Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. К. Манкас, С. Р. Чудхури, Новый вариационный подход к пульсирующим солитонам в уравнении Гинзбурга–Ландау для потенциала в виде кубики–квинтики, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 2, 339–355

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6091>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:52:55

© 2007 г.

С. К. Манкас*, С. Р. Чудхури*

НОВЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПУЛЬСИРУЮЩИМ СОЛИТОНАМ В УРАВНЕНИИ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА В ВИДЕ КУБИКИ–КВИНТИКИ

С помощью комплексного численного моделирования импульсных решений уравнения Гинзбурга–Ландау для потенциала в виде кубики–квинтики обнаружены различные занимательные и совершенно новые классы решений. В частности, имеются пять новых категорий импульсных решений или решений в виде уединенных волн, а именно пульсирующие, ползучие, извивающиеся, извергающиеся и хаотические солитоны, нестационарные во времени. Они представляют собой пространственно-ограниченные структуры импульсного типа, огибающие которых демонстрируют сложную временную динамику. Кроме того, при варьировании параметров уравнений Гинзбурга–Ландау в виде кубики–квинтики с помощью численного моделирования обнаружены очень интересные бифуркационные последовательности этих импульсов. Рассматриваются вопросы, представляющие наибольший интерес в данной области, а именно условия возникновения пяти категорий диссипативных солитонов, а также зависимость их формы и устойчивости от различных параметров уравнений Гинзбурга–Ландау в виде кубики–квинтики – нелинейности, дисперсии, линейного и нелинейного усиления, потерь и спектральной фильтрации. Предсказания относительно изменения амплитуд, ширин и периодов солитонов в зависимости от параметров этих уравнений согласуются с результатами численного моделирования. Представлены подробные результаты, полученные для пульсирующих уединенных волн – режимы их возникновения, бифуркации, параметрические зависимости амплитуд, ширин и периодов согласуются с результатами численного моделирования. Извивающиеся и хаотические солитоны будут рассмотрены в последующих работах. Предложенный общий подход не работает только в отношении диссипативных солитонов одной из категорий, а именно взрывающихся, или извергающихся, солитонов.

Ключевые слова: вариационный формализм, комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау, пульсирующие солитоны.

*Department of Mathematics, University of Central Florida, Orlando, FL 32816–1364.
E-mail: smancas@mail.ucf.edu, choudhur@longwood.cs.ucf.edu

1. ВВЕДЕНИЕ

Комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау (КУГЛ) для потенциала в виде кубики–квинтики представляет собой каноническое уравнение, описывающее слабо нелинейное поведение диссипативных систем в широком диапазоне дисциплин [1]. В механике жидкости его также часто называют уравнением Ньюэлла–Уайтхеда в честь авторов, которые вывели его в контексте бенардовской конвекции [1], [2].

Как таковое, КУГЛ является также одним из наиболее широко изучаемых нелинейных уравнений. Обзор многих основных свойств этого уравнения и его решений приведен в работах [3], [4]; кроме того, там можно найти его применения к разнообразным явлениям, включая нелинейные волны, фазовые переходы второго рода, сверхпроводимость, сверхтекучесть, бозе–эйнштейновский конденсат, жидкие кристаллы и теорию струн. Численные исследования, выполненные в работах [5], [6], где прежде всего рассматривались периодические распространяющиеся волновые решения кубического КУГЛ с вторичными вилообразными бифуркациями и каскадами удвоения периода в беспорядочных турбулентных режимах, дают также комплексное обобщение других работ из этой области. Кроме того, для нашей работы представляют интерес общего характера ранние численные расчеты [7], [8] и теоретические исследования [9], [10] периодических решений и вторичных бифуркаций.

Для некоторых ситуаций или явлений таких, как те, где кубический нелинейный член близок к нулю, может потребоваться включение нелинейностей высшего порядка, что приводит к так называемому уравнению Гинзбурга–Ландау для потенциала в виде кубики–квинтики. Оказалось, что оно демонстрирует широкое разнообразие поведения решений. В частности, в относительно раннем и имевшем большое значение обзоре [11], который был недавно обобщен на случай двух взаимодействующих КУГЛ с кубическим потенциалом [12], [13], рассматриваются аргументы, основанные на расчетах в фазовой плоскости для когерентных структур бегущей волны, некоторые аналитические и пертурбативные решения, ограниченные сравнения с численными расчетами, а также так называемый “линейный анализ маргинальной устойчивости” для выбора фазовой скорости бегущих волн.

Среди множества результатов других работ мы сошлемся только на два направления, имеющие непосредственное отношение к исследованиям, проведенным в нашей статье. В публикациях, соответствующих первому направлению [14]–[18], используется техника динамических систем для доказательства того, что КУГЛ для потенциала в виде кубики–квинтики допускает периодические и квазипериодические решения в виде бегущей волны.

В работах, соответствующих второму направлению [19], [20], где главным образом используется численное моделирование полного дифференциального уравнения Гинзбурга–Ландау в частных производных для потенциала в виде кубики–квинтики в контексте нелинейной оптики, обнаружены различные ветви плосковолновых решений, на которые в оптической литературе ссылаются как на непрерывные волновые решения. Более важным является то, что в этих исследованиях также найдены разнообразные пространственно-ограниченные когерентные структуры, соответствующие дифференциальным уравнениям в частных производных (ДУЧП), при-

чем огибающие демонстрируют сложную временную динамику. В работе [20] эти разнообразные структуры в зависимости от временного поведения огибающих распределены по категориям как простые импульсы (или регулярные стационарные решения), пульсирующие уединенные волны, ползучие, медленно или быстро извивающиеся солитоны, извергающиеся солитоны и хаотические солитоны. Кроме того, заметим, что скорость решений для новых категорий может быть равной нулю, постоянной или периодической (поскольку скорость определяется граничными условиями, она является собственным значением и также в принципе может быть квазипериодической или хаотической, хотя о таких случаях не сообщалось).

Все указывает на то, что в гамильтоновых системах подобные категории решений, имеющие изменяющиеся во времени амплитуды, не существуют как устойчивые структуры. Даже если амплитудно-модулированные уединенные волны изначально возбуждены, то они преобразуются в регулярные стационарные решения [21]. Исключения из этого правила составляют интегрируемые модели, где пульсирующие структуры являются нелинейными суперпозициями или фундаментальными решениями [22].

Таким образом, подобные классы решений являются новыми и существуют только при наличии диссипации, как было показано в численных исследованиях, проведенных в работе [20]. Кроме того, найдены вторичные полные каскады удвоения периода пульсирующих солитонов, приводящие, как обычно, к режимам хаоса. Эта последняя особенность численных решений полных ДУЧП для потенциала в виде кубики–квинтики сильно напоминает каскады удвоения периода, полученные в работах [5], [6] для периодических решений в виде распространяющихся волн, редуцированных обыкновенными дифференциальными КУГЛ для потенциала в виде кубики.

В этом контексте заметим, что были предприняты многочисленные попытки распространения хорошо развитой концепции взаимодействия солитонов в интегрируемых консервативных системах [23] на более реалистичные активные или диссипативные среды, описываемые уравнениями неинтегрируемых моделей. Причина этого в том, что сложная пространственно-временная динамика таких когерентных структурных решений описывается простыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или низкоразмерными динамическими системами, а не исходной сложной моделью нелинейных ДУЧП. Поэтому для этих ОДУ может оказаться существенным применение различных теоретических подходов.

Имеются ситуации [11], [23]–[25], когда такой подход работает, особенно тогда, когда динамика различных активных или диссипативных систем в первую очередь описывается локализованными когерентными структурами такими, как импульсы (уединенные волны) и кинки (фронтальные или ударные волны). Такие когерентные структуры могут так же, как и в оптике, быть носителями информации. Поскольку такие структуры соответствуют пространственным модуляциям, о них часто говорят также как о пространственно-локализованных “паттернах”. При взаимодействии когерентных структур их скорости и положения могут сложным образом изменяться, но их пространственная когерентность при этом сохраняется. Соблазнительно

применить такой подход к любой системе, допускающей импульсные и/или кинковые решения, однако здесь требуется осторожность. Если когерентные структуры не устойчивы к небольшим возмущениям в их окрестностях, то они могут исчезнуть в течение короткого промежутка времени. Кроме того, в результате отбора по аналогичным соображениям устойчивости могут остаться только некоторые из них.

Кратко суммируя, можно сказать, что результаты численного моделирования для диссипативных солитонов [20], [26] указывают на следующее:

а) есть пять новых категорий устойчивых амплитудно-модулированных решений, уникальных для диссипативных систем;

б) имеются интересные бифуркационные последовательности этих решений при варьировании параметров.

Кроме того, огромный интерес [26] представляет вопрос воздействия параметров системы (таких, как дисперсия, нелинейность, линейное и нелинейное усиление и потери, спектральная фильтрация) как на структуру, так и на устойчивость новых категорий диссипативных солитонов. Последняя особенность многократно упоминалась на сессии по диссипативным солитонам на IV конференции IMACS по нелинейным волнам, которая проводилась в Афинах (Джорджия, США) в апреле 2005 г.

Все сказанное выше определяет основные темы исследований настоящей работы. Мы сосредоточимся на вопросах, вызывающих особенный интерес в данной области. Это условия возникновения пяти категорий диссипативных солитонов, а также зависимость их формы и устойчивости от параметров, характеризующих нелинейность, дисперсию, линейное и нелинейное усиление, потери и спектральную фильтрацию.

В разделе 3 мы развиваем и обсуждаем вариационный формализм, в рамках которого исследуются различные категории диссипативных солитонов. Как было упомянуто, это представляет собой важное обобщение более ранних формулировок в нескольких ключевых аспектах. Во-первых, исходные формулировки лагранжиана были предложены только недавно [27] и еще недостаточно хорошо исследованы. Кроме того, после широких обсуждений с проф. Д. Каупом пробные функции были существенным образом обобщены по сравнению со стандартным вариантом для сохранения их относительно простого вида (и интегрируемости пробных функций), но в то же время были разрешены произвольные изменения амплитуды, ширины, положения, скорости и фазы импульса во времени. Кроме того, получающиеся уравнения Эйлера–Лагранжа также трактуются по-новому. Вместо рассмотрения устойчивых неподвижных точек, соответствующих хорошо известным стационарным солитонам или простым импульсам, мы используем теорию динамических систем для того, чтобы сосредоточиться на более сложных аттракторах таких, как периодические, квазипериодические и хаотические. Периодическая эволюция параметров пробной функции к устойчивому периодическому аттрактору приводит к солитонам, амплитуды которых являются нестационарными или зависящими от времени. В частности, пульсирующие, извивающиеся и, что несколько сложнее, ползучие диссипативные солитоны можно рассматривать с использованием устойчивых периодических аттракторов при различных значениях параметров пробных функ-

ций. Хаотическая эволюция параметров пробных функций приводит к появлению хаотических уединенных волн. Такой подход не работает только в отношении пятой категории диссипативных солитонов таких, как взрывающиеся, или извергающиеся, солитоны.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы проясняем новый механизм, отвечающий за различные классы решений в виде пульсирующих уединенных волн в диссипативных системах, например, возможность бифуркаций Хопфа. Это также объясняет отсутствие пульсирующих уединенных волн в гамильтоновых и интегрируемых системах. В разделе 3 подробно рассказывается о недавно предложенной вариационной формулировке для диссипативных систем, а также о применении новых обобщенных пробных функций при моделировании пульсирующих уединенных волн. Бифуркации Хопфа в уравнениях Эйлера–Лагранжа, приведенных в разделе 3, подробно рассматриваются в разделе 4. Периодическая эволюция параметров пробных функции к устойчивым периодическим аттракторам, которые получаются из суперкритических бифуркаций Хопфа, если их подставить обратно в пробную функцию, приводят к пульсирующим уединенным волнам. В рамках такого подхода мы также комплексно исследуем каскад удвоения периода бифуркаций, наблюдаемый при численном моделировании КУГЛ, и влияние различных параметров КУГЛ на форму (амплитуду, ширину и период) и область существования пульсирующих уединенных волн. В разделе 5 приведены разнообразные результаты численного моделирования простых пульсирующих солитонов, а в разделе 6 подводится итог и делаются заключения.

2. ОТСУТСТВИЕ БИФУРКАЦИЙ ХОПФА В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ: СВЯЗЬ С ПУЛЬСИРУЮЩИМИ СОЛИТОНАМИ

Мы будем рассматривать КУГЛ для потенциала в виде кубики–квинтики вида [11]

$$\partial_t A = \epsilon A + (b_1 + ic_1)\partial_x^2 A - (b_3 - ic_3)|A|^2 A - (b_5 - ic_5)|A|^4 A. \quad (2.1)$$

Заметим, что любые три коэффициента (такие, что никакие два не относятся к одному и тому же слагаемому) могут быть положены равными единице с помощью подходящих перенормировок времени, координат и A .

Неоднократно сообщалось [21], [28] и в целом признано, что как гамильтоновы системы, так и подкласс интегрируемых систем не допускают решений в виде пульсирующих уединенных волн. Если пульсирующие солитоны исходно возбуждены, то в гамильтоновых и интегрируемых системах они сами меняют свою форму и превращаются в регулярные стационарные волны. Единственными исключениями являются пульсирующие структуры в интегрируемых системах, включающие в себя нелинейные суперпозиции стационарных солитонов [22].

Кроме того, режимы, соответствующие пульсирующим солитонам в КУГЛ, очень далеки от предела интегрируемого нелинейного уравнения Шредингера. Этот факт, а также огромное разнообразие пульсирующих солитонов в КУГЛ указывают на новый механизм, действующий в диссипативных системах при рождении этих пульсирующих структур.

Важнейший момент настоящей работы заключается в том, что новым механизмом, ответственным за возникновение пульсирующих солитонов в диссипативных системах, являются бифуркации Хопфа, и с помощью этого механизма мы проанализируем как простые пульсирующие, так и извивающиеся солитоны. Однако для установления того факта, что бифуркации Хопфа действительно представляют собой работающий механизм, создающий в диссипативных системах различные пульсирующие солитоны, мы сначала обратимся к доказательству их отсутствия в гамильтоновых системах. Доказательство отсутствия бифуркаций Хопфа, возможно, могло бы объяснить упомянутое выше отсутствие пульсирующих солитонов в гамильтоновых и интегрируемых системах.

Для гамильтоновой системы с гамильтонианом H частные эволюционные уравнения могут быть представлены в каноническом виде [29]:

$$i\Psi_\zeta = \frac{\delta H}{\delta\Psi^*}, \quad i\Psi_\zeta^* = -\frac{\delta H}{\delta\Psi}. \quad (2.2)$$

Их можно далее скомбинировать в уравнение

$$i\dot{\vec{x}} = L\nabla_{\vec{x}}H(\vec{x}), \quad (2.3)$$

где точкой обозначена $\delta/\delta\zeta$,

$$\vec{x} = [\Psi, \Psi^*], \quad (2.4)$$

I – единичная $(n \times n)$ -матрица, а $L\nabla$ – симплектический градиент $H(\vec{x})$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.3) следует из

$$i \begin{pmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{\Psi}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{\Psi}H \\ \nabla_{\Psi^*}H \end{pmatrix},$$

что тождественно (2.2).

Неподвижные (или равновесные, или критические) точки уравнения (2.3) удовлетворяют уравнению

$$\nabla_{\vec{x}}H(\vec{x}) = 0 \quad (2.6)$$

или, эквивалентно,

$$\frac{\delta H}{\delta\Psi^*} = 0, \quad \frac{\delta H}{\delta\Psi} = 0.$$

Используя стандартное представление для гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}\langle\Psi_\zeta, \Psi_\zeta\rangle + V(\Psi), \quad (2.7)$$

получаем

$$\vec{\nabla}_\Psi V = 0$$

или

$$\frac{\delta V}{\delta \Psi} = 0. \quad (2.8)$$

В неподвижной точке $\vec{x}_0 = [\Psi_0, \Psi_0^*]$ матрица Якоби уравнения (2.3) имеет вид

$$J(\vec{x}_0) = L\mathcal{H}, \quad (2.9)$$

где

$$\mathcal{H} \equiv \left[\frac{\delta^2 H}{\delta x_i \delta x_j} \right]_{\vec{x}_0} = \begin{pmatrix} \mathcal{V} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

из выражения (2.7). Здесь

$$\mathcal{V} = \left[\frac{\delta^2 V}{\delta \Psi_i \delta \Psi_j} \right]_{\vec{x}_0}. \quad (2.11)$$

Таким образом, имеем

$$J(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{V} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{V} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

собственные значения λ которого удовлетворяют характеристическому уравнению

$$|\mathcal{V} + \lambda^2 I| = 0. \quad (2.13)$$

Поскольку матрица $\mathcal{V}$ симметрична, ее собственные значения вещественны, а решения λ уравнения (2.13) являются тогда или вещественными, или чисто мнимыми. Таким образом, как утверждалось ранее, в гамильтоновых системах не могут возникнуть бифуркации Хопфа. Введение диссипации разрешает возникновение бифуркаций Хопфа и, как мы покажем в оставшейся части работы, вводит различные структуры вида пульсирующих уединенных волн, возникающих в КУГЛ.

3. ОБОБЩЕННАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА

В этом разделе мы разовьем общую вариационную формулировку для рассмотрения пульсирующих солитонов во всем диапазоне изменения параметров. Как было упомянуто ранее, нам требуется обобщить предыдущие вариационные подходы несколькими ключевыми способами.

Во-первых, исходная формулировка лагранжиана для диссипативных нелинейных ОДУ была дана относительно недавно [27], пока еще не так известна и широко не используется. Мы благодарны проф. Д. Каупу за то, что он указал нам на это. Альтернативная сложная формулировка лагранжиана для диссипативных нелинейных ОДУ была недавно использована в работе [30] только для исследования обычных стационарных солитонов.

Следуя работе [27], лагранжиан для КУГЛ для потенциала в виде кубики–квинтики (2.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & r^* [\partial_t A - \epsilon A - (b_1 + ic_1) \partial_x^2 A + (b_3 - ic_3) |A|^2 A + (b_5 - ic_5) |A|^4 A] + \\ & + r [\partial_t A^* - \epsilon A^* - (b_1 - ic_1) \partial_x^2 A^* + (b_3 + ic_3) |A|^2 A^* + (b_5 + ic_5) |A|^4 A^*]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь r – обычная вспомогательная переменная, использовавшаяся в работе [27]; она удовлетворяет пертурбативному эволюционному уравнению, дуальному к КУГЛ, в котором все негамильтоновы члены взяты с противоположным знаком.

Второе ключевое допущение использует пробные функции $A(t)$ и $r(t)$, существенным образом обобщенные по сравнению со стандартными с целью сохранения их относительно простого вида и интегрируемости. Для этого выберем пробную функцию в виде функции с одним горбом,

$$A(x, t) = A_1(t) e^{-\sigma_1(t)^2 [x - \phi_1(t)]^2} e^{i\alpha_1(t)}, \quad (3.2)$$

$$r(x, t) = e^{-\sigma_2(t)^2 [x - \phi_2(t)]^2} e^{i\alpha_2(t)}. \quad (3.3)$$

Здесь $A_1(t)$ – амплитуда, $\sigma_i(t)$ – обратные ширины, $\phi_i(t)$ – координаты ($\phi_i(t)/t$ – фазовые скорости, $\dot{\phi}_i(t)$ – скорости), а $\alpha_i(t)$ – фазы солитонов. Все эти величины могут произвольным образом изменяться во времени. Для простоты опустим пока чирповый член ($e^{i\beta(t)x^2}$). Подставляя (3.2) и (3.3) в (3.1), получим выражение для эффективного или усредненного лагранжиана:

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dx = 2\sqrt{\pi} \Bigg\{ & - \frac{e^{-\{\sigma_1(t)^2 \sigma_2(t)^2 [\phi_1(t) - \phi_2(t)]^2\} / \{\sigma_1(t)^2 + \sigma_2(t)^2\}}}{[\sigma_1(t)^2 + \sigma_2(t)^2]^{1/2}} \times \\ & \times \epsilon A_1(t) \cos[\alpha_1(t) - \alpha_2(t)] + \\ & + \frac{e^{-\{3\sigma_1(t)^2 \sigma_2(t)^2 [\phi_1(t) - \phi_2(t)]^2\} / \{3\sigma_1(t)^2 + \sigma_2(t)^2\}}}{[3\sigma_1(t)^2 + \sigma_2(t)^2]^{1/2}} \times \\ & \times A_1(t)^3 [b_3 \cos[\alpha_1(t) - \alpha_2(t)] + c_3 \sin[\alpha_1(t) - \alpha_2(t)]] + \\ & + \frac{e^{-\{5\sigma_1(t)^2 \sigma_2(t)^2 [\phi_1(t) - \phi_2(t)]^2\} / \{5\sigma_1(t)^2 + \sigma_2(t)^2\}}}{[5\sigma_1(t)^2 + \sigma_2(t)^2]^{1/2}} \times \\ & \times A_1(t)^5 [b_5 \cos[\alpha_1(t) - \alpha_2(t)] + c_5 \sin[\alpha_1(t) - \alpha_2(t)]] + \\ & + \frac{e^{-\{\sigma_1(t)^2 \sigma_2(t)^2 [\phi_1(t) - \phi_2(t)]^2\} / \{\sigma_1(t)^2 + \sigma_2(t)^2\}}}{[\sigma_1(t)^2 + \sigma_2(t)^2]^{5/2}} \times \\ & \times [\cos[\alpha_1(t) - \alpha_2(t)] [\sigma_1(t)^2 + \sigma_2(t)^2]^2 \dot{A}_1(t) + \\ & + A_1(t) (-2\sigma_1(t)^2 \sigma_2(t)^2 [b_1 \cos[\alpha_1(t) - \alpha_2(t)] - \\ & - c_1 \sin[\alpha_1(t) - \alpha_2(t)]] [-\sigma_2(t)^2 + \sigma_1(t)^2 [-1 + 2\sigma_2(t)^2 [\phi_1(t) - \phi_2(t)]^2]] - \\ & - \dot{\alpha}_1(t) \sin[\alpha_1(t) - \alpha_2(t)] [\sigma_1(t)^2 + \sigma_2(t)^2]^2 - \\ & - \sigma_1(t) \dot{\sigma}_1(t) \cos[\alpha_1(t) - \alpha_2(t)] [\sigma_1(t)^2 + \sigma_2(t)^2 + 2\sigma_2(t)^4 [\phi_1(t) - \phi_2(t)]^2] - \\ & - 2\dot{\phi}_1(t) \sigma_1(t)^2 \sigma_2(t)^2 [\phi_1(t) - \phi_2(t)] [\sigma_1(t)^2 + \sigma_2(t)^2] \cos[\alpha_1(t) - \alpha_2(t)]] \Bigg\}. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Поскольку, как видно из (3.4), существенна только относительная фаза $\alpha(t) = \alpha_1(t) - \alpha_2(t)$ функций $A(x, t)$, а также $r(x, t)$, будем без потери общности считать,

что

$$\alpha_1(t) = \alpha(t), \quad \alpha_2(t) = 0. \quad (3.5)$$

Кроме того, для обеспечения возможности алгебраического анализа мы нашли необходимым положить

$$\sigma_2(t) = m\sigma_1(t) \equiv m\sigma(t). \quad (3.6)$$

Поскольку это выражение связывает ширины полей $A(x, t)$ и $r(x, t)$, а поле $r(x, t)$ не имеет существенного физического значения, мы можем примириться с потерей общности.

Исходя из соображений алгебраической простоты, можно также изменить масштаб координат согласно формулам

$$\phi_1(t) = \phi(t), \quad \phi_2(t) = 0, \quad (3.7)$$

хотя такое допущение легко ослабить. На самом деле можно ожидать, что для некоторых категорий диссипативных солитонов потребуется ослабление допущения (3.7).

Наконец, для вещественных решений (заметим, что численные результаты, полученные в работах [20], [26], относятся к $|A(x, t)|$) при желании можно сделать дополнительное допущение

$$\alpha(t) = 0, \quad (3.8)$$

хотя его также легко ослабить.

Таким образом, используя все допущения (3.5)–(3.7), можно записать эффективный лагранжиан (3.4) в более простом, но по-прежнему общем виде:

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} = 2\sqrt{\pi} \Bigg\{ & \frac{A_1(t)}{\sigma(t)} \left[-\frac{e^{-\{m^2\sigma(t)^2\phi(t)^2\}/(1+m^2)}}{[1+m^2]^{1/2}} \epsilon \cos \alpha(t) + \right. \\ & + \frac{e^{-\{3m^2\sigma(t)^2\phi(t)^2\}/(3+m^2)}}{[3+m^2]^{1/2}} A_1(t)^2 [b_3 \cos \alpha(t) + c_3 \sin \alpha(t)] + \\ & + \frac{e^{-\{5m^2\sigma(t)^2\phi(t)^2\}/(5+m^2)}}{[5+m^2]^{1/2}} A_1(t)^4 [b_5 \cos \alpha(t) + c_5 \sin \alpha(t)] \Bigg] + \\ & + \frac{e^{-\{m^2\sigma(t)^2\phi(t)^2\}/(1+m^2)}}{[1+m^2]^{5/2}\sigma(t)^2} \left[(1+m^2)^2 \cos \alpha(t) \sigma(t) \dot{A}_1(t) - \right. \\ & - A_1(t) \left(4m^4 \sigma(t)^5 \phi(t)^2 [b_1 \cos \alpha(t) - c_1 \sin \alpha(t)] + \right. \\ & + (1+m^2)^2 \sigma(t) \dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) + (1+m^2) \dot{\sigma}(t) \cos \alpha(t) - \\ & - 2m^2(1+m^2) \sigma(t)^3 [b_1 \cos \alpha(t) - c_1 \sin \alpha(t)] + \\ & \left. \left. + 2m^4 \dot{\sigma}(t) \sigma(t)^2 \phi(t)^2 + \dot{\phi}(t) \phi(t) \cos \alpha(t) \right) \right] \Bigg\}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

4. ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА ДЛЯ ПУЛЬСИРУЮЩИХ СОЛИТОНОВ

4.1. Вариационные уравнения. Скорость простых пульсирующих солитонов всегда равна нулю [20], [26], и можно положить

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = 0. \quad (4.1)$$

Однако, вообще говоря, нам нет нужды обращаться к (3.8), поскольку решение уравнения (2.1) должно быть комплексным. Поэтому пробные функции (3.2) и (3.3) принимают вид

$$A(x, t) = A_1(t)e^{-\sigma(t)^2 x^2} e^{i\alpha(t)}, \quad (4.2)$$

$$r(x, t) = e^{-\sigma(t)^2}. \quad (4.3)$$

Подставляя уравнение (4.3) в (3.9) и выбирая $m = 1$, получаем эффективный лагранжиан в упрощенном виде:

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{\pi}}{6\sigma(t)^2} & \left[6A_1(t)^3 \sigma(t) (b_3 \cos \alpha(t) + c_3 \sin \alpha(t)) + \right. \\ & + \sqrt{2} \left(2\sqrt{3} A_1(t)^5 \sigma(t) (b_5 \cos \alpha(t) + c_5 \sin \alpha(t)) + \right. \\ & + 6\dot{A}_1(t) \sigma(t) \cos \alpha(t) - 6A_1(t) \sigma(t) \sin \alpha(t) (c_1 \sigma(t)^2 + \dot{\alpha}(t)) - \\ & \left. \left. - 3A_1(t) \cos \alpha(t) (\dot{\sigma}(t) + 2\epsilon \sigma(t) - 2b_1 \sigma(t)^3) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В выражении для L_{eff} остались три параметра: $A_1(t)$, $\sigma(t)$ и $\alpha(t)$. Варьируя эти параметры для (3.4), получаем

$$\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \star(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{\star}(t)} \right) = 0,$$

где $\star$ обозначает A_1 , σ или α . Для $\dot{\star}(t)$ получаем систему трех уравнений

$$\begin{aligned} \dot{A}_1(t) &= f_1[A_1(t), \sigma(t), \alpha(t)], \\ \dot{\sigma}(t) &= f_2[A_1(t), \sigma(t), \alpha(t)], \\ \dot{\alpha}(t) &= f_3[A_1(t), \sigma(t), \alpha(t)], \end{aligned} \quad (4.5)$$

где f_i – сложные нелинейные функции своих аргументов.

4.2. Бифуркации Хопфа. Общая идея исследования пульсирующих солитонов и их бифуркаций в рамках вариационного подхода состоит в следующем. Уравнения Эйлера–Лагранжа (4.5) рассматриваются по-новому. Вместо рассмотрения устойчивых неподвижных точек, соответствующих хорошо известным стационарным солитонам или простым импульсам, мы используем теорию бифуркаций Хопфа, чтобы сосредоточиться на исследовании периодических аттракторов. Периодическая эволюция параметров пробных функций к устойчивым периодическим аттракторам приводит к появлению пульсирующего солитона, амплитуда которого является нестационарной или зависит от времени.

Выведем условия для временных бифуркаций Хопфа неподвижных точек. Условия для суперкритических временных бифуркаций Хопфа, приводящих к устойчивым периодическим орбитам для $A_1(t)$, $\sigma(t)$ и $\alpha(t)$, можно вычислить, используя метод кратных масштабов. Это такие условия или режимы параметров, которые демонстрируют устойчивые периодические колебания, поэтому устойчивые пульсирующие солитоны будут существовать в рамках нашей вариационной формулировки. Заметим, что, как легко проверить численными расчетами, периодические колебания $A_1(t)$, $\sigma(t)$ и $\alpha(t)$ соответствуют пространственно-временной пульсирующей солитонной структуре величины $|A(x, t)|$, задаваемой выражением (3.2).

Неподвижные точки уравнения (4.5) определяются сложной системой трансцендентных уравнений. Их численное решение дает результаты для каждого частного случая.

Для типичной неподвижной точки характеристический многочлен матрицы Якоби неподвижной точки уравнения (4.5) можно выразить как

$$\lambda^3 + \delta_1 \lambda^2 + \delta_2 \lambda + \delta_3 = 0, \quad (4.6)$$

где δ_i , $i = 1, \dots, 3$, зависят от системы параметров и неподвижных точек. Поскольку аналитические выражения являются исключительно сложными, мы их опустим и будем находить численно по мере необходимости.

Чтобы быть устойчивыми неподвижными точками в рамках линеаризованного анализа, все собственные значения должны иметь отрицательные вещественные части. Используя критерий Рута–Гурвица, получаем, что необходимые и достаточные условия выполнения условия $\text{Re}(\lambda_{1,2,3}) < 0$ для выражения (4.6) имеют вид

$$\delta_1 > 0, \quad \delta_3 > 0, \quad \delta_1 \delta_2 - \delta_3 > 0. \quad (4.7)$$

Наоборот, неустойчивость плосковолнового решения может устанавливаться одним из двух способов. В первом случае один корень уравнения (4.5) (или одно собственное значение якобиана) становится негиперболическим, проходя через нуль при

$$\delta_3 = 0. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8), таким образом, представляет собой условие установления “статической” неустойчивости плоской волны. Несложно выяснить, является ли эта бифуркация вилообразной или транскритической, а также решить вопрос о ее субкритической или суперкритической природе посредством вывода подходящей канонической системы в окрестности точки (4.8), используя любую из многообразия нормальных форм или теорию возмущений.

Установление динамической неустойчивости (“флаттер” на языке прикладной механики) может также происходить, когда пара собственных значений якобиана становится чисто мнимой. Соответствующая бифуркация Хопфа при

$$\delta_1 \delta_2 - \delta_3 = 0 \quad (4.9)$$

приводит к установлению периодических решений уравнения (4.5).

4.3. Влияние параметров системы на форму пульсирующего солитона.

В случае режимов устойчивых периодических решений мы комплексно исследуем:

а) влияние нелинейности, дисперсии, а также линейного и нелинейного спектрального усиления, потерь и фильтрации на форму и структуру пульсирующих солитонов, задаваемых уравнением (3.2);

б) последовательности удвоения периода пульсирующих солитонов, задаваемых уравнением (3.2) при варьировании перечисленных выше параметров системы.

Для изучения влияния параметров системы на форму и устойчивость пульсирующего солитона численно проинтегрируем уравнения (4.2), (4.3) с помощью программы Mathematica для разных наборов значений различных параметров системы в случае режима устойчивых периодических решений. Затем полученные в результате периодические временные ряды для $A_1(t)$, $\sigma(t)$ и $\alpha(t)$ просто подставляются в уравнение (3.2), пространственно-временную структуру которого (зависимость $|A(x, t)|$ от x и t) можно представить графически. При варьировании различных параметров системы в случае устойчивого режима изучается их влияние на амплитуду, ширину и фазу пульсирующего солитона.

4.4. Исследование удвоения периода. Пульсирующие солитоны могут демонстрировать более сложное поведение при изменении одного из параметров. Простые пульсации можно преобразовать с помощью удвоения и учетверения периода при дальнейшем изменении параметра. Эти явления возникают из-за бифуркаций на определенных границах параметрического пространства.

Для изучения бифуркационных последовательностей удвоения периода пульсирующих солитонов мы будем использовать стандартные численные методы диагностики [31]. Другими словами, устойчивый пульсирующий солитон строится аналогично тому, как это было сделано выше для набора параметров, соответствующего устойчивому режиму. Затем мы будем изменять один параметр (“выделенный бифуркационный параметр”) и изучать его влияние на периодические орбиты для $A_1(t)$, $\sigma(t)$ и $\alpha(t)$. Заметим, что если эти периоды удваиваются (или в спектральной плотности мощности появляются субгармоники [31]), то результатом этого должно быть приближенное удвоение временного периода величины $|A(t)|$, задаваемой формулой (3.2). Именно это наблюдали при численном моделировании авторы работы [20], когда при варьировании параметра b_3 плоский пульсирующий солитон испытывал почти удвоение периода. Дальнейшее варьирование параметра b_3 приводило к почти учетверению периода.

В следующем разделе мы реализуем описанную выше процедуру, а также проведем детальное сравнение наших работ с работами [20], [26].

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ПЛОСКОГО ПУЛЬСИРУЮЩЕГО СОЛИТОНА ОБЩЕГО ВИДА

Чтобы получить условия возникновения устойчивости периодических орбит для $A_1(t)$, $\sigma(t)$ и $\alpha(t)$, поступим следующим образом.

Во-первых, зафиксируем набор параметров системы $b_1 = 0.08$, $b_5 = 0.1$, $c_1 = 0.5$, $c_3 = 1$, $c_5 = -0.1$. Затем численно решим систему трансцендентных уравнений (4.5),

которые представляют собой уравнения для неподвижных точек. Согласно условиям Рута–Гурвица, кривая Хопфа определяется как $\delta_1\delta_2 - \delta_3 = 0$. Как мы увидим ниже, это условие вместе с уравнениями для неподвижных точек приводит к установлению периодических решений уравнений (4.5).

На кривой бифуркаций Хопфа мы получаем, что $b_3 = -0.216825$ и $\epsilon = -0.345481$, а неподвижным точкам соответствуют значения $A_1(0) = 0.954712$, $\sigma(0) = 0.917093$ и $\alpha(0) = -0.181274$. Используя эти значения b_3 и ϵ , численно проинтегрируем систему трех ОДУ (4.5) с учетом начальных условий для трех значений неподвижных точек. Возникающие в такой системе бифуркации Хопфа приводят к появлению периодических орбит.

Затем можно построить графики временных рядов периодической орбиты для амплитуды $A_1(t)$, при этом, как и ожидалось, мы замечаем, что амплитуда очень мала, поскольку она пропорциональна квадратному корню расстояния от кривой Хопфа.

Чтобы построить пульсирующие солитоны с достаточно большими амплитудами, необходимо удалиться от кривой Хопфа настолько, насколько это возможно, но в то же время мы должны быть уверены в том, что не вышли за пределы области изменения параметров, в которой существуют пульсирующие солитоны. Этого можно достичь, варьируя один или более параметров системы. В первую очередь мы варьируем ϵ , медленно удаляясь от кривой Хопфа. Повторяя описанную выше процедуру построения плоского пульсирующего солитона, замечаем, что пульсирующий солитон имеет все еще очень малую амплитуду $A_1(t)$ – только порядка 10^{-4} . Поэтому мы начинаем варьировать другой параметр – b_3 , который соответствует кубическому усилению, если принимает отрицательные значения. Получаем, что область существования пульсирующего солитона соответствует области изменений $[-0.2531943, -0.1424]$ параметра b_3 , куда входит значение $b_3 = -0.216825$ для кривой Хопфа. В этом интервале мы варьируем b_3 и исследуем, как это влияет на форму и устойчивость, а также различные бифуркации, потенциально приводящие к удвоению и учетверению периода. При наибольшем значении b_3 , т.е. при $b_3 = -0.1424$, мы численно проинтегрировали три дифференциальных уравнения (4.5) с помощью программы Mathematica и построили график периодической орбиты, показанный на рис. 1.

Затем получающиеся периодические временные ряды для $A_1(t)$ (пунктир), $\sigma(t)$ (сплошная линия) и $\alpha(t)$ (штриховая линия), представленные на рис. 2, просто представляются в выражение (4.2), пространственно-временная структура которого (зависимость $|A(x, t)|$ или фазы $A(x, t)$ от x и t) изображена на рис. 3. Изменяя различные параметры системы c_1, c_3, c_5, b_1, b_5 в пределах устойчивого режима, можно также изучать их влияние на амплитуду, ширину, положение, фазовую скорость (и, что менее важно, фазу) пульсирующего солитона, что и обсуждается ниже.

Теперь рассмотрим более подробно эффект, который оказывает варьирование параметра b_3 . Для выбранных значений параметров системы $b_1 = 0.08$, $b_5 = 0.1$, $c_1 = 0.5$, $c_3 = 1$, $c_5 = -0.1$ и $\epsilon = -0.345481$ для неподвижных точек $A_1(0) = 0.954712$,

Рис. 1. Периодическая орбита для $b_3 = -0.1424$.

Рис. 2. Периодические временные ряды для $b_3 = -0.1424$

Рис. 3. Плоский пульсирующий солитон для $b_3 = -0.1424$

$\sigma(0) = 0.917093$ и $\alpha(0) = -0.181274$ из формул (4.5), (4.9) получаем, что бифуркация Хопфа возникает при $b_{3\text{Hopf}} = -0.216825$.

Во-первых, рассмотрим значения b_3 , большие, чем $b_{3\text{Hopf}}$. При этом имеется устойчивая и жесткая периодическая орбита, которая увеличивается и деформируется по мере того, как b_3 возрастает до значения -0.1424 . Наглядный пример периодической орбиты представлен на рис. 1.

Далее, переходя к значениям, меньшим $b_{3\text{Hopf}}$, мы наблюдаем четкую периодическую орбиту, которая медленно увеличивается в размере по мере того, как b_3 уменьшается. Периодическая орбита, временные ряды и уединенные волны качественно подобны соответствующим характеристикам для случая $b_3 > b_{3\text{Hopf}}$.

Однако при дальнейшем убывании b_3 наблюдается более интересная динамика. Между значениями $b_3 = -0.25$ и $b_3 = -0.2516$ периодическая орбита становится неустойчивой за счет очень быстрого полного каскада удвоения периода бифуркаций. Это согласуется с наблюдавшейся в работе [20] последовательностью удвоения периода для пульсирующих солитонов. Заметим также, что можно проследить полный каскад удвоения периода, используя такие программы, как AUTO или DERPER, или используя схемы, предложенные в работе [32].

Теперь рассмотрим влияние всех различных параметров КУГЛ (2.1) на форму (амплитуду, ширину, период) и устойчивость пульсирующей уединенной волны. Самая интересная особенность заключается в том, что вообще не существует теоретических идей или предсказаний по этому вопросу.

Рассматривая влияние параметров на форму и период уединенной волны, заметим, что волна является пространственно-когерентной структурой (или “коллективной координатой”, задаваемой пробной функцией), параметры которой осциллируют во времени. Поэтому временной период пульсирующего солитона такой же, как и период T колебаний функций $A_1(t)$, $\sigma(t)$ и $\alpha(t)$ в их предельном цикле. Как и для пиковой амплитуды и пиковой ширины пульсирующей волны, эти величины определяются пиковой амплитудой A_{1p} величины $A_1(t)$ и обратной пиковой амплитудой σ_p величины $\sigma(t)$, т.е. в любой момент времени t , когда амплитуда максимальна, ширина минимальна, и наоборот.

Учитывая сказанное выше, будем теперь варьировать параметры КУГЛ. В результате получим, что для пульсирующего солитона они следующим образом влияют на A_{1p} (пиковую амплитуду), σ_p (обратную ширину) и T (временной период):

- а) при возрастании b_1 значения A_{1p} , σ_p и T возрастают;
- б) при возрастании b_5 значения A_{1p} , σ_p и T возрастают;
- в) при возрастании c_1 значения A_{1p} , σ_p и T возрастают;
- г) при возрастании c_3 значения A_{1p} , σ_p и T убывают;
- д) при возрастании c_5 значения A_{1p} , σ_p и T убывают;
- е) при возрастании ϵ значения A_{1p} , σ_p и T убывают.

В этом состоят наши подробные предсказания относительно влияния варьирования параметров КУГЛ на амплитуду, обратную ширину и временную ширину

пульсирующих солитонов. Мы проверили, что каждый из предсказанных результатов а–е согласуется с результатами моделирования, которые получаются при варьировании соответствующего параметра для уединенной волны в случае полного ДУЧП. Заметим также, что $A_1(t)$ и $\sigma(t)$ всегда находятся в фазе, так что A_{1p} и σ_p возникают одновременно. Таким образом, самыми высокими являются самые узкие пульсирующие солитоны. Это полностью согласуется с результатами нашего численного моделирования, а также с результатами работ [20], [21].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Таким образом, мы развили комплексный теоретический формализм для анализа полной пространственно-временной структуры пульсирующих уединенных волн в КУГЛ для потенциала в виде кубики–квинтики. Сюда относятся прояснение механизма, использованного для создания новых категорий солитонов в диссипативных системах, а также объяснение их отсутствия в гамильтоновых и интегрируемых системах, где наблюдалось возникновение только стационарных солитонов.

Кроме того, с учетом общности теоретического формализма, развитого в данной работе, мы также получили основу для детального моделирования извивающихся и хаотических уединенных волн. В этом состоят основные направления исследований, проводимых в данной области.

Благодарности. Мы благодарны Давиду Каупу за чрезвычайно важные замечания, касающиеся вариационной формулировки и солитонной теории возмущений, а также Джанке Янгу и Роберту Камассе за полезный вклад в нашу работу.

Список литературы

- [1] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press, London, 1982.
- [2] P. G. Drazin, W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge Monogr. Mech. Appl. Math., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.
- [3] I. S. Aranson, L. Kramer, *Rev. Mod. Phys.*, **74** (2002), 99.
- [4] C. Bowman, A. C. Newell, *Rev. Mod. Phys.*, **70** (1998), 289.
- [5] L. Brusch, A. Torcini, M. Bär, *Physica D*, **174** (2003), 152.
- [6] L. Brusch, A. Torcini, M. van Hecke, M. G. Zimmermann, M. Bär, *Physica D*, **160** (2001), 127.
- [7] L. R. Keefe, *Stud. Appl. Math.*, **73** (1985), 91.
- [8] M. J. Landman, *Stud. Appl. Math.*, **76** (1987), 187.
- [9] P. K. Newton, L. Sirovich, *Quart. Appl. Math.*, **44** (1986), 49.
- [10] P. K. Newton, L. Sirovich, *Quart. Appl. Math.*, **44** (1986), 367.
- [11] W. van Saarloos, P. C. Hohenberg, *Physica D*, **56** (1992), 303.
- [12] M. van Hecke, C. Storm, W. van Saarloos, *Physica D*, **134** (1999), 1.
- [13] R. Alvarez, M. van Hecke, W. van Saarloos, *Phys. Rev. E*, **56** (1997), R1306.
- [14] P. Holmes, *Physica D*, **23** (1986), 84.
- [15] A. Doelman, *J. Nonlinear Sci.*, **3** (1993), 225.
- [16] A. Doelman, *Physica D*, **53** (1991), 249.
- [17] J. Duan, P. Holmes, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), **38** (1995), 77.
- [18] A. Doelman, *Physica D*, **40** (1989), 156.
- [19] J. M. Soto-Crespo, N. Akhmediev, G. Town, *Opt. Commun.*, **199** (2001), 283.

- [20] N. Akhmediev, J. Soto-Crespo, G. Town, *Phys. Rev. E*, **63** (2001), 056602.
- [21] D. Artigas, L. Torner, N. Akhmediev, *Opt. Commun.*, **143** (1997), 322.
- [22] J. Satsuma, N. Yajima, *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, 1974, № 55, 284.
- [23] P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons: an Introduction*, Cambridge Texts Appl. Math., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [24] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Biomathematics, **19**, Springer, Berlin, 1989.
- [25] N. J. Balmforth, *Annual Rev. Fluid Mech.*, **27** (1995), 335.
- [26] N. Akhmediev, “Pulsating solitons in dissipative systems”, *Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory*, IV IMACS Int. Conf. (Athens, GA, 2005).
- [27] D. J. Kaup, B. A. Malomed, *Physica D*, **87** (1995), 155.
- [28] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, “Dissipative solitons in the complex Ginzburg–Landau and Swift–Hohenberg equations”, *Dissipative Solitons*, Lecture Notes in Phys., **661**, eds. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, Springer, Berlin, 2005, 1.
- [29] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [30] V. Skarka, “Generation and dynamics of dissipative spatial solitons”, *Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory*, IV IMACS Int. Conf. (Athens, GA, 2005).
- [31] A. H. Nayfeh, B. Balachandran, *Applied Nonlinear Dynamics. Analytical, Computational, and Experimental Methods*, Wiley Ser. Nonlinear Sci., Wiley, New York, 1995.
- [32] M. Holodniok, M. Kubiček, *Computation of period doubling bifurcation points in ordinary differential equations*, Report TUM-M8406, Inst. Math. Informatik, Technischen Universität, München, 1984.