x = (x_1, \dots, x_{2n})$. При учете монотонности функций $w_{\text{IR}}, w_{\text{UV}}$ из (31), (32) следует

$$|\mathbf{W}^K(x + it\eta)| \leq 3^{|K|-1} (C_0^{|K|} + C_1^{|K|} w_{\text{IR}}(2r + 2nt)^{|K|} + C_2^{|K|} w_{\text{UV}}(t)^{|K|}). \quad (36)$$

Условие (34) и неравенства $|K|!/K! \leq (n(2n-1))^{|K|}$, $\kappa! \leq |\kappa|! \leq 4^{|K|} (|K|!)^2$, вытекающие из известных свойств полиномиальных коэффициентов, дают

$$D_K \leq C' h'^{|K|} |K|! d_{2|K|}, \quad (37)$$

где константа h' зависит от n . Теперь суммирование по мультииндексам можно заменить суммированием по натуральным числам. Число мультииндексов с заданной нормой $|K|$ есть биномиальный коэффициент $\binom{|K|+n(2n-1)-1}{|K|}$. Эта зависимость от $|K|$ полиномиальна и несущественна. Используя (36), (37), получаем

$$\sum_K |\mathbf{v}_K(x + it\eta)| \leq C'' \left(\sum_{k=0}^{\infty} L^k k! d_{2k} w_{\text{IR}}(2r + 2nt)^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} L^k k! d_{2k} w_{\text{UV}}(t)^k \right).$$

Первое из условий (35) и аналог неравенства (17) для индикаторной функции a позволяют мажорировать сумму по степеням w_{IR} выражением $C_{L,\epsilon}(t)a(4\epsilon r)$, где функция $C_{L,\epsilon}(t)$ ограничена на каждом конечном отрезке. Условие (18), примененное к a , дает $(1+r)^N a(4\epsilon r) \leq C a(r/A)$ при выборе $\epsilon < 1/(4A\lambda^N)$. Взяв $N = 2nd + 1$, мы приходим к оценке

$$\sum_K \int \frac{|\mathbf{v}_K(x + it\eta)|}{a(|x|/A)} dx \leq C_{A,L}(t) \sum_{k=0}^{\infty} L^k k! d_{2k} w_{\text{UV}}(t)^k.$$

Поскольку функция w_{UV} монотонно растет при уменьшении аргумента, нижняя грань во второй из формул (35) при достаточно больших s достигается на отрезке $(0, \delta)$, где δ сколь угодно мало. Учитывая, что сумма нижних граней не превосходит нижнюю грань суммы, мы видим, что (35) влечет (26). По теореме 1 ряд $\sum_K D_K W^K$ безусловно суммируем в S_a^b , а числовой ряд (13) абсолютно суммируем при любой пробной функции $f \in S_a^b$. Для завершения доказательства остается применить леммы 1 и 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Умеренность роста означает, что особенности w_{maj} не хуже чем степенные или логарифмические. Поэтому можно предполагать, что при любом $\lambda > 0$ соблюдаются неравенства

$$w_{\text{IR}}(\lambda r) \leq C_\lambda w_{\text{IR}}(r), \quad w_{\text{UV}}(t/\lambda) \leq C'_\lambda w_{\text{UV}}(t),$$

верные, по крайней мере, в предельном смысле, при $r > R(\lambda)$ и $t < \delta(\lambda)$. Тогда критерий (35) принимает более простой вид

$$\sum_k L^k k! d_{2k} w_{\text{IR}}(r)^k \leq C_L a(r), \quad \inf_{t>0} e^{st} \sum_k L^k k! d_{2k} w_{\text{UV}}(t)^k \leq C_L b(s), \quad (38)$$

где $L > 0$ сколь угодно велико. В частности, применительно к нормальной экспоненте: $\exp\{ig\phi\}:(x)$ условия (38) выглядят следующим образом:

$$\exp\{L w_{\text{IR}}(r)\} \leq C_L a(r), \quad \inf_{t>0} \exp\{st + L w_{\text{UV}}(t)\} \leq C_L b(s).$$

6. СЛУЧАЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕТРИКИ

Применим изложенную конструкцию к простейшему случаю свободного скалярного поля с вайтмановской функцией

$$\Delta^+(x; m) = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ipx} dp = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{e^{-i\omega(\mathbf{p})x^0}}{2\omega(\mathbf{p})} e^{i\mathbf{p}x} d\mathbf{p}.$$

Пусть размерность пространства-времени $d > 2$. Используя неравенство $\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \geq \varepsilon|\mathbf{p}| + m\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ и обозначения $s = |\mathbf{p}|$, $m' = m\sqrt{1 - \varepsilon^2}$, получаем элементарную оценку

$$|\Delta^+(x^0 - it, \mathbf{x}; m)| \leq C e^{-m't} \int_0^\infty e^{-\varepsilon s t} s^{d-3} ds = \frac{C' e^{-m't}}{t^{d-2}},$$

которая показывает, что в данном случае можно взять $w_{\text{IR}} = 0$ и $w_{\text{UV}}(t) = e^{-m't}/t^{d-2}$. Ввиду инфракрасной ограниченности распределения Δ^+ в качестве исходной функциональной области определения виковых рядов годится S^0 . Благодаря ей же виковы ряды могут сходиться и при нарушении условия локализуемости (33). Теорема 2 позволяет анализировать и эту ситуацию и приводит к следующему усилению результатов Рикерса [2].

ТЕОРЕМА 4. Пусть ϕ – свободное скалярное нейтральное поле массы $m > 0$ в пространстве-времени размерности $d > 2$. Виков ряд $\sum_{k=0}^\infty d_k : \phi^k : (x)$ с положительными коэффициентами, удовлетворяющими условию (34), корректно определен в фоковском пространстве поля ϕ при сглаживании с пробными функциями из пространства S^b , для которого

$$\sum_{k < s} k! d_{2k} \left(\frac{s}{k}\right)^{k(d-2)} \leq C_\epsilon b(\epsilon s) \quad (39)$$

при любом $\epsilon > 0$. Если $m = 0$, то такой ряд корректно определен при более жестком ограничении

$$\sum_{k=0}^\infty k! d_{2k} \left(\frac{s}{k}\right)^{k(d-2)} \leq C_\epsilon b(\epsilon s). \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство теоремы 3 с очевидными изменениями в деталях. Основное отличие в том, что там мы вначале оценили сумму аналитических функций и лишь затем взяли инфимум по t , а теперь выберем свободный параметр в представлении (25) оптимальным образом для каждого члена ряда в отдельности. Используя те же обозначения, применяя оценки (36) и (37) и полагая $N = 2nd + 1$, получаем

$$\sum_K \inf_{t > 0} e^{st} \int \frac{|v_K(x + it\eta)|}{(1 + |x|)^N} dx \leq C \sum_{k=0}^\infty L^k k! d_{2k} \inf_{t > 0} \frac{e^{(s - km')t}}{t^{k(d-2)}}. \quad (41)$$

Пусть $m \neq 0$. Обозначим $\lambda = e/(d-2)$. Инфимум в (41) обращается в нуль при $k \geq s/m'$ и равен $(\lambda(s/k - m'))^{k(d-2)} \leq (\lambda s/k)^{k(d-2)}$ при остальных k . Будем считать, что $\lambda' = L^{1/(d-2)} \lambda \geq 1/m'$. Тогда из (39) следует, что правая часть неравенства (41) мажорируется $C_\epsilon b(\epsilon \lambda' s)$, что обеспечивает соблюдение условий теоремы 2 ввиду произвольности ϵ . При $m = 0$ обрыва суммирования не происходит и тот же результат обеспечивается формулой (40). Применение лемм 1 и 2 завершает доказательство.

Отметим, что в локализуемом случае варьирование плоскости интегрирования в каждом члене ряда по отдельности не приводит к существенному улучшению оценки, а условия (39) и (40) становятся эквивалентными. Действительно, пусть коэффициенты d_k имеют вид

$$d_k = (k!)^{-1/\rho} \quad (\rho > 0). \quad (42)$$

Несложная выкладка с использованием формулы Стирлинга, подобная выполненной в [8, § IV.2.2], показывает, что при $\rho < 2$ функции

$$\inf_{t>0} e^{st} \sum_{k=0}^{\infty} k! \frac{d_{2k}}{t^{k(d-2)}}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! d_{2k} \inf_{t>0} \frac{e^{st}}{t^{k(d-2)}} = \sum_{k=0}^{\infty} k! d_{2k} \left(\frac{es}{k(d-2)} \right)^{k(d-2)}$$

имеют одинаковый порядок роста $\varrho = (d-2)/(d-3+2/\rho)$ и различаются лишь типом. Максимальный член последнего ряда соответствует индексу $k(s) \sim s^\varrho$, поэтому ограничение суммирования диапазоном $k < s$ не влияет на асимптотику при $\varrho < 1$, что равносильно $\rho < 2$. Напротив, при $\rho > 2$ оборванный ряд ведет себя при $s \rightarrow \infty$ как $e^{(1-2/\rho)s \ln s}$. В частности, все целые функции массивного поля с конечным порядком роста корректно определены на любом пространстве S^β с индексом $\beta < 1$ и даже на S^b , где $b(s) = s(\ln(1+s))^\gamma$, $\gamma > 1$, в то время как в безмассовом случае универсальным пространством для реализации целых функций конечного порядка служит более узкое пространство $S^{1-1/(d-2)}$.

7. ВИКОВЫ РЯДЫ ДВУМЕРНОГО БЕЗМАССОВОГО ПОЛЯ

Рассмотрим наиболее простой пример поля с сингулярным инфракрасным поведением, квантование которого требует введения индефинитной метрики (см. [3]). Построение его нормальной экспоненты с точным описанием функциональной области определения выполнено Пьеротти [4]. Здесь мы охарактеризуем пробные функции, требуемые для реализации виковых целых функций этого поля с порядком роста $\rho < 2$. При $d = 2$ сингулярное выражение $2\pi\theta(p^0)\delta(p^2)$ имеет ясный смысл на подпространстве $S_\bullet \subset S$, состоящем из функций, равных нулю при $p = 0$, и в конусных переменных $u = p_0 + p_1$, $v = p_0 - p_1$ записывается как $\pi(\theta(u)u^{-1}\delta(v) + \theta(v)v^{-1}\delta(u))$. Его лоренц-инвариантное продолжение на S имеет вид

$$\pi(u_+^{-1}\delta(v) + v_+^{-1}\delta(u)) + c\delta(u)\delta(v), \quad (43)$$

где

$$u_+^{-1}(f) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_0^\infty f'(u) \ln u \, du,$$

и не является положительно-определенным ни при каком значении константы c . Совершая преобразование Лапласа, получаем

$$w(z) = -\frac{1}{4\pi} \ln(-\kappa^2 z^2) \quad (\text{Im } z \in \mathbb{V}_-),$$

где κ – произвольный масштабный параметр, точная связь которого с константой c в (43) несущественна. Пусть $h \in S$, $\hat{h}(0) = 1$. Тогда $\hat{f}_0 = \hat{f} - \hat{f}(0)\hat{h} \in S_\bullet$. Обозначим

$$\langle f, g \rangle = \int \bar{f}(x) w(x - x') g(x) dx dx'$$

и положим $\langle h, h \rangle = 0$, что обеспечивается подходящим масштабным преобразованием. Тогда

$$\langle f, g \rangle = \langle f_0, g_0 \rangle + \bar{\hat{f}}(0) \langle h, g \rangle + \hat{g}(0) \langle f, h \rangle.$$

Согласно работам [4, 10] w_{maj} определяется равенством

$$\int \bar{f}(x) w_{\text{maj}}(x, x') g(x') dx dx' = \langle f_0, g_0 \rangle + \langle f, h \rangle \langle h, g \rangle + \bar{\hat{f}}(0) \hat{g}(0).$$

Если функция h является вещественной и четной, то явный вид мажоранты таков:

$$w_{\text{maj}}(x, x') = w(x - x') + (w_h(x) - 1)(w_h(-x) - 1),$$

где $w_h = w * h$. Пусть $\text{Im } z = -te_0$, $e_0 = (1, 0)$, $t > 0$. Тогда $t^2 \leq |z^2|$. С другой стороны, $|z^2| \leq 2|z|^2$ и, следовательно, $|\ln(-z^2)| \leq C + 2 \ln(1 + |z|) + 2 \ln^+(1/t)$, где $\ln^+(\cdot) = \max(0, \ln(\cdot))$. Пусть $h \in S^0$. Тогда w_h – целая функция, удовлетворяющая при указанных $\text{Im } z$ оценке $|w_h(z)| \leq C + C' \ln(1 + |z|)$, которая легко выводится с помощью представления

$$w_h(z) = \int h(\xi + ie_0) w(z - \xi - ie) d\xi$$

и неравенства $1 + |z - \xi| \leq (1 + |z|)(1 + |\xi|)$. Таким образом, в данном случае можно взять

$$w_{\text{IR}}(r) = (\ln(1 + r))^2, \quad w_{\text{UV}}(t) = \ln^+\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ясно, что функциональной областью определения любой виковой целой функции порядка $\rho < 2$ при этом может служить пространство S_α^β со сколь угодно большими α, β . Нетрудно получить и более точное описание. При коэффициентах d_k вида (42) имеют место неравенства

$$\sum_k L^k k! d_{2k} w_{\text{IR}}(r)^k \leq C e^{N(\ln(1+r))^{2\rho/(2-\rho)}},$$

$$\inf_{t>0} e^{st} \sum_k L^k k! d_{2k} w_{\text{UV}}(t)^k \leq C e^{N(\ln(1+s))^{\rho/(2-\rho)}},$$

где N зависит от L и инфимум оценен значением функции в точке $t = 1/s$, что на самом деле не ведет к огрублению результата. В частности, если $\rho \leq 2/3$, то условия (35) соблюдаются с $a(r) = (1 + r)^N$ и $b(s) = 1 + s$. Значит, при таком росте операторная реализация возможна с пробными функциями из пространства Шварца S , в чем убеждаемся, взяв в качестве исходной функциональной области определения S^0 и используя аналог леммы 3 для простейшего случая продолжения $u \in S'_0$ на S , а именно: такое продолжение заведомо существует, если $|(u * g)(p)| \leq C_B \|g\|_{B, N} (1 + |p|)^N$ при некоторых B и N .

При $2/3 < \rho \leq 1$ поведение по s по-прежнему полиномиально ограничено, но по r — уже нет и характеризуется функцией $e^{(\ln(1+r))^\alpha}$, где $\alpha = 2\rho/(2-\rho)$. Если $\alpha < 2$ (т.е. $\rho < 1$), то функция со столь медленным ростом не может служить индикаторной, ибо не удовлетворяет условию (18). Пространство S_a , где $a = e^{(\ln(1+r))^2}$, является уже приемлемым и согласно теореме 2 может служить функциональной областью определения при любом $\rho < 1$. При $\rho = 1$ и конечном типе роста ряд (13) сходится на функциях из S_{a_N} , где $a_N = e^{N(\ln(1+r))^2}$ и N растет с увеличением n . Поэтому адекватным будет пространство $\mathcal{P}_2 = \bigcap_N S_{a_N}$, состоящее из гладких функций, для которых конечны нормы

$$\|f\|_N = \sup_x \max_{|\kappa| \leq N} |\partial^\kappa f(x)| e^{N(\ln(1+r))^2} \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Оно относится к пространствам класса $K(M_N)$, теория которых изложена в книге [8]. При $\rho > 1$ естественно использовать пространства

$$\mathcal{P}_\alpha^\beta = \bigcap_{N=0}^{\infty} S_{a_{\alpha,N}}^{b_{\beta,N}},$$

где

$$a_{\alpha,N}(r) = e^{N(\ln(1+r))^\alpha}, \quad b_{\beta,N}(s) = e^{N(\ln(1+s))^\beta} \quad (\alpha, \beta \geq 2).$$

В итоге получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Пусть ϕ — свободное скалярное безмассовое поле в пространстве-времени размерности 2. Функциональной областью определения его нормально упорядоченных целых функций с порядком роста $\rho < 2$ и конечным типом могут служить

- пространство Шварца S при $\rho \leq 2/3$;
- пространство $\mathcal{P}_2$ для всех функций экспоненциального типа;
- пространство $\mathcal{P}_{2\rho/(2-\rho)}^2$ при $1 < \rho \leq 4/3$;
- пространство $\mathcal{P}_{2\rho/(2-\rho)}^{\rho/(2-\rho)}$ при $4/3 < \rho < 2$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказанные теоремы сводят нахождение функциональной области определения нормально упорядоченных степенных рядов свободного поля к оценке скорости роста и порядка сингулярности гильбертовой мажоранты его двухточечной функции. Если адекватное пространство пробных функций содержит функции с компактным носителем и в координатном, и в импульсном представлениях, то предел викова ряда удовлетворяет основным требованиям общей теории квантованных полей [11] практически очевидным образом, поскольку операторная реализация построена нами непосредственно в пространстве состояний исходного свободного поля. Однако условие локализуемости в импульсном пространстве, как правило, не соблюдается для точных решений калибровочных моделей в ковариантной калибровке общего вида [5, 6], и участвующие в них виковы ряды определены лишь на тех пробных функциях, фурье-образы которых аналитичны. Формулировка спектрального условия и проверка его соблюдения оказываются при этом нетривиальной задачей [6, 14], тем более интересной, что ее решение инструктивно

для правильного обобщения теоремы реконструкции и евклидовой теории Остервальдера–Шрадера на квантовую теорию с инфракрасно сингулярной индефинитной метрикой, где представление группы Пуанкаре реализуется псевдоунитарными операторами. Авторы предполагают исследовать этот круг вопросов в отдельной работе. Другая интересная задача, которую также позволяет решить развитый здесь подход, заключается в нелокальном расширении классов эквивалентности Борхерса и доказательстве соблюдения для нелокальных виковых рядов свободного поля с положительной метрикой условия асимптотической коммутативности [15], обеспечивающего сохранение основных физических следствий в нелокальной квантовой теории поля.

Благодарности. Авторы признательны за финансовую поддержку, оказанную работе грантами РФФИ-99-01-00376 и INTAS-96-0308.

Список литературы

- [1] *A. Jaffe.* Ann. Phys. 1965. V. 32. P. 127.
- [2] *A. Rieckers.* Int. J. Theor. Phys. 1971. V. 4. P. 55.
- [3] *A. S. Wightman.* Adv. Math. Suppl. Stud. B. 1981. V. 7. P. 769.
- [4] *D. Pierotti.* Lett. Math. Phys. 1988. V. 15. P. 219.
- [5] *U. Moschella, F. Strocchi.* Lett. Math. Phys. 1992. V. 24. P. 103.
- [6] *U. Moschella.* J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 535.
- [7] *M. A. Soloviev.* Lett. Math. Phys. 1997. V. 41. P. 265.
- [8] *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев.* Обобщенные функции. Т. 2. М.: Физматгиз, 1958.
- [9] *M. A. Soloviev.* Beyond the theory of hyperfunctions. In: Developments in Mathematics: The Moscow School. Eds. V. Arnold, M. Monastyrsky. London: Chapman and Hall, 1993. P. 131.
- [10] *G. Morchio, F. Strocchi.* Ann. Inst. H. Poincaré. A. 1980. V. 33. P. 251.
- [11] *Н. Н. Боголюбов, А. А. Лозгунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [12] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [13] *Х. Шефер.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
- [14] *М. А. Соловьев.* ТМФ. 1995. Т. 105. С. 405.
- [15] *М. А. Соловьев.* ТМФ. 1999. Т. 121. С. 139.

Поступила в редакцию 6.XII.1999 г.