Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Маслов, Л. А. Калякин, А. Г. Шагалов, Резонансный захват фазы бризера внешним возмущением, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 2, 356–367

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6092>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 02:33:04

© 2007 г. Е. М. Маслов*, Л. А. Калякин[†], А. Г. Шагалов[‡]

РЕЗОНАНСНЫЙ ЗАХВАТ ФАЗЫ БРИЗЕРА ВНЕШНИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Исследуется эффект резонансного захвата фазы в задаче о воздействии на бризер уравнения синус-Гордон малой осциллирующей внешней силы с медленно изменяющейся частотой. Получены уравнения, определяющие эволюцию во времени параметров возмущенного бризера. Описана регулярная асимптотическая процедура усреднения таких уравнений. Показано, что уже в главном порядке усредненные уравнения хорошо описывают явление резонансного захвата фазы, при котором происходит сильная раскачка колебаний бризера. Найдены необходимые и достаточные условия захвата, связывающие скорость изменения частоты возмущения и его амплитуду с начальными данными бризера.

Ключевые слова: уравнение синус-Гордон, бризер, захват фазы, теория возмущений, асимптотика, усреднение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство нелинейных волновых уравнений обладают широким набором точных периодических во времени решений, описывающих как локализованные возбуждения, так и распространяющиеся волны конечной амплитуды в различных физических системах. Существенным для практики является возможность селективного воздействия на те или иные периодические решения с помощью малых возмущений, включенных в уравнение, что позволяет контролируемым образом изменять амплитудно-фазовые характеристики таких решений. Один из перспективных методов в этом направлении основан на использовании явления резонансного захвата фазы (или, по другой терминологии, авторезонанса). Этот метод успешно применялся для генерации как простых кноидальных волн [1], так и многофазных решений [2] в периодической задаче для уравнения Кортевега–де Фриза, многофазных волн в нелинейном уравнении Шредингера [3], плазменных колебаний в уравнении

*Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН, Московская обл., Троицк, Россия. E-mail: zheka@izmiran.ru

[†]Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия.
E-mail: klenru@mail.ru

[‡]Институт физики металлов УрО РАН, Екатеринбург, Россия.
E-mail: shagalov@imp.uran.ru

синус-Гордон (СГ) [4]. Идея метода восходит к работам Векслера и Мак-Миллана [5] по ускорению релятивистских частиц с использованием эффекта автофазировки. Адиабатическая теория захвата фазы для одномерного нелинейного осциллятора, возбуждаемого внешней силой с медленно изменяющейся частотой, была предложена Чириковым [6]. Современные исследования по асимптотической теории этого явления содержатся в работах [7].

Резонансный захват фазы в нелинейном осцилляторе возникает, если амплитуда возбуждения превышает некоторое критическое значение, зависящее от скорости изменения частоты. При этом частота колебаний осциллятора начинает автоматически подстраиваться к частоте накачки. Поскольку в нелинейной системе частота колебаний зависит от амплитуды, то при вариациях частоты внешней накачки будет изменяться и амплитуда захваченных колебаний, т.е. будет происходить эффективный обмен энергией между системой и накачкой. В частности, для нелинейного маятника медленное уменьшение частоты может привести к раскачке колебаний до амплитуд порядка единицы даже при очень малой амплитуде возбуждающей силы. Вместе с тем такой процесс может быть использован и для управления уже существующими колебаниями большой амплитуды, поскольку захват фазы внешним воздействием обеспечивает полный контроль как над амплитудой, так и над фазой колебаний. В качестве параметра управления в данном случае выступает частота внешней накачки.

В настоящей работе мы исследуем захват фазы бризера конечной амплитуды в уравнении СГ с пространственно-однородной квазипериодической малой накачкой:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon \cos \psi(t), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1)$$

Предполагается, что частота накачки $\Omega = \dot{\psi}$ медленно изменяется со временем: $\dot{\Omega} = O(\alpha)$, $|\alpha| \ll 1$. В отсутствие возмущения (при $\varepsilon = 0$) уравнение (1) допускает локализованное решение в виде бризера

$$u = \phi_b(x, t) = -4 \arctg \left(\frac{\varkappa_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)}{\omega_0 \operatorname{ch}[\varkappa_0(x - x_0)]} \right), \quad \omega_0^2 = 1 - \varkappa_0^2, \quad (2)$$

которое характеризуется двумя константами – $\varkappa_0$ и θ_0 . Координата центра бризера x_0 не играет роли в нашей задаче ввиду инвариантности уравнения (1) относительно сдвигов по x . Включение возмущения приводит к возбуждению в системе малых пространственно-однородных фоновых колебаний, которые взаимодействуют с бризером. Это взаимодействие приводит к тому, что в некоторой области значений параметров возмущения ε и α и при некоторых условиях для начальных данных $\varkappa_0, \theta_0$ частота колебаний бризера начинает следовать за изменяющейся частотой накачки Ω . При этом энергия бризера растет или убывает в зависимости от знака $\dot{\Omega}$. В настоящей работе мы находим эти значения и эти условия, а также получаем систему уравнений, описывающую динамику захваченных колебаний вплоть до больших времен (порядка ε^{-1}). Для этого мы используем теорию возмущений, основанную на методе обратной задачи [8]–[10] (раздел 2), обобщенный метод усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского [11] (раздел 3), а также приближение нелинейного маятника [6] (раздел 4).

2. АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Как отмечалось выше, под действием внешнего возмущения в системе возникают однородные фоновые колебания, $\chi(t) \sim \varepsilon$. Ввиду их малости можно считать, что они описываются линейным уравнением

$$\ddot{\chi} + \chi = \varepsilon \cos \psi(t). \quad (3)$$

Поэтому, полагая в (1)

$$u(x, t) = \phi(x, t) + \chi(t), \quad (4)$$

где $\phi(x, t) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$, приходим к возмущенному уравнению СГ вида [9]

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi = \chi(t)(1 - \cos \phi), \quad (5)$$

где мы пренебрегли членами порядка ε^2 . Это уравнение и описывает динамику локализованного бризера, находящегося под действием однородных фоновых колебаний. В дальнейшем мы будем считать, что в системе отсутствуют собственные линейные колебания, а частота внешнего возбуждения Ω не слишком близка к единице. Тогда для простоты в правой части уравнения (5) можно положить

$$\chi(t) = \frac{\varepsilon \cos \psi}{1 - \Omega^2}. \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что это выражение удовлетворяет уравнению (3) с ошибкой порядка $O(\alpha\varepsilon)$.

Применим теперь к уравнению (5) теорию возмущений, основанную на методе обратной задачи. При этом мы будем следовать работе [10], где были получены уравнения, определяющие эволюцию параметров бризера под действием произвольного возмущения. Согласно этому подходу решение, описывающее возмущенный бризер, представляется в виде

$$\phi(x, t) = \phi_b(x, t) + O(\varepsilon), \quad (7)$$

где

$$\phi_b(x, t) = -4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\varkappa(t) \cos \theta(t)}{\omega(t) \operatorname{ch} [\varkappa(t)(x - x_0)]} \right), \quad \omega^2 = 1 - \varkappa^2. \quad (8)$$

Здесь θ – фаза бризера, а ω и $\varkappa^{-1}$ – его характерные частота и размер ($0 < \omega < 1$, $0 < \varkappa < 1$). Параметризация

$$\omega = \cos \gamma, \quad \varkappa = \sin \gamma, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad (9)$$

определяет характерную амплитуду бризера $\gamma = \operatorname{arctg}(\varkappa/\omega)$. Уравнения для этих параметров находятся в любом порядке по ε последовательными приближениями из уравнений для данных рассеяния, отвечающих дискретному спектру в ассоциированной задаче рассеяния. Поправочные члены $O(\varepsilon)$ в формуле (7) связаны с непрерывной частью спектра. Они описывают искажение формы бризера на масштабе $\varkappa^{-1}$ и излучение, которое начинает распространяться от бризера после включения возмущения. В настоящей работе мы рассматриваем только первый член

в уравнении (7). Такое приближение обычно называется адиабатическим. Ниже мы покажем, что этого приближения вполне достаточно для описания захвата фазы с высокой степенью точности.

Рассматривая правую часть уравнения (5) как возмущение и вычислив соответствующие интегралы (см. работу [10]), приходим в первом порядке по ε к следующей системе уравнений адиабатического приближения:

$$\dot{\gamma} = \varepsilon \frac{F(\gamma, \theta)}{1 - \Omega^2} \cos \psi, \quad (10)$$

$$\dot{\theta} = \omega(\gamma) + \varepsilon \frac{G(\gamma, \theta)}{1 - \Omega^2} \cos \psi, \quad (11)$$

где

$$F(\gamma, \theta) = \frac{\pi}{4} \varkappa^2 \sin \theta \cos^2 \theta \frac{4\omega^2 + \varkappa^2 \cos^2 \theta}{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \theta)^{5/2}}, \quad (12)$$

$$G(\gamma, \theta) = \frac{\pi\omega}{4\varkappa^2} \left\{ \frac{\omega^2 \varkappa \cos \theta}{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \frac{\varkappa^2 \cos^2 \theta (4\omega^2 + \varkappa^2 \cos^2 \theta)}{\omega^4 (1 - \varkappa^2 \sin^2 \theta)} \right] - \operatorname{arcsch} \left(\frac{\varkappa}{\omega} \cos \theta \right) \right\}, \quad (13)$$

а ω и $\varkappa$ определяются амплитудой γ согласно (9). Эти уравнения содержат две быстрые переменные – фазу бризера θ и заданную фазу внешнего возмущения ψ – и две медленные переменные – амплитуду бризера γ и заданную частоту возмущения $\Omega = \dot{\psi}$. Функции $F(\gamma, \theta)$ и $G(\gamma, \theta)$ периодичны по θ с периодом 2π . При этом $F(\gamma, \theta)$ ограничена, а $G(\gamma, \theta)$ имеет особенности при $\gamma = 0, \pi/2$. Мы будем предполагать, что амплитуда γ не слишком близка к этим значениям, так что $G(\gamma, \theta)$ также считается ограниченной. Отметим, что уравнения (10)–(13) с точностью до обозначений совпадают с уравнениями, полученными в работе [9].

Захват фазы означает по определению, что разность $\delta = \theta - \psi$ есть медленно изменяющаяся ограниченная функция времени. В этом случае динамическая система

$$\dot{\gamma} = \varepsilon \frac{F(\gamma, \psi + \delta)}{1 - \Omega^2} \cos \psi, \quad (14)$$

$$\dot{\delta} = \Delta\omega(\gamma, \Omega) + \varepsilon \frac{G(\gamma, \psi + \delta)}{1 - \Omega^2} \cos \psi, \quad (15)$$

$$\dot{\psi} = \Omega, \quad (16)$$

где

$$\Delta\omega = \omega(\gamma) - \Omega, \quad \dot{\Omega} = O(\alpha), \quad (17)$$

будет содержать только одну быструю переменную ψ . Такие решения могут существовать в системе (14)–(16) лишь при некоторых начальных условиях и при определенных ограничениях на α и ε . Это видно уже из того, что в режиме захвата расстройка $\Delta\omega$ должна быть мала, и эта малость должна сохраняться на всем временном интервале изменения Ω , т.е. вплоть до $t \sim |\alpha|^{-1}$. Отсюда следует, во-первых,

что $\omega(\gamma(0)) \approx \Omega(0)$ и, во-вторых, что скорость изменения Ω должна быть порядка средней (по фазе ψ) скорости изменения γ , т.е. $\alpha = O(\varepsilon)$. Поэтому мы положим

$$\alpha = \beta\varepsilon, \quad |\beta| = O(1), \quad (18)$$

где β – некоторая фиксированная константа. Таким образом, малость $\Delta\omega$ зависит теперь только от малости ε и от малости значения $\Delta\omega$ при $t = 0$. Поскольку последняя величина никак не связана с ε , мы будем считать $\Delta\omega$ вторым независимым малым параметром, как это делал Гарифуллин [12] в задаче о нелинейном осцилляторе.

3. УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учитывая все вышеизложенное, перейдем теперь к усредненному описанию процесса захвата фазы. При этом мы будем использовать обобщенный метод Крылова–Боголюбова–Митропольского (см., например, монографию [11]). В соответствии с этим подходом мы рассмотрим почти тождественное преобразование переменных γ, δ в новые “усредненные” переменные $\bar{\gamma}, \bar{\delta}$, записав его в форме асимптотического разложения

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\gamma} \\ \bar{\delta} \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^m (\bar{\Delta\omega})^n \begin{pmatrix} u_{mn}(\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \Omega, \psi) \\ v_{mn}(\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \Omega, \psi) \end{pmatrix} + O(\varepsilon^M, \varepsilon(\bar{\Delta\omega})^N). \quad (19)$$

Здесь в качестве второго независимого малого параметра мы использовали вместо $\Delta\omega$ величину $\bar{\Delta\omega} = \Delta\omega + O(\varepsilon)$, определяемую как

$$\bar{\Delta\omega} = \omega(\bar{\gamma}) - \Omega. \quad (20)$$

Потребуем теперь, чтобы скорость изменения медленных переменных $\bar{\gamma}$ и $\bar{\delta}$ не зависела от быстрой переменной ψ , т.е. положим

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{\gamma} \\ \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\Delta\omega} \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^m (\bar{\Delta\omega})^n \begin{pmatrix} A_{mn}(\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \Omega) \\ B_{mn}(\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \Omega) \end{pmatrix} + O(\varepsilon^M, \varepsilon(\bar{\Delta\omega})^N). \quad (21)$$

Таким образом, процедура усреднения системы (14)–(16) сводится к построению асимптотических разложений (19), (21), т.е. к нахождению величин u_{mn}, v_{mn}, A_{mn} и B_{mn} . Заметим, что в этих разложениях отсутствуют члены с $m = 0$, поскольку при $\varepsilon = 0$ система становится невозмущенной.

Подставим теперь (19), (21) в уравнения (14)–(16) и сравним коэффициенты при одинаковых $\varepsilon^m (\bar{\Delta\omega})^n$. При этом мы выберем для определенности линейный закон изменения $\Omega(t)$, положив $\dot{\Omega} = \alpha$, учтем выражения (18), (20) и используем разложение

$$\frac{d\bar{\Delta\omega}}{dt} = \varepsilon(A_{10}\omega'(\bar{\gamma}) - \beta) + \varepsilon\bar{\Delta\omega}A_{11}\omega'(\bar{\gamma}) + \varepsilon^2A_{20}\omega'(\bar{\gamma}) + \dots \quad (22)$$

В результате получается система рекуррентных дифференциальных уравнений первого порядка (по быстрой переменной ψ) для функций u_{mn} и v_{mn} . Выражения

для A_{mn} и B_{mn} находятся из условий ограниченности u_{mn} и v_{mn} по ψ . При этом решения u_{mn} и v_{mn} будут 2π -периодическими функциями быстрой переменной ψ , определенными с точностью до произвольных функций медленных переменных $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, Ω . Выбор этих функций не влияет на точность и диктуется только соображениями удобства (см. монографию [11]). Мы выберем их таким образом, чтобы средние решений u_{mn} и v_{mn} по ψ обращались в нуль. В этом случае величины $\bar{\gamma}$ и $\bar{\delta}$ приобретают естественный смысл средних значений от γ и δ . Кроме того, при таком выборе значительно упрощаются выражения для A_{mn} и B_{mn} . Так, например, A_{10} и B_{10} находятся просто с помощью вычисления средних по ψ в правых частях уравнений (14), (15), а A_{11} и B_{11} обращаются в нуль. Таким образом, задача нахождения решений системы уравнений (10), (11) в режиме резонансного захвата фазы сводится к интегрированию системы (21), которую обычно называют усредненной.

Описанная процедура позволяет получить усредненную систему с любой конечной степенью точности по двум малым параметрам – ε и $\overline{\Delta\omega}$. Для систем с быстро вращающейся фазой, содержащих только один малый параметр, было показано [13], что предельная ошибка, остающаяся при использовании подобных процедур усреднения, экспоненциально мала по обратному малому параметру. В связи с этим необходимо отметить, что в контексте нашей исходной задачи учет в усредненных уравнениях членов с порядками малости выше $O(\varepsilon)$ является превышением точности, поскольку в решении (7) мы ограничиваемся анализом только первого адиабатического члена, параметры которого удовлетворяют уравнениям (10), (11), где отброшены члены порядка ε^2 . К тому же и уравнения (5), (6) сами являются приближенными с той же степенью точности. По этим же причинам мы не анализируем здесь поправки u_{mn} и v_{mn} ; нам достаточно быть уверенными, что они существуют и являются ограниченными функциями времени. Такой подход, называемый обычно адиабатическим, является типичным в задачах подобного рода (см., например, работу [10]).

Принимая все это во внимание, мы сохраним в усредненных уравнениях (21) только главные члены, определяемые коэффициентами A_{10} и B_{10} . Вычисляя их с использованием конкретных выражений (12), (13), получаем усредненную систему первого порядка по ε и $\overline{\Delta\omega}$ в виде

$$\frac{d\bar{\gamma}}{dt} = \varepsilon \frac{g(\bar{\gamma})}{1 - \Omega^2(t)} \sin \bar{\delta}, \quad (23)$$

$$\frac{d\bar{\delta}}{dt} = \overline{\Delta\omega} + \varepsilon \frac{g'(\bar{\gamma})}{1 - \Omega^2(t)} \cos \bar{\delta}. \quad (24)$$

Здесь

$$g(\bar{\gamma}) = \frac{1}{2} [K(\bar{\kappa}) - E(\bar{\kappa})] \geq 0, \quad g'(\bar{\gamma}) = \frac{1}{2} E(\bar{\kappa}) \operatorname{tg} \bar{\gamma} \geq 0, \quad (25)$$

$K(\bar{\kappa})$ и $E(\bar{\kappa})$ суть полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно, $\bar{\kappa} = \sin \bar{\gamma}$, $\Omega(t) = \Omega_0 + \alpha t$, а $\overline{\Delta\omega}$ определено выражением (20). Режиму захвата соответствуют решения с ограниченными функциями $\bar{\delta}(t)$. Отметим, что

Рис. 1. Зависимость от времени средних частоты (а) и энергии (б) бризера. Кривые 1 – отсутствие захвата, $\varepsilon = 0.0016$. Кривые 2 – режим захвата, $\varepsilon = 0.0019$. Пунктирная линия – частота $\Omega(t) = \Omega_0 + \alpha t$, где $\Omega_0 = \cos \bar{\gamma}(0) \simeq 0.8776$, $\alpha = -0.0003$.

полученная система имеет гамильтониан

$$H(\bar{\gamma}, \bar{\delta}; \Omega) = \bar{\gamma}\Omega - \sin \bar{\gamma} - \varepsilon \frac{g(\bar{\gamma})}{1 - \Omega^2} \cos \bar{\delta}. \quad (26)$$

На рис. 1 приведены зависимости от времени средних частоты и энергии бризера, определенных соответственно как $d\bar{\theta}/dt = \Omega(t) + d\bar{\delta}/dt$, $\bar{E}_b = 16 \sin \bar{\gamma}$, найденные с помощью численного интегрирования системы (23), (24) с начальными условиями $\bar{\gamma}(0) = 0.5$, $\bar{\delta}(0) = 0$, $\overline{\Delta\omega}(0) = 0$. При каждом фиксированном α переход в режим захвата наблюдался при превышении ε некоторого критического значения. В частности, при выбранных начальных условиях и $\alpha = -0.0003$ мы получили $\varepsilon_{cr} = 0.00178$.

Для проверки мы численно проинтегрировали исходное уравнение СГ (1) с начальными условиями $u(x, 0) = \phi_b(x, 0) + \chi(0)$, $u_t(x, 0) = 0$. При этом для параметров бризера и возмущения брались те же начальные условия, что и для системы (23), (24). Частота бризера определялась по моментам прохождения поля $u(x, t)$ через нуль, а энергия – путем интегрирования плотности энергии по ширине бризера.

Сравнение полученных результатов показало, что соответствующие кривые практически совпадают, так что на рис. 1 они были бы неразличимы. Отметим лишь, что истинное значение ε_{cr} , следующее из решения уравнения (1), составило 0.00179.

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО МАЯТНИКА

Уравнения (23), (24) описывают динамику средних значений γ и δ на большом временном интервале $0 \leq t \lesssim \varepsilon^{-1}$. Однако, как видно из рис. 1, сам захват происходит на начальных временах, почти сразу после включения возмущения. Этим обстоятельством, следуя работе [6], мы и воспользуемся при определении условий

захвата. Для этого перейдем от системы (23), (24) к уравнению второго порядка для $\bar{\delta}$. Дифференцируя уравнение (24) и используя (23), находим

$$\frac{d^2\bar{\delta}}{dt^2} = \varepsilon \frac{g(\bar{\gamma})\omega'(\bar{\gamma}) - g'(\bar{\gamma})\overline{\Delta\omega}}{1 - \Omega^2(t)} \sin \bar{\delta} - \varepsilon\beta + O(\varepsilon^2, \varepsilon(\overline{\Delta\omega})^2). \quad (27)$$

Здесь мы учли, что, поскольку $A_{11} = B_{11} = 0$, то ошибка в правых частях уравнений (23), (24) имеет порядок лишь $O(\varepsilon^2, \varepsilon(\overline{\Delta\omega})^2)$, и поэтому сохранили в уравнении (27) член порядка $O(\varepsilon\overline{\Delta\omega})$, получающийся после дифференцирования второго члена в правой части (24).

Рассмотрим теперь начальный временной интервал $0 \leq t \ll \varepsilon^{-1}$, когда, собственно, и происходит захват фазы. В этом случае в правой части уравнения (27) можно пренебречь зависимостью от времени коэффициента при $\sin \bar{\delta}$, взяв его значение, например, при $t = 0$. Таким образом, на рассматриваемом временном масштабе мы приходим к уравнению нелинейного маятника

$$\frac{d^2\bar{\delta}}{d\tau^2} = \lambda \sin \bar{\delta} - \beta, \quad 0 \leq \tau \ll \varepsilon^{-1/2}, \quad (28)$$

где $\tau = \varepsilon^{1/2}t$ – медленное время, а константа λ с необходимой степенью точности вычисляется по начальным значениям $\gamma = \bar{\gamma} + O(\varepsilon)$ и Ω :

$$\lambda \simeq \frac{g(\gamma(0))\omega'(\gamma(0)) - g'(\gamma(0))\Delta\omega(0)}{1 - \Omega_0^2}. \quad (29)$$

В частности, если начальная расстройка равна нулю или достаточно мала, $\Delta\omega(0) \lesssim O(\varepsilon)$, то

$$\lambda \simeq -\frac{g(\gamma(0))}{\sin \gamma(0)}. \quad (30)$$

Заметим, что λ всегда отрицательна.

Общие свойства всех возможных решений уравнения (28) можно получить, проанализировав различные фазовые траектории, определяемые первым интегралом (энергией)

$$E(\bar{\delta}, \bar{\delta}_\tau) = \frac{1}{2}\bar{\delta}_\tau^2 + V(\bar{\delta}), \quad V(\bar{\delta}) = \lambda \cos \bar{\delta} + \beta\bar{\delta}. \quad (31)$$

Ясно, что фазовый портрет существенно зависит от соотношения параметров β и λ .

В случае, когда $|\beta/\lambda| > 1$, неподвижных точек нет. Фазовые траектории представляют собой периодически деформированные параболы (рис. 2а). При любых начальных условиях все решения быстро растут со временем: $\bar{\delta}(\tau) = -\beta\tau^2/2 + O(\tau)$, $\tau \rightarrow \pm\infty$. Поэтому захват фазы невозможен, если частота накачки меняется слишком быстро по сравнению с величиной ее амплитуды. Если же частота накачки меняется достаточно медленно, так что

$$\left| \frac{\beta}{\lambda} \right| < 1, \quad (32)$$

то на фазовом портрете возникают две бесконечные последовательности неподвижных точек, устойчивых и неустойчивых (рис. 2б). Из каждой неустойчивой точки

Рис. 2. Фазовый портрет уравнения (28): $|\beta/\lambda| > 1$ (а), $|\beta/\lambda| < 1$ (б).

выходит пара сепаратрис, которые уходят на бесконечность, а также сепаратрисная петля, охватывающая соседнюю устойчивую точку. Закрытые траектории внутри петли соответствуют периодическим решениям, т.е. режиму захвата. Для таких решений амплитуда бризера будет в среднем расти, если $\beta < 0$, или убывать, если $\beta > 0$. В этом можно убедиться, подставив в уравнение (23) $\sin \bar{\delta}$ из уравнения (28) и усреднив (23) по колебаниям $\bar{\delta}(t)$.

Очевидно, что неравенство (32) является необходимым, но не достаточным условием захвата. Необходимо также, чтобы начальная точка $(\bar{\delta}(0), \bar{\delta}_\tau(0))$ находилась внутри одной из сепаратрисных петель. Пусть $\bar{\delta}_n^{(1)}$ и $\bar{\delta}_n^{(2)}$ суть минимальное и максимальное значения $\bar{\delta}$ на n -й сепаратрисной петле, а $\bar{\delta}_n^{(0)}$ – значение в устойчивой точке внутри этой петли: $\bar{\delta}_n^{(1)} < \bar{\delta}_n^{(0)} < \bar{\delta}_n^{(2)}$. Тогда для периодичности $\bar{\delta}(\tau)$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторого n выполнялись неравенства

$$\bar{\delta}_n^{(1)} < \bar{\delta}(0) < \bar{\delta}_n^{(2)}, \quad (33)$$

$$E_n^{(0)} \leq E(\bar{\delta}(0), \bar{\delta}_\tau(0)) < E_n^{(s)}, \quad (34)$$

где $E_n^{(s)}$ и $E_n^{(0)}$ – значения первого интеграла на n -й сепаратрисной петле и в соответствующей устойчивой точке: $E_n^{(s)} = V(\bar{\delta}_n^{(1)}) = V(\bar{\delta}_n^{(2)})$, $E_n^{(0)} = V(\bar{\delta}_n^{(0)})$. С учетом того, что $\lambda < 0$, величины $\bar{\delta}_n^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, определяются следующим образом:

1) при $\beta < 0$

$$\bar{\delta}_n^{(0)} = 2n\pi + \arcsin \frac{\beta}{\lambda}, \quad \bar{\delta}_n^{(2)} = (2n+1)\pi - \arcsin \frac{\beta}{\lambda}, \quad (35)$$

$\bar{\delta}_n^{(1)}$ есть корень уравнения

$$\cos \delta + \frac{\beta}{\lambda} \delta = -\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2} + \frac{\beta}{\lambda} \left[(2n+1)\pi - \arcsin \frac{\beta}{\lambda} \right], \quad (36)$$

лежащий в интервале $\bar{\delta}_{n-1}^{(2)} < \bar{\delta}_n^{(1)} < \bar{\delta}_n^{(0)}$;

2) при $\beta > 0$

$$\bar{\delta}_n^{(0)} = (2n+2)\pi + \arcsin \frac{\beta}{\lambda}, \quad \bar{\delta}_n^{(1)} = (2n+1)\pi - \arcsin \frac{\beta}{\lambda}, \quad (37)$$

$\bar{\delta}_n^{(2)}$ есть корень уравнения (36), лежащий в интервале $\bar{\delta}_n^{(0)} < \bar{\delta}_n^{(2)} < \bar{\delta}_{n+1}^{(1)}$.

Итак, неравенства (32)–(34) являются необходимыми и достаточными условиями захвата фазы бризера внешним возмущением. Эти неравенства означают, что фазовый портрет уравнения (28) имеет сепаратрисные петли, и что начальная точка $(\bar{\delta}(0), \bar{\delta}_\tau(0))$ лежит внутри одной из этих петель. При $|\beta/\lambda| \rightarrow 0$ сепаратрисные петли расширяются, их размер вдоль оси $\bar{\delta}$ стремится к 2π . При $|\beta/\lambda| \rightarrow 1$ петли стягиваются к точкам $\text{sgn}(\beta/\lambda)\pi/2 + 2n\pi$.

Предположим, что начальная точка находится внутри n -й сепаратрисной петли. Будем теперь медленно увеличивать скорость изменения частоты накачки. Критическое значение β , при котором произойдет срыв захвата, получается, когда стягивающаяся петля пересечет начальную точку. Таким образом, β_{cr} находится как корень уравнения

$$E(\bar{\delta}(0), \bar{\delta}_\tau(0); \beta, \lambda) = E_n^{(s)}(\beta, \lambda). \quad (38)$$

Если начальная расстройка достаточно мала, $\Delta\omega(0) = \overline{\Delta\omega}(0) + O(\varepsilon) = o(\varepsilon^{1/2})$, то в силу (24) в левой части уравнения (38) можно пренебречь кинетическим членом. В этом случае (38) приобретает вид уравнения (36), где $\delta = \delta(0) = \bar{\delta}(0) + O(\varepsilon)$. Это уравнение теперь определяет в неявной форме $\beta_{\text{cr}}/\lambda$ как функцию от начальной разности фаз $\delta(0)$.

Рассмотрим для примера случай, когда частота накачки уменьшается, т.е. $\beta < 0$, начальная расстройка $\Delta\omega(0) = 0$, а начальная разность фаз бризера и накачки определена в интервале от 0 до 2π . При этом для $0 \leq \delta(0) < \pi$ в уравнении (36) следует брать $n = 0$ (нулевая петля), а для $\pi < \delta(0) \leq 2\pi - n = 1$ (первая петля). При $\delta(0) = \pi$, очевидно, имеем $\beta_{\text{cr}}/\lambda = 0$, т.е. в противофазе захвата не происходит никогда. При $\delta(0) = \pi/2$ захват происходит при всех β вплоть до предельно быстрого изменения частоты, когда $\beta = \lambda$. График зависимости $\beta_{\text{cr}}/\lambda$ от $\delta(0)$ представлен на рис. 3. Режиму захвата отвечают значения β/λ ниже сплошной кривой. На этом же рисунке изображены значения $\beta_{\text{cr}}/\lambda$, найденные с помощью численного интегрирования уравнения СГ (1). Отметим, что в узкой области вблизи значения $\delta(0) = \pi$ мы наблюдали в численном эксперименте интенсивное излучение волн бризером и отсутствие захвата фазы даже при очень малых скоростях изменения частоты накачки. Ясно, что в этой области адиабатическое приближение становится неприменимым. Тем не менее, несмотря на это и на определенную грубость приближения нелинейного маятника, полученные результаты, как видно из рис. 3,

Рис. 3. Зависимость $\beta_{\text{cr}}/\lambda$ от начальной разности фаз. Сплошная кривая получена при решении уравнения (36); $\square$ – значения, полученные путем численного интегрирования уравнения СГ при $\alpha = -0.0003$; $\blacksquare$ – то же при $\alpha = -0.00003$.

достаточно хорошо согласуются с решением уравнения СГ путем численного интегрирования.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрели эффект резонансного захвата фазы в уравнении СГ на примере бризера, находящегося под действием малой осциллирующей внешней силы с медленно изменяющейся частотой. С помощью теории возмущений, основанной на методе обратной задачи, мы получили систему уравнений (14)–(16) для параметров бризера, описывающую эффект захвата в адиабатическом приближении. Особенность этой системы, относящейся к классу динамических систем с быстро вращающейся фазой, состоит в наличии двух независимых малых параметров – амплитуды внешней силы ε и расстройки частоты $\Delta\omega$. Мы описали регулярную процедуру усреднения таких систем, основанную на асимптотических разложениях по обоим малым параметрам, и получили в явном виде усредненную систему первого приближения (23), (24), которая является гамильтоновой. Сравнение решений, полученных численным интегрированием этой системы, с соответствующими численными решениями исходного уравнения СГ показало совпадение результатов с высокой степенью точности. Для определения условий захвата и нахождения критических параметров возмущения мы использовали приближение нелинейного маятника (28). В итоге получены необходимые и достаточные условия захвата в виде неравенств (32)–(34), а также уравнение (38) для критических значений β , которое в случае малых начальных расстроек приобретает форму уравнения (36). Реше-

ние этого уравнения хорошо согласуется с результатами, полученными с помощью численного интегрирования уравнения СГ.

Благодарности. Авторы признательны организаторам конференции “Нелинейная физика. Теория и эксперимент. IV” за возможность представить результаты этой работы в виде доклада. Авторы также благодарны участникам конференции, особенно Л. Фридланду и О. Киселеву, за полезные дискуссии. Работа выполнена при частичной поддержке INTAS (грант № 03-51-4286) и РФФИ (гранты №№ 06-01-00124, 06-01-92052).

Список литературы

- [1] I. Aranson, B. Meerson, T. Tatjima, *Phys. Rev. A*, **45** (1992), 7500.
- [2] L. Friedland, A. G. Shagalov, *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2003), 074101.
- [3] L. Friedland, A. G. Shagalov, *Phys. Rev. E*, **71** (2005), 036206.
- [4] L. Friedland, *Phys. Rev. E*, **55** (1997), 1929.
- [5] В. И. Векслер, *ДАН СССР*, **43** (1944), 346; E. M. MacMillan, *Phys. Rev.*, **68** (1945), 143.
- [6] Б. В. Чириков, *ДАН СССР*, **125** (1959), 1015.
- [7] Л. А. Калякин, *Докл. РАН*, **378** (2001), 594; *ТМФ*, **133** (2002), 429.
- [8] D. J. Kaup, A. C. Newell, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, **361** (1978), 413.
- [9] M. J. Inoue, *J. Phys. Soc. Japan*, **47** (1979), 1723.
- [10] В. И. Карпман, Е. М. Маслов, В. В. Соловьев, *ЖЭТФ*, **84** (1983), 289.
- [11] Н. Н. Моисеев, *Асимптотические методы нелинейной механики*, Наука, М., 1981.
- [12] Р. Н. Гарифуллин, *ЖВМ и МФ*, **46** (2006), 1605.
- [13] А. И. Нейштадт, *Прикл. матем. и мех.*, **48** (1984), 197.