Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Теория подмногообразий, уравнения ассоциативности двумерных топологических квантовых теорий поля и фробениусовы многообразия, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 2, 368–376

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6093>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:15:34

© 2007 г.

О. И. Мохов*

ТЕОРИЯ ПОДМНОГООБРАЗИЙ, УРАВНЕНИЯ АССОЦИАТИВНОСТИ ДВУМЕРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ ТЕОРИЙ ПОЛЯ И ФРОБЕНИУСОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Доказано, что уравнения ассоциативности двумерных топологических квантовых теорий поля являются естественными редукциями фундаментальных нелинейных уравнений теории подмногообразий в псевдоевклидовых пространствах и задают естественный класс *потенциальных* плоских подмногообразий без кручения. Показано, что все потенциальные плоские подмногообразия без кручения в псевдоевклидовых пространствах имеют естественные структуры фробениусовых алгебр на своих касательных пространствах. Эти фробениусовы структуры порождаются соответствующими плоской первой квадратичной формой и множеством вторых квадратичных форм подмногообразий (фактически структурные константы задаются множеством операторов Вайнгартена подмногообразий). Доказано, что локально каждое N -мерное фробениусово многообразие может быть представлено как потенциальное плоское подмногообразие без кручения в $2N$ -мерном псевдоевклидовом пространстве. Нашей конструкцией это подмногообразие определено однозначно с точностью до движений. Более того, рассмотрена нелинейная система, которая является естественным обобщением уравнений ассоциативности, а именно система, описывающая все плоские подмногообразия без кручения в псевдоевклидовых пространствах, и доказано, что эта система является интегрируемой методом обратной задачи рассеяния.

Ключевые слова: фробениусово многообразие, подмногообразие псевдоевклидова пространства, плоское подмногообразие, подмногообразие с плоской нормальной связностью, плоское подмногообразие без кручения, уравнения ассоциативности двумерных топологических квантовых теорий поля, интегрируемая система.

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия; Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: mokhov@mi.ras.ru; mokhov@landau.ac.ru; mokhov@bk.ru

Памяти моей замечательной мамы
Майи Николаевны Моховой
(4.05.1926 – 12.09.2006)

1. ВВЕДЕНИЕ. УРАВНЕНИЯ АССОЦИАТИВНОСТИ И ФРОБЕНИУСОВЫ СТРУКТУРЫ

В данной статье мы доказываем, что уравнения ассоциативности двумерных топологических квантовых теорий поля (уравнения Виттена–Дейкграфа–Верлинде–Верлинде и Дубровина, см. работу [1]) для функции (*потенциала* или *предпотенциала*) $\Phi = \Phi(u^1, \dots, u^N)$,

$$\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} \eta^{kl} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^l \partial u^m \partial u^n} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^m \partial u^k} \eta^{kl} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^l \partial u^j \partial u^n}, \quad (1.1)$$

где η^{ij} – произвольная постоянная невырожденная симметричная матрица, $\eta^{ij} = \eta^{ji}$, $\eta^{ij} = \text{const}$, $\det(\eta^{ij}) \neq 0$, являются очень естественными редукциями фундаментальных нелинейных уравнений теории подмногообразий в псевдоевклидовых пространствах и задают естественный класс *потенциальных* плоских подмногообразий без кручения. Все потенциальные плоские подмногообразия без кручения в псевдоевклидовых пространствах имеют естественные структуры фробениусовых алгебр на своих касательных пространствах. Эти фробениусовы структуры порождаются соответствующими плоской первой квадратичной формой и множеством вторых квадратичных форм подмногообразий (фактически структурные константы задаются множеством операторов Вайнгартена подмногообразий). Напомним, что каждое решение $\Phi(u^1, \dots, u^N)$ уравнений ассоциативности (1.1) задает N -параметрические деформации фробениусовых алгебр, т.е. коммутативных ассоциативных алгебр с заданными на них невырожденными инвариантными симметричными билинейными формами. Действительно, рассмотрим алгебры $A(u)$ в N -мерном векторном пространстве с базисом $e_1, \dots, e_N$ и умножением (см. работу [1])

$$e_i \circ e_j = c_{ij}^k(u) e_k, \quad c_{ij}^k(u) = \eta^{ks} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^s \partial u^i \partial u^j} e_k. \quad (1.2)$$

Для всех значений параметров $u = (u^1, \dots, u^N)$ алгебры $A(u)$ коммутативны, $e_i \circ e_j = e_j \circ e_i$, а условие ассоциативности

$$(e_i \circ e_j) \circ e_k = e_i \circ (e_j \circ e_k) \quad (1.3)$$

в алгебрах $A(u)$ эквивалентно уравнениям (1.1). Матрица η_{ij} , обратная матрице η^{ij} , $\eta^{is} \eta_{sj} = \delta_j^i$, определяет невырожденную инвариантную симметричную билинейную форму на алгебрах $A(u)$,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \eta_{ij}, \quad \langle e_i \circ e_j, e_k \rangle = \langle e_i, e_j \circ e_k \rangle. \quad (1.4)$$

Напомним, что локально на любом фробениусовом многообразии (см. работу [1]) на касательном пространстве в каждой точке имеется структура фробениусовой алгебры (1.2)–(1.4), которая определяется некоторым решением уравнений ассоциативности (1.1) и гладко зависит от точки. Кроме того, на фробениусовых многообразиях

требуется еще выполнение некоторых дополнительных условий, которые мы здесь не рассматриваем. В данной статье мы доказываем, что каждое N -мерное фробениусово многообразие локально может быть представлено как потенциальное плоское подмногообразие без кручения в $2N$ -мерном псевдоевклидовом пространстве. Нашей конструкцией это подмногообразие определено однозначно с точностью до движений. Более того, мы рассматриваем нелинейную систему, которая является естественным обобщением уравнений ассоциативности (1.1), а именно систему, описывающую все плоские подмногообразия без кручения в псевдоевклидовых пространствах, и доказываем, что эта система является интегрируемой методом обратной задачи рассеяния. Связь нашей конструкции с интегрируемыми иерархиями, нелокальными гамильтоновыми операторами гидродинамического типа с плоскими метриками, пучками скобок Пуассона и операторами рекурсии может быть найдена в работе автора [2]. Результаты приложений этой конструкции в теории фробениусовых многообразий будут опубликованы в отдельной статье.

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрим произвольное гладкое N -мерное подмногообразие M^N в $(N+L)$ -мерном евклидовом пространстве E^{N+L} , $M^N \subset E^{N+L}$, и введем стандартные классические обозначения. Пусть подмногообразие M^N локально задано некоторой гладкой вектор-функцией $r(u^1, \dots, u^N)$, зависящей от N независимых переменных $(u^1, \dots, u^N)$ (некоторые независимые параметры на подмногообразии), $r(u^1, \dots, u^N) = (z^1(u^1, \dots, u^N), \dots, z^{N+L}(u^1, \dots, u^N))$, где $(z^1, \dots, z^{N+L})$ – координаты в евклидовом пространстве E^{N+L} , $(z^1, \dots, z^{N+L}) \in E^{N+L}$, $(u^1, \dots, u^N)$ – локальные координаты (параметры) на M^N , $\text{rank}(\partial z^i / \partial u^j) = N$ (здесь $1 \leq i \leq N+L$, $1 \leq j \leq N$). Тогда $\partial r / \partial u^i = r_{u^i}$, $1 \leq i \leq N$, – касательные векторы в произвольной точке $u = (u^1, \dots, u^N)$ на M^N . Пусть N_u – нормальное пространство подмногообразия M^N в произвольной точке $u = (u^1, \dots, u^N)$ на M^N , $N_u = \langle n_1, \dots, n_L \rangle$, где n_α , $1 \leq \alpha \leq L$, – ортонормированный базис нормального пространства (ортонормированные нормали), $(n_\alpha, r_{u^i}) = 0$, $1 \leq \alpha \leq L$, $1 \leq i \leq N$, $(n_\alpha, n_\beta) = 0$, $1 \leq \alpha, \beta \leq L$, $\alpha \neq \beta$, и $(n_\alpha, n_\alpha) = 1$, $1 \leq \alpha \leq L$.

Тогда $\mathbf{I} = ds^2 = g_{ij}(u) du^i du^j$, $g_{ij}(u) = (r_{u^i}, r_{u^j})$, – первая квадратичная форма и $\mathbf{II}_\alpha = \omega_{\alpha,ij}(u) du^i du^j$, $\omega_{\alpha,ij}(u) = (n_\alpha, r_{u^i u^j})$, $1 \leq \alpha \leq L$, – вторые квадратичные формы подмногообразия M^N .

Поскольку множество векторов $(r_{u^1}(u), \dots, r_{u^N}(u), n_1(u), \dots, n_L(u))$ образует базис в E^{N+L} в каждой точке подмногообразия M^N , мы можем разложить каждый из векторов $n_{\alpha, u^i}(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, $1 \leq i \leq N$, по этому базису, а именно $n_{\alpha, u^i}(u) = A_{\alpha, i}^k(u) r_{u^k}(u) + \varkappa_{\alpha\beta, i}(u) n_\beta(u)$, где $A_{\alpha, i}^k(u)$ и $\varkappa_{\alpha\beta, i}(u)$ – некоторые коэффициенты, зависящие от u (разложение Вайнгартена). Легко доказать, что $A_{\alpha, i}^k(u) = -\omega_{\alpha, ij}(u) g^{jk}(u)$, где $g^{jk}(u)$ – контравариантная метрика, обратная первой квадратичной форме $g_{ij}(u)$, $g^{is}(u) g_{sj}(u) = \delta_j^i$. Коэффициенты $\varkappa_{\alpha\beta, i}(u)$ называются коэффициентами кручения подмногообразия M^N , $\varkappa_{\alpha\beta, i}(u) = (n_{\alpha, u^i}(u), n_\beta(u))$. Легко также доказать, что коэффициенты $\varkappa_{\alpha\beta, i}(u)$ кососимметричны по индексам α

и β , $\varkappa_{\alpha\beta,i}(u) = -\varkappa_{\beta\alpha,i}(u)$, и образуют ковариантные тензоры (1-формы) по индексу i на подмногообразии M^N . 1-Формы $\varkappa_{\alpha\beta,i}(u) du^i$ называются *формами кручения подмногообразия* M^N .

Хорошо известно, что для каждого подмногообразия M^N формы $g_{ij}(u)$, $\omega_{\alpha,ij}(u)$ и $\varkappa_{\alpha\beta,i}(u)$ удовлетворяют уравнениям Гаусса, уравнениям Кодацци и уравнениям Риччи, которые являются фундаментальными уравнениями теории подмногообразий. В нашем случае уравнения Гаусса имеют вид

$$R_{ijkl}(u) = \sum_{\alpha=1}^L (\omega_{\alpha,jl}(u)\omega_{\alpha,ik}(u) - \omega_{\alpha,jk}(u)\omega_{\alpha,il}(u)), \quad (2.1)$$

где $R_{ijkl}(u)$ – тензор римановой кривизны первой квадратичной формы $g_{ij}(u)$; уравнения Кодацци имеют вид

$$\nabla_k(\omega_{\alpha,ij}(u)) - \nabla_j(\omega_{\alpha,ik}(u)) = \varkappa_{\alpha\beta,k}(u)\omega_{\beta,ij}(u) - \varkappa_{\alpha\beta,j}(u)\omega_{\beta,ik}(u), \quad (2.2)$$

где ∇_k – оператор ковариантного дифференцирования, порождаемый связностью Леви-Чивита первой квадратичной формы $g_{ij}(u)$; уравнения Риччи имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla_k(\varkappa_{\alpha\beta,i}(u)) - \nabla_i(\varkappa_{\alpha\beta,k}(u)) + \sum_{\gamma=1}^L (\varkappa_{\alpha\gamma,i}(u)\varkappa_{\gamma\beta,k}(u) - \varkappa_{\alpha\gamma,k}(u)\varkappa_{\gamma\beta,i}(u)) + \\ + (\omega_{\alpha,kl}(u)\omega_{\beta,ji}(u) - \omega_{\alpha,il}(u)\omega_{\beta,jk}(u))g^{lj}(u) = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ТЕОРЕМА 2.1 (Бонне). Пусть K^N – произвольное гладкое N -мерное риманово многообразие с метрикой $g_{ij}(u) du^i du^j$. Пусть в односвязной области многообразия K^N заданы некоторые 2-формы $\omega_{\alpha,ij}(u) du^i du^j$, $1 \leq \alpha \leq L$, и некоторые 1-формы $\varkappa_{\alpha\beta,i}(u)$, $1 \leq \alpha, \beta \leq L$. Если $\omega_{\alpha,ij}(u) = \omega_{\alpha,ji}(u)$, $\varkappa_{\alpha\beta,i}(u) = -\varkappa_{\beta\alpha,i}(u)$ и для форм $g_{ij}(u)$, $\omega_{\alpha,ij}(u)$ и $\varkappa_{\alpha\beta,i}(u)$ выполняются уравнения Гаусса (2.1), уравнения Кодацци (2.2) и уравнения Риччи (2.3), то существует единственное (с точностью до движений) гладкое N -мерное подмногообразие M^N в $(N+L)$ -мерном евклидовом пространстве E^{N+L} с первой квадратичной формой $ds^2 = g_{ij}(u) du^i du^j$, вторыми квадратичными формами $\omega_{\alpha,ij}(u) du^i du^j$ и формами кручения $\varkappa_{\alpha\beta,i}(u) du^i$.

Полностью аналогичные фундаментальные уравнения и теорема Бонне справедливы для всех вполне неизотропных подмногообразий в псевдоевклидовых пространствах (напомним, что для подмногообразия произвольного псевдоевклидова пространства E_n^m метрика, индуцированная на подмногообразии из объемлющего псевдоевклидова пространства E_n^m , является невырожденной тогда и только тогда, когда это подмногообразие вполне неизотропно, т.е. ни в одной из своих точек не касается изотропных конусов объемлющего псевдоевклидова пространства E_n^m).

3. ПЛОСКИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ БЕЗ КРУЧЕНИЯ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрим вполне неизотропные гладкие N -мерные подмногообразия без кручения в $(N+L)$ -мерном псевдоевклидовом пространстве, т.е. все формы кручения подмногообразий рассматриваемого класса тождественно равны нулю: $\varkappa_{\alpha\beta,i}(u) = 0$.

Мы также будем использовать в нормальных пространствах N_u базисы n_α , $1 \leq \alpha \leq L$, с произвольными допустимыми матрицами Грама $\mu_{\alpha\beta}$, $(n_\alpha, n_\beta) = \mu_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta} = \text{const}$, $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha}$, $\det \mu_{\alpha\beta} \neq 0$ (сигнатура метрики $\mu_{\alpha\beta}$ определяется сигнатурой первой квадратичной формы подмногообразия и сигнатурой объемлющего псевдоевклидова пространства).

Для N -мерных подмногообразий без кручения в $(N + L)$ -мерном псевдоевклидовом пространстве мы получаем следующую систему фундаментальных уравнений: уравнения Гаусса

$$R_{ijkl}(u) = \sum_{\alpha=1}^L \sum_{\beta=1}^L \mu^{\alpha\beta} (\omega_{\alpha,ik}(u) \omega_{\beta,jl}(u) - \omega_{\alpha,il}(u) \omega_{\beta,jk}(u)), \quad (3.1)$$

где $\mu^{\alpha\beta}$ – матрица, обратная матрице $\mu_{\alpha\beta}$, $\mu^{\alpha\gamma} \mu_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha$; уравнения Кодацци

$$\nabla_k (\omega_{\alpha,ij}(u)) = \nabla_j (\omega_{\alpha,ik}(u)) \quad (3.2)$$

и уравнения Риччи

$$g^{ij}(u) (\omega_{\alpha,ik}(u) \omega_{\beta,jl}(u) - \omega_{\alpha,il}(u) \omega_{\beta,jk}(u)) = 0. \quad (3.3)$$

Пусть теперь $g_{ij}(u)$ – плоская метрика, т.е. мы рассматриваем плоские N -мерные подмногообразия M^N без кручения в $(N + L)$ -мерном псевдоевклидовом пространстве. Тогда мы можем считать, что $u = (u^1, \dots, u^N)$ – некоторые плоские координаты метрики $g_{ij}(u)$ на M^N . В плоских координатах метрика является постоянной невырожденной симметричной матрицей η_{ij} , $\eta_{ij} = \eta_{ji}$, $\eta_{ij} = \text{const}$, $\det(\eta_{ij}) \neq 0$, а уравнения Кодацци (3.2) принимают вид

$$\frac{\partial \omega_{\alpha,ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial \omega_{\alpha,ik}}{\partial u^j}. \quad (3.4)$$

Таким образом, локально существуют некоторые функции $\chi_{\alpha,i}(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, $1 \leq i \leq N$, такие, что

$$\omega_{\alpha,ij}(u) = \frac{\partial \chi_{\alpha,i}}{\partial u^j}. \quad (3.5)$$

Из симметрии вторых квадратичных форм $\omega_{\alpha,ij}(u) = \omega_{\alpha,ji}(u)$ мы получаем

$$\frac{\partial \chi_{\alpha,i}}{\partial u^j} = \frac{\partial \chi_{\alpha,j}}{\partial u^i}. \quad (3.6)$$

Следовательно, локально существуют некоторые функции $\psi_\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, такие, что

$$\chi_{\alpha,i}(u) = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u^i}, \quad \omega_{\alpha,ij}(u) = \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial u^i \partial u^j}. \quad (3.7)$$

Таким образом, мы доказали следующую важную лемму.

ЛЕММА. Все вторые квадратичные формы каждого плоского подмногообразия без кручения в псевдоевклидовом пространстве являются гессианами в любых плоских координатах в любой односвязной области на подмногообразии.

Более того, в любых плоских координатах уравнения Гаусса (3.1) имеют вид

$$\sum_{\alpha=1}^L \sum_{\beta=1}^L \mu^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial u^i \partial u^k} \frac{\partial^2 \psi_\beta}{\partial u^j \partial u^l} - \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial u^i \partial u^l} \frac{\partial^2 \psi_\beta}{\partial u^j \partial u^k} \right) = 0, \quad (3.8)$$

а уравнения Риччи (3.3) –

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \eta^{ij} \left(\frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial u^i \partial u^k} \frac{\partial^2 \psi_\beta}{\partial u^j \partial u^l} - \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial u^i \partial u^l} \frac{\partial^2 \psi_\beta}{\partial u^j \partial u^k} \right) = 0, \quad (3.9)$$

где η^{ij} – матрица, обратная матрице η_{ij} , $\eta^{is}\eta_{sj} = \delta_j^i$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Класс N -мерных плоских подмногообразий без кручения в $(N+L)$ -мерных псевдоевклидовых пространствах описывается (в плоских координатах) системой нелинейных уравнений (3.8), (3.9) для функций $\psi_\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$. Здесь η^{ij} и $\mu^{\alpha\beta}$ – произвольные постоянные невырожденные симметричные матрицы, $\eta^{ij} = \eta^{ji}$, $\eta^{ij} = \text{const}$, $\det(\eta^{ij}) \neq 0$, $\mu^{\alpha\beta} = \text{const}$, $\mu^{\alpha\beta} = \mu^{\beta\alpha}$, $\det \mu^{\alpha\beta} \neq 0$, сигнатура объемлющего $(N+L)$ -мерного псевдоевклидова пространства является суммой сигнатур метрик η^{ij} и $\mu^{\alpha\beta}$, $\mathbf{I} = ds^2 = \eta_{ij} du^i du^j$ – первая квадратичная форма, где η_{ij} – матрица, обратная матрице η^{ij} , $\eta^{is}\eta_{sj} = \delta_j^i$, $\mathbf{II}_\alpha = (\partial^2 \psi_\alpha / \partial u^i \partial u^j) du^i du^j$, $1 \leq \alpha \leq L$, – вторые квадратичные формы, задаваемые гессианами функций $\psi_\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$.*

В соответствии с теоремой Бонне любое решение $\psi_\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, нелинейной системы (3.8), (3.9) определяет единственное (с точностью до движений) N -мерное плоское подмногообразие без кручения в соответствующем $(N+L)$ -мерном псевдоевклидовом пространстве с первой квадратичной формой $\eta_{ij} du^i du^j$ и вторыми квадратичными формами $\omega_\alpha(u) = (\partial^2 \psi_\alpha / \partial u^i \partial u^j) du^i du^j$, $1 \leq \alpha \leq L$, задаваемыми гессианами функций $\psi_\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$. Очевидно, что мы всегда можем добавить произвольные слагаемые, линейные по координатам $(u^1, \dots, u^N)$, к любому решению системы (3.8), (3.9), но множество вторых квадратичных форм и соответствующее подмногообразие останутся теми же самыми. Более того, любые два множества вторых квадратичных форм вида $\omega_{\alpha,ij}(u) = \partial^2 \psi_\alpha / \partial u^i \partial u^j$, $1 \leq \alpha \leq L$, совпадают тогда и только тогда, когда соответствующие функции $\psi_\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, совпадают с точностью до линейных по координатам слагаемых, поэтому мы здесь не должны различать решения нелинейной системы (3.8), (3.9), отличающиеся на слагаемые, линейные по координатам $(u^1, \dots, u^N)$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Нелинейная система (3.8), (3.9) является интегрируемой методом обратной задачи рассеяния.*

Рассмотрим следующую линейную задачу для вектор-функций $\partial a(u) / \partial u^i$ и $b_\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial u^i \partial u^j} = \lambda \mu^{\alpha\beta} \omega_{\alpha,ij}(u) b_\beta(u), \quad \frac{\partial b_\alpha}{\partial u^i} = \rho \eta^{kj} \omega_{\alpha,ij}(u) \frac{\partial a}{\partial u^k}, \quad (3.10)$$

где η^{ij} , $1 \leq i, j \leq N$, и $\mu^{\alpha\beta}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq L$, – произвольные постоянные невырожденные симметричные матрицы, $\eta^{ij} = \eta^{ji}$, $\eta^{ij} = \text{const}$, $\det(\eta^{ij}) \neq 0$, $\mu^{\alpha\beta} = \text{const}$,

$\mu^{\alpha\beta} = \mu^{\beta\alpha}$, $\det \mu^{\alpha\beta} \neq 0$; очевидно, что при этом коэффициенты $\omega_{\alpha,ij}(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, должны быть симметричными матричными функциями, $\omega_{\alpha,ij}(u) = \omega_{\alpha,ji}(u)$; λ и ρ – произвольные константы (параметры).

Условия совместности для линейной системы (3.10) эквивалентны нелинейной системе (3.8), (3.9), описывающей класс N -мерных плоских подмногообразий без кручения в $(N + L)$ -мерных псевдоевклидовых пространствах. Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 a}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} &= \lambda \mu^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega_{\alpha,ij}}{\partial u^k} b_\beta(u) + \lambda \mu^{\alpha\beta} \omega_{\alpha,ij}(u) \frac{\partial b_\beta}{\partial u^k} = \\ &= \lambda \mu^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega_{\alpha,ij}}{\partial u^k} b_\beta(u) + \lambda \mu^{\alpha\beta} \omega_{\alpha,ij}(u) \rho \eta^{ls} \omega_{\beta,ks}(u) \frac{\partial a}{\partial u^l} = \\ &= \lambda \mu^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega_{\alpha,ik}}{\partial u^j} b_\beta(u) + \lambda \mu^{\alpha\beta} \omega_{\alpha,ik}(u) \rho \eta^{ls} \omega_{\beta,js}(u) \frac{\partial a}{\partial u^l}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

откуда получаем

$$\frac{\partial \omega_{\alpha,ij}(u)}{\partial u^k} = \frac{\partial \omega_{\alpha,ik}(u)}{\partial u^j} \quad (3.12)$$

и

$$\mu^{\alpha\beta} \omega_{\alpha,ij}(u) \omega_{\beta,ks}(u) = \mu^{\alpha\beta} \omega_{\alpha,ik}(u) \omega_{\beta,js}(u). \quad (3.13)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b_\alpha}{\partial u^i \partial u^l} &= \rho \eta^{kj} \frac{\partial \omega_{\alpha,ij}}{\partial u^l} \frac{\partial a}{\partial u^k} + \rho \eta^{kj} \omega_{\alpha,ij}(u) \frac{\partial^2 a}{\partial u^k \partial u^l} = \\ &= \rho \eta^{kj} \frac{\partial \omega_{\alpha,ij}}{\partial u^l} \frac{\partial a}{\partial u^k} + \rho \eta^{kj} \omega_{\alpha,ij}(u) \lambda \mu^{\gamma\beta} \omega_{\gamma,kl}(u) b_\beta(u) = \\ &= \rho \eta^{kj} \frac{\partial \omega_{\alpha,lj}}{\partial u^i} \frac{\partial a}{\partial u^k} + \rho \eta^{kj} \omega_{\alpha,lj}(u) \lambda \mu^{\gamma\beta} \omega_{\gamma,ki}(u) b_\beta(u), \end{aligned} \quad (3.14)$$

откуда имеем

$$\frac{\partial \omega_{\alpha,ij}}{\partial u^l} = \frac{\partial \omega_{\alpha,lj}}{\partial u^i} \quad (3.15)$$

и

$$\eta^{kj} \omega_{\alpha,ij}(u) \omega_{\gamma,kl}(u) = \eta^{kj} \omega_{\alpha,lj}(u) \omega_{\gamma,ki}(u). \quad (3.16)$$

Из (3.12) и (3.15) следует, что локально существуют некоторые функции $\psi_\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, такие, что

$$\omega_{\alpha,ij}(u) = \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial u^i \partial u^j}; \quad (3.17)$$

тогда соотношения (3.13) и (3.16) эквивалентны нелинейной системе (3.8), (3.9) для функций $\psi_\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$.

В произвольных локальных координатах мы получаем следующее интегрируемое описание всех N -мерных плоских подмногообразий без кручения в $(N + L)$ -мерных псевдоевклидовых пространствах.

ТЕОРЕМА 3.3. *Для каждого N -мерного плоского подмногообразия без кручения в $(N + L)$ -мерном псевдоевклидовом пространстве с плоской первой квадратичной формой $g_{ij}(u)$ локально существуют функции $\psi_\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, такие, что вторые квадратичные формы имеют вид*

$$(w_\alpha)_{ij}(u) = \nabla_i \nabla_j \psi_\alpha, \quad (3.18)$$

где ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования, определяемый связностью Леви-Чивита, порождаемой метрикой $g_{ij}(u)$. Класс N -мерных плоских подмногообразий без кручения в $(N + L)$ -мерных псевдоевклидовых пространствах описывается следующей интегрируемой системой нелинейных уравнений для функций $\psi_\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$:

$$\sum_{n=1}^N \nabla^n \nabla_i \psi_\alpha \nabla_n \nabla_l \psi_\beta = \sum_{n=1}^N \nabla^n \nabla_i \psi_\beta \nabla_n \nabla_l \psi_\alpha, \quad (3.19)$$

$$\sum_{\alpha=1}^L \sum_{\beta=1}^L \mu^{\alpha\beta} \nabla_i \nabla_j \psi_\alpha \nabla_k \nabla_l \psi_\beta = \sum_{\alpha=1}^L \sum_{\beta=1}^L \mu^{\alpha\beta} \nabla_i \nabla_k \psi_\alpha \nabla_j \nabla_l \psi_\beta, \quad (3.20)$$

где ∇_i – ковариантное дифференцирование, определяемое связностью Леви-Чивита, порождаемой плоской метрикой $g_{ij}(u)$, $\nabla^i = g^{is}(u) \nabla_s$, $g^{is}(u) g_{sj}(u) = \delta_j^i$. Более того, в этом случае системы гидродинамического типа

$$u_{t_\alpha}^i = (\nabla^i \nabla_j \psi_\alpha) u_x^j, \quad 1 \leq \alpha \leq L, \quad (3.21)$$

являются коммутирующими интегрируемыми бигамильтоновыми системами гидродинамического типа.

4. РЕДУКЦИЯ К УРАВНЕНИЯМ АССОЦИАТИВНОСТИ ДВУМЕРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ ТЕОРИЙ ПОЛЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ПЛОСКИМ ПОДМНОГООБРАЗИЯМ БЕЗ КРУЧЕНИЯ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Теперь мы найдем также некоторые естественные и очень важные интегрируемые редукции нелинейной системы (3.8), (3.9).

ТЕОРЕМА 4.1. Если взять $L = N$, $\mu^{ij} = c\eta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq N$, где c – произвольная ненулевая константа, и $\psi_\alpha(u) = \partial\Phi/\partial u^\alpha$, $1 \leq \alpha \leq N$, где $\Phi = \Phi(u^1, \dots, u^N)$, то уравнения Гаусса (3.8) совпадут с уравнениями Риччи (3.9), при этом и те, и другие уравнения совпадут с уравнениями ассоциативности двумерных топологических квантовых теорий поля для потенциала $\Phi(u)$:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \eta^{ij} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^m \partial u^k} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^j \partial u^n \partial u^l} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^m \partial u^l} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^j \partial u^n \partial u^k} \right) = 0. \quad (4.1)$$

ТЕОРЕМА 4.2. Уравнения ассоциативности двумерных топологических квантовых теорий поля описывают специальный класс N -мерных плоских подмногообразий без кручения в $2N$ -мерных псевдоевклидовых пространствах (класс потенциальных плоских подмногообразий без кручения).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Плоское N -мерное подмногообразие без кручения в $2N$ -мерном псевдоевклидовом пространстве с плоской первой квадратичной формой $g_{ij}(u) du^i du^j$ называется *потенциальным*, если локально всегда существует некоторая функция $\Phi(u)$ в окрестности на подмногообразии такая, что локально (в этой

окрестности) вторые квадратичные формы этого подмногообразия имеют вид

$$(\omega_i)_{jk}(u) du^j du^k = (\nabla_i \nabla_j \nabla_k \Phi(u)) du^j du^k, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4.2)$$

где ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования, определяемый связностью Леви-Чивита, порождаемой плоской метрикой $g_{ij}(u)$.

По теореме Бонне любое решение $\Phi(u)$ уравнений ассоциативности (4.1) (с соответствующей постоянной метрикой η_{ij}) определяет единственное (с точностью до движений) N -мерное потенциальное плоское подмногообразие без кручения в соответствующем $2N$ -мерном псевдоевклидовом пространстве с первой квадратичной формой $\eta_{ij} du^i du^j$ и вторыми квадратичными формами $\omega_n(u) = (\partial^3 \Phi / (\partial u^n \partial u^i \partial u^j)) du^i du^j$, задаваемыми третьими производными потенциала $\Phi(u)$. Мы здесь не различаем решения уравнений ассоциативности (4.1), отличающиеся на слагаемые, квадратичные по координатам u .

ТЕОРЕМА 4.3. *На каждом потенциальном плоском подмногообразии без кручения в псевдоевклидовом пространстве имеется структура фробениусовой алгебры, задаваемая (в плоских координатах) плоской первой квадратичной формой η_{ij} и операторами Вайнгартена $(A_s)_j^i(u) = -\eta^{ik}(\omega_s)_{kj}(u)$:*

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= \eta_{ij}, & e_i \circ e_j &= c_{ij}^k(u) e_k, & e_i &= \frac{\partial}{\partial u^i}, \\ c_{ij}^k(u^1, \dots, u^N) &= -(A_i)_j^k(u) = \eta^{ks}(\omega_i)_{sj}(u^1, \dots, u^N). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В произвольных локальных координатах эта фробениусова структура имеет вид

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= g_{ij}, & e_i \circ e_j &= c_{ij}^k(u) e_k, & e_i &= \frac{\partial}{\partial u^i}, \\ c_{ij}^k(u^1, \dots, u^N) &= -(A_i)_j^k(u) = g^{ks}(u^1, \dots, u^N)(\omega_i)_{sj}(u^1, \dots, u^N), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $g^{ij}(u)$ – контравариантная метрика, обратная первой квадратичной форме $g_{ij}(u)$, $g^{is}(u)g_{sj}(u) = \delta_j^i$; $(\omega_k)_{ij}(u) du^i du^j$, $1 \leq k \leq N$, – вторые квадратичные формы.

ТЕОРЕМА 4.4. *Каждое N -мерное фробениусово многообразие локально может быть представлено как потенциальное плоское N -мерное подмногообразие без кручения в $2N$ -мерном псевдоевклидовом пространстве. Это подмногообразие определяется однозначно с точностью до движений.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики Макса Планка (Бонн, Германия), Фонда содействия отечественной науке, РФФИ (грант №05-01-00170) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант №НШ-4182.2006.1).

Список литературы

- [1] B. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable Systems and Quantum Groups* (Montecatini Terme, Italy, 1993), Lect. Notes Math., **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 120–348; [hep-th/9407018](#).
- [2] О. И. Мохов, *Функц. анализ и его прилож.*, **40**:1 (2006), 14–29; [math.DG/0406292](#).