Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Палезе, Е. Уинтеррот, О соотношении между морфизмом Якоби и гессианом в калибровочно-естественных теориях поля, *ТМФ*, 2007, том 152, номер 2, 377–389

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6094>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 11:44:10

© 2007 г.

М. Палезе*, Е. Уинтеррот*

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ МОРФИЗМОМ ЯКОБИ И ГЕССИАНОМ В КАЛИБРОВОЧНО-ЕСТЕСТВЕННЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

Полученный Голдшмидтом и Стернбергом классический результат, связывающий морфизм Якоби с гессианом для теорий поля первого порядка, обобщается на калибровочно-естественные теории поля высшего порядка. В частности, определен обобщенный калибровочно-естественный морфизм Якоби, где вариационные векторные поля являются производными Ли сечений калибровочно-естественного расслоения по отношению к калибровочно-естественным подъемам инфинитезимальных главных автоморфизмов, и установлена связь с гессианом. Гессиан также очень просто связан с обобщенным морфизмом Бергманна–Бианки, ядро которого дает необходимое и достаточное условие существования глобальных канонических суперпотенциалов. Получено, что гамильтоновы уравнения для гамильтоновой связности, ассоциированной с соответствующим образом определенным ковариантным сильно сохраняющимся током, тождественно удовлетворяются; их можно интерпретировать как обобщенные тождества Бергманна–Бианки и, таким образом, охарактеризовать в терминах обращения гессиана в нуль.

Ключевые слова: струи, калибровочно-естественное расслоение, вторая вариационная производная, обобщенный морфизм Якоби.

1. ВВЕДЕНИЕ

Несколько формулировок исчисления вариаций на пространстве струй (см., например, работы [1]–[9]) были предложены с целью перевести этот важный аспект математики в область дифференциальной геометрии. Пространства струй в действительности задают естественный контекст для дифференциальных уравнений в дифференциальной геометрии. При такой формулировке оказывается, что дифференциальный оператор, преобразующий лагранжианы в выражения Эйлера–Лагранжа, является не чем иным, как пучковым морфизмом некоторой последовательности пучков [9]–[13], чем определяются два связанных контекста [14]: вариационные бикомплексы бесконечного порядка и вариационные последовательности Круппы конечного порядка. Подход, основанный на струях бесконечного порядка, является во

*Department of Mathematics, University of Torino, via C. Alberto 10, 10123 Torino, Italy.
E-mail: marcella.palese@unito.it, ekkehart.winterroth@unito.it

многих отношениях более простым и элегантным, поскольку сразу приводит к результатам, справедливым для любого порядка; рассматривающий конечные порядки подход применяется, когда важным может оказаться сохранение фиксированного порядка, и при этом существенна получающаяся полиномиальная структура вариационных объектов.

В рамках вариационных последовательностей конечного порядка мы характеризуем вторую вариацию калибровочно-естественного инвариантного лагранжиана произвольного порядка в общем случае n независимых переменных и m неизвестных функций и применяем полученный результат для специализации теорем Нётер и соответствующих сохраняющихся токов и суперпотенциалов. В работе [15] Бергманн ввел так называемые *обобщенные тождества Бианки* для геометрических теорий поля, что позволило получить (после интегрирования по частям) самосогласованное уравнение, включающее локальные дивергенции в первой вариационной формуле.

Хорошо известно, что согласно теории Нётер [16] в классической лагранжевой формулировке теорий поля описание симметрий и сохраняющихся величин состоит в выводе существования подходящих сохраняющихся токов из инвариантности лагранжиана; оказывается, что в наиболее актуальных физических теориях эти токи являются дивергенцией кососимметричных (тензорных) плотностей, которые называются *суперпотенциалами* для самих сохраняющихся токов. Также хорошо известно, что важность суперпотенциалов определяется возможностью их интегрирования с целью получения сохраняющихся величин, связанных с сохраняющимися токами через теорему Стокса (см., например, работы [17], [18] и ссылки в них). В рамках такой картины обобщенные тождества Бергманна–Бианки являются необходимым и локально достаточным условием для того, чтобы сохраняющиеся нётеровские токи не только были замкнутыми, но и являлись дивергенциями суперпотенциала вдоль решений уравнений Эйлера–Лагранжа. Однако существует проблема общей ковариантности таких тождеств; она уже была поставлена и частично исследована в работе [19], где изучалась инвариантность по отношению к преобразованиям временной координаты. Эта проблема, очевидно, отражается на ковариантности сохраняющихся величин.

В ряде работ [20]–[24] мы предложили подход к изучению задачи ковариантности сохраняющихся величин с использованием вариационных производных, взятых по отношению к обобщенным векторным полям, выбранным таким образом, что они представляют собой производные Ли сечений калибровочно-естественных расслоений, перенесенных путем калибровочно-естественных подъемов инфинитезимальных главных автоморфизмов. Такие производные можно подходящим образом интерпретировать как вертикальные дифференциалы [2], [25]. Хорошо известно, что вторая вариация лагранжиана определяется с точностью до полных дивергенций. Мы воспользуемся предыдущими результатами, касающимися второй вариационной производной и морфизма Якоби, полученными в работах [20]–[23], [25], и обобщим классический результат Голдшмидта и Стернберга, связывающий гессиан с морфизмом Якоби для теорий поля первого порядка, на *калибровочно-естественные* теории поля высшего порядка. Теорема 2 связывает морфизм Якоби с гессианом,

а теорема 3 определяет их связь с морфизмом Бергманна–Бианки. Мы воспроизводим и уточняем результаты, уже полученные для поля теорий высшего порядка в рамках “факторизованной” вариационной последовательности, где дивергенции были факторизованы априори [25].

В разделе 2 дается конструктивное определение калибровочно-естественных расслоений и указывается на некоторые важные свойства производной Ли сечений таких расслоений (предполагается, что они представляют физические поля). В разделе 3 мы напоминаем подход, основанный на вариационных последовательностях, представляем теоремы Нётер, вводим обобщенный калибровочно-естественный морфизм Якоби и связываем его с гессианом. В качестве следствия из структуры пучков в вариационной последовательности мы получаем, что калибровочно-естественная вторая вариация равна (с точностью до полных дивергенций) вертикальному дифференциалу морфизма Эйлера–Лагранжа. Таким образом, мы воспроизводим для калибровочно-естественных теорий поля высшего порядка хорошо известный (в случае первого порядка) факт, заключающийся в том, что вторая вариация совпадает с гессиановым морфизмом с точностью до полных дивергенций (см., например, работы [1], [26]). В разделе 4 мы характеризуем теоремы Нётер в случае калибровочно-естественных теорий и вводим морфизм Бергманна–Бианки. Как следствие второй теоремы Нётер, существует ковариантный сохраняющийся ток, связанный с лагранжианом, полученным с помощью свертки морфизма Эйлера–Лагранжа с определенным подходящим образом калибровочно-естественным векторным полем Якоби. Мы покажем, что гамильтоновы уравнения для соответствующей гамильтоновой связности (эквивалентные ядру морфизма Эйлера–Лагранжа упомянутого выше лагранжиана) тождественно удовлетворяются, и их можно подходящим образом интерпретировать как обобщенные тождества Бергманна–Бианки и, таким образом, охарактеризовать в терминах обращения в нуль гессиана.

2. СТРУИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА КАЛИБРОВОЧНО-ЕСТЕСТВЕННЫХ РАССЛОЕНИЙ

Напомним некоторые основные факты о пространстве струй [3], [8]. Мы работаем с расслоенным многообразием $\pi: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$, где $\dim \mathbf{X} = n$ и $\dim \mathbf{Y} = n + m$.

Для целых $s \geq q \geq 0$ мы имеем дело с пространством s -струй $J_s \mathbf{Y}$ s -струйных продолжений (локальных) сечений многообразия π ; в частности, положим $J_0 \mathbf{Y} \equiv \mathbf{Y}$. Напомним естественные слоения $\pi_q^s: J_s \mathbf{Y} \rightarrow J_q \mathbf{Y}$, $s \geq q$, $\pi^s: J_s \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$, и среди них *аффинные* слоения π_{s-1}^s . Обозначим через $V\mathbf{Y}$ векторное подрасслоение касательного расслоения $T\mathbf{Y}$ векторов на $\mathbf{Y}$, вертикальных относительно слоения π .

Греческие индексы $\sigma, \mu, \dots$ пробегают значения от 1 до n и обозначают координаты на базе, а латинские индексы $i, j, \dots$ пробегают значения от 1 до m и обозначают координаты в слое, если не оговорено другое. Обозначим мультииндексы размерности n жирными греческими буквами так, что $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $0 \leq \alpha_\mu$, $\mu = 1, \dots, n$; злоупотребляя обозначениями, обозначим через σ мультииндекс такой, что $\alpha_\mu = 0$, если $\mu \neq \sigma$, и $\alpha_\mu = 1$, если $\mu = \sigma$. Кроме того, положим

$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ и $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$. Карты, индуцированные на $J_s \mathbf{Y}$, обозначим как (x^σ, y_α^i) , где $0 \leq |\alpha| \leq s$; в частности, положим $y_0^i \equiv y^i$. Локальные векторные поля и формы $J_s \mathbf{Y}$, индуцированные перечисленными выше координатами, обозначим соответственно как (∂_i^α) и (d_α^i) .

Для $s \geq 1$ рассмотрим следующее естественное расщепление, индуцированное естественной контактной структурой на расслоениях струй:

$$J_s \mathbf{Y} \times_{J_{s-1} \mathbf{Y}} T^* J_{s-1} \mathbf{Y} = (J_s \mathbf{Y} \times_{J_{s-1} \mathbf{Y}} T^* \mathbf{X}) \oplus \mathcal{C}_{s-1}^*[\mathbf{Y}], \quad (1)$$

где $\mathcal{C}_{s-1}^*[\mathbf{Y}] := \text{im } \vartheta_s^* \text{ и } \vartheta_s^* : J_s \mathbf{Y} \times_{J_{s-1} \mathbf{Y}} V^* J_{s-1} \mathbf{Y} \rightarrow J_s \mathbf{Y} \times_{J_{s-1} \mathbf{Y}} T^* J_{s-1} \mathbf{Y}$.

Если $f : J_s \mathbf{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, то полагаем $D_\sigma f := \mathcal{D}_\sigma f$, $D_{\alpha+\sigma} f := D_\sigma D_\alpha f$, где D_σ – стандартная *полная производная*. Для заданного векторного поля $\Xi : J_s \mathbf{Y} \rightarrow TJ_s \mathbf{Y}$ расщепление (1) дает $\Xi \circ \pi_s^{s+1} = \Xi_H + \Xi_V$. Мы будем называть Ξ_H и Ξ_V соответственно горизонтальной и вертикальной частями Ξ .

Расщепление (1) также индуцирует разложение внешнего дифференциала на $\mathbf{Y}$, $(\pi_{s-1}^s)^* \circ d = d_H + d_V$, где d_H и d_V определяются как *горизонтальный* и *вертикальный дифференциалы*. Действие d_H и d_V на функции и 1-формы на $J_s \mathbf{Y}$ однозначно определяет d_H и d_V (подробности см., например, в работах [8], [27]). Такие разложения всегда повышают порядок объектов.

2.1. Калибровочно-естественные расслоения. Пусть $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{X}$ – главное расслоение со структурной группой $\mathbf{G}$. Пусть $r \leq k$ – целое, а $\mathbf{W}^{(r,k)} \mathbf{P} := J_r \mathbf{P} \times_{\mathbf{X}} L_k(\mathbf{X})$, где $L_k(\mathbf{X})$ – расслоение k -реперов в $\mathbf{X}$ [3], [28], $\mathbf{W}_n^{(r,k)} \mathbf{G} := \mathbf{G}_n^r \odot GL_k(n)$ – *полупрямое* произведение по отношению к действию $GL_k(n)$ на $\mathbf{G}_n^r$, задаваемое композицией струй, а $GL_k(n)$ – группа k -реперов в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathbf{G}_n^r$ пространство (r, n) -скоростей на $\mathbf{G}$ [3]. Расслоение $\mathbf{W}^{(r,k)} \mathbf{P}$ представляет собой главное расслоение над $\mathbf{X}$ со структурной группой $\mathbf{W}_n^{(r,k)} \mathbf{G}$. Пусть $\mathbf{F}$ – любое многообразие, а $\zeta : \mathbf{W}_n^{(r,k)} \mathbf{G} \times \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ – левое действие $\mathbf{W}_n^{(r,k)} \mathbf{G}$ на $\mathbf{F}$. Имеется естественным образом определенное правое действие $\mathbf{W}_n^{(r,k)} \mathbf{G}$ на $\mathbf{W}^{(r,k)} \mathbf{P} \times \mathbf{F}$, так что с $\mathbf{W}^{(r,k)} \mathbf{P}$ можно стандартным образом ассоциировать расслоение $\mathbf{Y}_\zeta := \mathbf{W}^{(r,k)} \mathbf{P} \times_\zeta \mathbf{F}$ с данной базой $\mathbf{X}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что $(\mathbf{Y}_\zeta, \mathbf{X}, \pi_\zeta; \mathbf{F}, \mathbf{G})$ является *калибровочно-естественным расслоением* порядка (r, k) , ассоциированным с главным расслоением $\mathbf{W}^{(r,k)} \mathbf{P}$ посредством левого действия ζ группы $\mathbf{W}^{(r,k)} \mathbf{G}$ на многообразии $\mathbf{F}$ [3], [28].

Иногда мы будем опускать нижний индекс ζ , так что все наши рассмотрения будут относиться к $\mathbf{Y}$ как к калибровочно-естественному расслоению, определенному выше.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Главный автоморфизм Φ расслоения $\mathbf{W}^{(r,k)} \mathbf{P}$ индуцирует автоморфизм калибровочно-естественного расслоения как

$$\Phi_\zeta : \mathbf{Y}_\zeta \rightarrow \mathbf{Y}_\zeta : [(j_r^x \gamma, j_k^0 t), \hat{f}]_\zeta \mapsto [\Phi(j_r^x \gamma, j_k^0 t), \hat{f}]_\zeta, \quad (2)$$

где $\hat{f} \in \mathbf{F}$ и $[\cdot, \cdot]_\zeta$ – класс эквивалентности, индуцированный действием ζ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Определим *векторное* расслоение над $\mathbf{X}$ правоинвариантных инфинитезимальных автоморфизмов расслоения $\mathbf{P}$, полагая $\mathcal{A} = T\mathbf{P}/\mathbf{G}$.

Также определим *векторное* расслоение над $\mathbf{X}$ правоинвариантных инфинитезимальных автоморфизмов расслоения $\mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{P}$, полагая $\mathcal{A}^{(r,k)} := T\mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{P}/\mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{G}$ ($r \leq k$).

ПРИМЕР. Ассоциированное расслоение $\mathbf{W}^{(1,1)}\mathbf{P} \times_\mu (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g})$, где μ – естественное действие $\mathbf{G}_n^1 \odot GL(n)$ над $(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g})$, представляет собой калибровочно-естественное расслоение порядка $(1, 1)$. Заданный автоморфизм главного расслоения $\mathbf{P}$ действует на $\mathbf{W}^{(1,1)}\mathbf{P} \times_\mu \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}$ посредством канонического действия группы $\text{Aut}(\mathbf{P})$. Глобальные сечения расслоения $\mathbf{W}^{(1,1)}\mathbf{P} \times_\mu (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с правоинвариантными инфинитезимальными автоморфизмами расслоения $\mathbf{P}$. Действительно, легко показать, что $\mathbf{W}^{(1,1)}\mathbf{P} \times_\mu (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g})$ есть *векторное* расслоение, и что имеет место изоморфизм $\mathbf{W}^{(1,1)}\mathbf{P} \times_\mu (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}) \simeq \mathcal{A}$.

Обозначим через $\mathcal{T}_\mathbf{X}$ и $\mathcal{A}^{(r,k)}$ соответственно пучок векторных полей на $\mathbf{X}$ и пучок правоинвариантных векторных полей на $\mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{P}$. Функториальное отображение $\mathfrak{G}$ определяется таким образом, что оно поднимает любой правоинвариантный локальный автоморфизм (Φ, ϕ) главного расслоения $\mathbf{W}^{(r,k)}\mathbf{P}$ до единственного локального автоморфизма (Φ_ζ, ϕ) ассоциированного расслоения $\mathbf{Y}_\zeta$. Его инфинитезимальная версия ассоциирует с любым $\bar{\Xi} \in \mathcal{A}^{(r,k)}$, проектируемым над $\xi \in \mathcal{T}_\mathbf{X}$, единственное *проектируемое* векторное поле $\hat{\Xi} := \mathfrak{G}(\bar{\Xi})$ на $\mathbf{Y}_\zeta$ – *калибровочно-естественный подъем* – следующим образом:

$$\mathfrak{G}: \mathbf{Y}_\zeta \times_{\mathbf{X}} \mathcal{A}^{(r,k)} \rightarrow T\mathbf{Y}_\zeta: (y, \bar{\Xi}) \mapsto \hat{\Xi}(y), \quad (3)$$

где для любого $y \in \mathbf{Y}_\zeta$ полагаем

$$\hat{\Xi}(y) = \frac{d}{dt} [(\Phi_{\zeta t})(y)]_{t=0},$$

а $\Phi_{\zeta t}$ обозначает (локальный) поток, соответствующий калибровочно-естественному подъему автоморфизма Φ_t .

Это отображение удовлетворяет следующим свойствам [3]:

- 1) $\mathfrak{G}$ линейно над $id_{\mathbf{Y}_\zeta}$;
- 2) $T\pi_\zeta \circ \mathfrak{G} = id_{T\mathbf{X}} \circ \bar{\pi}^{(r,k)}$, где $\bar{\pi}^{(r,k)}$ – естественная проекция $\mathbf{Y}_\zeta \times_{\mathbf{X}} \mathcal{A}^{(r,k)} \rightarrow T\mathbf{X}$;
- 3) для любой пары $(\bar{\Lambda}, \bar{\Xi}) \in \mathcal{A}^{(r,k)}$ имеем $\mathfrak{G}([\bar{\Lambda}, \bar{\Xi}]) = [\mathfrak{G}(\bar{\Lambda}), \mathfrak{G}(\bar{\Xi})]$;
- 4) имеем координатное выражение отображения $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{G} = d^\mu \otimes \partial_\mu + d_\nu^A \otimes (\mathcal{Z}_A^{i\nu} \partial_i) + d_\nu^\lambda \otimes (\mathcal{Z}_\nu^{i\lambda} \partial_i)$, где $0 < |\nu| < k$, $1 < |\lambda| < r$, а $\mathcal{Z}_A^{i\nu}$, $\mathcal{Z}_\nu^{i\lambda} \in C^\infty(\mathbf{Y}_\zeta)$ – подходящие функции, зависящие от расслоения.

2.2. Производные Ли сечений калибровочно-естественных расслоений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть γ – (локальное) сечение $\mathbf{Y}_\zeta$, $\bar{\Xi} \in \mathcal{A}^{(r,k)}$, а $\hat{\Xi}$ – его калибровочно-естественный подъем. Следуя книге [3], определим *обобщенную производную*

Ли сечения γ вдоль векторного поля $\widehat{\Xi}$ таким образом, что она является (локальным) сечением $\mathcal{L}_{\Xi}\gamma: \mathbf{X} \rightarrow V\mathbf{Y}_{\zeta}$, задаваемым выражением $\mathcal{L}_{\Xi}\gamma = T\gamma \circ \xi - \widehat{\Xi} \circ \gamma$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оператор производной Ли, действующий на сечениях калибровочно-естественных расслоений, удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) он является гомоморфизмом алгебр Ли;
- 2) для любого векторного поля $\Xi \in \mathcal{A}^{(r,k)}$ отображение $\gamma \mapsto \mathcal{L}_{\Xi}\gamma$ есть квазилинейный дифференциальный оператор первого порядка;
- 3) для любого локального сечения γ расслоения $\mathbf{Y}_{\zeta}$ отображение $\Xi \mapsto \mathcal{L}_{\Xi}\gamma$ является линейным дифференциальным оператором;
- 4) можно рассматривать $\mathcal{L}_{\Xi}: J_1\mathbf{Y}_{\zeta} \rightarrow V\mathbf{Y}_{\zeta}$ как морфизм над базой $\mathbf{X}$. Используя канонические изоморфизмы $VJ_s\mathbf{Y}_{\zeta} \simeq J_sV\mathbf{Y}_{\zeta}$ для всех s , имеем $\mathcal{L}_{\Xi}[j_s\gamma] = j_s[\mathcal{L}_{\Xi}\gamma]$ для любого (локального) сечения γ расслоения $\mathbf{Y}_{\zeta}$ и для любого (локального) векторного поля $\Xi \in \mathcal{A}^{(r,k)}$. Более того, для калибровочно-естественных подъемов выполнено фундаментальное соотношение

$$\widehat{\Xi}_V := \mathfrak{G}(\Xi)_V = -\mathcal{L}_{\Xi}. \quad (4)$$

3. ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ТЕОРЕМЫ НЁТЕР

Для $s \geq 0$ рассмотрим стандартные пучки Λ_s^p p -форм на $J_s\mathbf{Y}$. При $0 \leq q \leq s$ рассмотрим пучки $\mathcal{H}_{(s,q)}^p$ и $\mathcal{H}_s^p$ *горизонтальных форм* относительно соответствующих проекций π_q^s и π_0^s . При $0 \leq q < s$ рассмотрим подпучки $\mathcal{C}_{(s,q)}^p \subset \mathcal{H}_{(s,q)}^p$ и $\mathcal{C}_s^p \subset \mathcal{C}_{(s+1,s)}^p$ *контактных форм*, т.е. горизонтальных форм со значениями в $\mathcal{C}_s^*[\mathbf{Y}]$ (они имеют свойство обращаться в нуль вдоль любого сечения калибровочно-естественного расслоения).

Пусть $\alpha \in \mathcal{C}_s^1 \wedge \mathcal{H}_{s+1}^{n,h}$. Тогда имеется единственная пара пучковых морфизмов [27], [29], [30]

$$E_{\alpha} \in \mathcal{C}_{(2s,0)}^1 \wedge \mathcal{H}_{2s+1}^{n,h}, \quad F_{\alpha} \in \mathcal{C}_{(2s,s)}^1 \wedge \mathcal{H}_{2s+1}^{n,h} \quad (5)$$

такая, что $(\pi_{s+1}^{2s+1})^*\alpha = E_{\alpha} - F_{\alpha}$, а F_{α} локально имеют вид $F_{\alpha} = d_{\mathbf{H}}p_{\alpha}$, где $p_{\alpha} \in \mathcal{C}_{(2s-1,s-1)}^1 \wedge \mathcal{H}^{n-1}_{2s}$.

Теперь введем фундаментальный (для наших собственных нужд) морфизм, обозначаемый как K_{η} , который был предложен в работе [27] и затем изучался в работе [30].

Пусть $\eta \in \mathcal{C}_s^1 \wedge \mathcal{C}_{(s,0)}^1 \wedge \mathcal{H}_{s+1}^{n,h}$; тогда имеется единственный морфизм

$$K_{\eta} \in \mathcal{C}_{(2s,s)}^1 \otimes \mathcal{C}_{(2s,0)}^1 \wedge \mathcal{H}_{2s+1}^{n,h}$$

такой, что для всех $\Xi: \mathbf{Y} \rightarrow V\mathbf{Y}$, $E_{j_s\Xi}\eta = C_1^1(j_{2s}\Xi \otimes K_{\eta})$, где C_1^1 обозначает тензорную свертку на первом множителе, а $\lceil \cdot \rceil$ – внутреннее произведение [27], [30]. Более того, имеется единственная пара пучковых морфизмов

$$H_{\eta} \in \mathcal{C}_{(2s,s)}^1 \wedge \mathcal{C}_{(2s,0)}^1 \wedge \mathcal{H}_{2s+1}^{n,h}, \quad G_{\eta} \in \mathcal{C}_{(2s,s)}^2 \wedge \mathcal{H}_{2s+1}^{n,h} \quad (6)$$

такая, что $(\pi_{s+1}^{2s+1})^* \eta = H_\eta - G_\eta$, а $H_\eta = A(K_\eta)/2$, где A обозначает антисимметризацию. Более того, G_η локально дается выражением типа $G_\eta = d_H q_\eta$, где $q_\eta \in \mathcal{C}_{(2s-1, s-1)}^2 \wedge \mathcal{H}^{n-1}_{2s}$; поэтому $[\eta] = [H_\eta]$ [27], [30].

Согласно работам [27], [31] расслоенное расщепление (1) дает *расщепление пучков* $\mathcal{H}_{(s+1, s)}^p = \bigoplus_{t=0}^p \mathcal{C}_{(s+1, s)}^{p-t} \wedge \mathcal{H}_{s+1}^t$, которое сужается до включения $\Lambda_s^p \subset \bigoplus_{t=0}^p \mathcal{C}_{s+1}^{p-t} \wedge \mathcal{H}_{s+1}^{t, h}$, где $\mathcal{H}_{s+1}^{p, h} := h(\Lambda_s^p)$ при $0 < p \leq n$, а сюръективное отображение h определяется как сужение на Λ_s^p проекции указанного выше расщепления на нетривиальное слагаемое с наибольшим значением t . Обозначим через $d \ker h$ пучок, стандартным образом порожденный предпучком $d \ker h$. Положим $\Theta_s^* := \ker h + d \ker h$.

В работе [31] было доказано, что *вариационная последовательность s -го порядка*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_Y \longrightarrow \Lambda_s^0 \xrightarrow{\mathcal{E}_0} \Lambda_s^1 / \Theta_s^1 \xrightarrow{\mathcal{E}_1} \Lambda_s^2 / \Theta_s^2 \xrightarrow{\mathcal{E}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{E}_{I-1}} \Lambda_s^I / \Theta_s^I \xrightarrow{\mathcal{E}_I} \Lambda_s^{I+1} \xrightarrow{d} 0,$$

где целое I зависит от размерности слоев в Y [31], связанная с расслоенным многообразием $Y \rightarrow X$, дает точную резольвенту постоянного пучка $\mathbb{R}_Y$ над Y .

Для практических целей ограничимся рассмотрением введенной в работе [27] усеченной вариационной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_Y \longrightarrow \mathcal{V}_s^0 \xrightarrow{\mathcal{E}_0} \mathcal{V}_s^1 \xrightarrow{\mathcal{E}_1} \dots \xrightarrow{\mathcal{E}_n} \mathcal{V}_s^{n+1} \xrightarrow{\mathcal{E}_{n+1}} \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{V}_s^{n+1}) \xrightarrow{\mathcal{E}_{n+2}} 0,$$

где пучки $\mathcal{V}_s^p := \mathcal{C}_s^{p-n} \wedge \mathcal{H}_{s+1}^{n, h} / h(d \ker h)$ при $0 \leq p \leq n+2$ являются подходящими представлениями соответствующих фактор-пучков в вариационной последовательности посредством пучков сечений тензорных расслоений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Сечение $\lambda \in \mathcal{V}_s^n$ является в стандартной литературе просто лагранжианом порядка $(s+1)$. Более того, $\mathcal{E}_n(\lambda) \in \mathcal{V}_s^{n+1}$ совпадает со стандартным морфизмом Эйлера–Лагранжа высшего порядка, ассоциированным с λ . Пусть $\gamma \in \Lambda_s^{n+1}$. Морфизм $H_{hd\gamma} \equiv H_{[\mathcal{E}_{n+1}(\gamma)]}$, где квадратные скобки обозначают класс эквивалентности, называется *обобщенным морфизмом Гельмгольца*; его ядро совпадает с условиями Гельмгольца локальной вариационности. Интегрируя морфизм K_η по частям, получаем подходящее представление *обобщенного морфизма Якоби*, ассоциированного с λ [20], [21], [25].

Стандартная производная Ли расслоенных морфизмов по отношению к проектируемому векторному полю $j_s \Xi$ переходит на фактор в вариационной последовательности [32]. *Вариационная производная Ли* $\mathcal{L}_{j_s \Xi}$ действует на классах эквивалентности расслоенных морфизмов, являющихся сечениями фактор-пучков в вариационной последовательности. В частности, имеют место следующие два результата [32], которые мы по очевидным причинам называем первой и второй теоремами Нётер.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $[\alpha] = h(\alpha) \in \mathcal{V}_s^n$. Тогда имеем локально (с точностью до обратных образов)

$$\mathcal{L}_{j_s \Xi}(h(\alpha)) = \Xi_V \rfloor \mathcal{E}_n(h(\alpha)) + d_H(j_{2s} \Xi_V \rfloor p_{d_V h(\alpha)} + \xi \rfloor h(\alpha)).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha \in \Lambda_s^{n+1}$. Тогда имеем глобально (с точностью до обратных образов)

$$\mathcal{L}_{j_s \Xi}[\alpha] = \mathcal{E}_n(j_{s+1} \Xi_V] h(\alpha)) + C_1^1(j_s \Xi_V \otimes K_{hd\alpha}).$$

Заметим, что вторая теорема Нётер в том виде, как она сформулирована выше, представлена в терминах морфизма $K_{hd\alpha}$.

3.1. Сохраняющиеся нётеровские токи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $(\hat{\Xi}, \xi)$ – проектируемое векторное поле на $\mathbf{Y}_\zeta$. Пусть $\lambda \in \mathcal{V}_s^n$ – обобщенный лагранжиан. Будем говорить, что $\hat{\Xi}$ – симметрия лагранжиана λ , если $\mathcal{L}_{j_{s+1} \hat{\Xi}} \lambda = 0$. Будем говорить также, что λ – калибровочно-естественный инвариантный лагранжиан, если калибровочно-естественный подъем $(\hat{\Xi}, \xi)$ любого векторного поля $\bar{\Xi} \in \mathcal{A}^{(r,k)}$ является симметрией для λ , т.е. если $\mathcal{L}_{j_{s+1} \bar{\Xi}} \lambda = 0$. В этом случае проектируемое векторное поле $\hat{\Xi} \equiv \mathfrak{G}(\bar{\Xi})$ называется калибровочно-естественной симметрией лагранжиана λ .

Теоремы Нётер принимают весьма частный вид в случае калибровочно-естественных лагранжевых теорий поля (см., например, работы [17], [18]) из-за того, что обобщенная производная Ли сечений калибровочно-естественных расслоений имеет специальные свойства линейности, о которых мы напоминали в п. 2.2, и связана с вертикальной частью калибровочно-естественных подъемов посредством уравнения (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\lambda \in \mathcal{V}_s^n$ – калибровочно-естественный лагранжиан, а $(\hat{\Xi}, \xi)$ – калибровочно-естественная симметрия λ . Тогда $0 = -\mathcal{L}_{\bar{\Xi}}] \mathcal{E}_n(\lambda) + d_H(-j_s \mathcal{L}_{\bar{\Xi}}] p_{d_V} \lambda + \xi] \lambda)$. Предположим, что $(j_{2s+1} \sigma)^*(-\mathcal{L}_{\bar{\Xi}}] \mathcal{E}_n(\lambda)) = 0$. Тогда $(n-1)$ -форма $\epsilon = -j_s \mathcal{L}_{\bar{\Xi}}] p_{d_V} \lambda + \xi] \lambda$ удовлетворяет уравнению $d((j_{2s} \sigma)^*(\epsilon)) = 0$.

Если σ – критическое сечение для $\mathcal{E}_n(\lambda)$, т.е. $(j_{2s+1} \sigma)^* \mathcal{E}_n(\lambda) = 0$, то указанное уравнение допускает физическую интерпретацию в виде так называемого слабого закона сохранения для плотности, связанной с ϵ , а про соответствующий пучковый морфизм говорят, что он есть калибровочно-естественный слабо сохраняющийся ток.

3.2. Обобщенные калибровочно-естественные морфизмы Якоби. Пусть λ – лагранжиан, а $\hat{\Xi}_V$ – вариационное векторное поле. Положим $\chi(\lambda, \mathfrak{G}(\bar{\Xi})_V) := C_1^1(\hat{\Xi}_V \otimes K_{hd\mathcal{L}_{j_{2s+1} \bar{\Xi}_V} \lambda}) \equiv E_{j_s \hat{\Xi}_V] hd\mathcal{L}_{j_{2s+1} \bar{\Xi}_V} \lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем называть морфизм $\mathcal{J}(\lambda, \mathfrak{G}(\bar{\Xi})_V) := E_{\chi(\lambda, \mathfrak{G}(\bar{\Xi})_V)}$ калибровочно-естественным обобщенным морфизмом Якоби, ассоциированным с лагранжианом λ и вариационным векторным полем $\mathfrak{G}(\bar{\Xi})_V$.

Морфизм $\mathcal{J}(\lambda, \mathfrak{G}(\bar{\Xi})_V)$ является линейным морфизмом по отношению к проекции $J_{4s} \mathbf{Y}_\zeta \times_V J_{4s} \mathcal{A}^{(r,k)} \rightarrow J_{4s} \mathbf{Y}_\zeta$.

Пусть $\alpha: J_s \mathbf{Y} \rightarrow \wedge^p T^* J_s \mathbf{Y}$ и пусть $L_{j_s \Xi_k}$ – оператор производной Ли, действующий на дифференциальный расслоенный морфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $\alpha \in (\mathcal{V}_s^n)_{\mathbf{Y}}$ и $\mathcal{L}_{\Xi_i}$ – оператор *вариационной производной Ли* [32] по вариационному векторному полю Ξ_i . Определим оператор i -й вариационной производной следующим образом: $\delta^i[\alpha] := [\delta^i\alpha] = [L_{\Xi_i} \dots L_{\Xi_1}\alpha] = \mathcal{L}_{\Xi_i} \dots \mathcal{L}_{\Xi_1}[\alpha]$.

Мы можем следующим образом охарактеризовать гессиан для калибровочно-естественных инвариантных лагранжевых теорий поля в терминах второй вариационной производной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Определим морфизм

$$\mathfrak{H}(\lambda, \mathfrak{G}(\bar{\Xi})_{\mathbf{V}}) = \mathfrak{G}(\bar{\Xi})_{\mathbf{V}} \rfloor \mathcal{E}_n(\mathfrak{G}(\bar{\Xi})_{\mathbf{V}} \rfloor \mathcal{E}_n(\lambda))$$

– *гессианов морфизм*, связанный с λ и вариационным векторным полем $\mathfrak{G}(\bar{\Xi})_{\mathbf{V}}$ (см. также работы [25] и, в частности, [1] по поводу определения гессианова морфизма для теорий поля первого порядка).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\delta_{\mathfrak{G}}^2\lambda := \mathcal{L}_{\mathfrak{G}(\bar{\Xi})_{\mathbf{V}}} \mathcal{L}_{\mathfrak{G}(\bar{\Xi})_{\mathbf{V}}} \lambda$ – *вторая вариационная производная лагранжиана λ по вертикальным частям калибровочно-естественных подъёмов инфинитезимальных главных автоморфизмов*. Тогда

$$\mathfrak{H}(\lambda, \mathfrak{G}(\bar{\Xi})_{\mathbf{V}}) = \delta_{\mathfrak{G}}^2\lambda. \quad (7)$$

Действительно,

$$\mathcal{J}(\lambda, \mathfrak{G}(\bar{\Xi})_{\mathbf{V}}) = \mathcal{E}_n(\mathfrak{G}(\bar{\Xi})_{\mathbf{V}} \rfloor h(d\delta\lambda)) = \mathfrak{G}(\bar{\Xi})_{\mathbf{V}} \rfloor \mathcal{E}_n(\mathfrak{G}(\bar{\Xi})_{\mathbf{V}} \rfloor \mathcal{E}_n(\lambda)), \quad (8)$$

что можно получить немедленно вследствие того, что $\delta_{\mathfrak{G}}^2\lambda = \mathcal{J}(\lambda, \mathfrak{G}(\bar{\Xi})_{\mathbf{V}})$, где вторая вариационная производная и обобщенный морфизм Якоби рассматриваются как классы эквивалентности, являющиеся сечениями пучка $(\mathcal{V}_s^n)_{\mathbf{Y}_{\zeta} \times_{\mathbf{Y}_{\zeta}} \mathbf{V}_{\mathbf{Y}_{\zeta}}}$, а горизонтальные дифференциальные контактные формы высших порядков переходят на фактор.

Этот результат обобщает классический результат Голдшмидта и Стернберга [1], связывающий гессиан с морфизмом Якоби для теорий поля первого порядка; кроме того, калибровочно-естественная структура рассматриваемых здесь теорий позволяет определить *обобщенный калибровочно-естественный морфизм Якоби*, где *вариационные векторные поля* являются производными Ли сечений калибровочно-естественного расслоения по отношению к калибровочно-естественным подъемам.

4. МОРФИЗМ БЕРГМАННА–БИАНКИ

Рассмотрим теперь член $\omega(\lambda, \mathfrak{G}(\bar{\Xi})_{\mathbf{V}}) := -\mathcal{L}_{\bar{\Xi}} \rfloor \mathcal{E}_n(\lambda)$, появляющийся в формулировке первой теоремы Нётер, приведенной в предложении 1. Подчеркнем, что в общем случае такой член не обращается в нуль вдоль сечений, не являющихся критическими. Путем манипуляций с этим членом ниже мы выведем – при точно определенных условиях – сильно сохраняющиеся токи, т.е. токи, также удовлетворяющие нётеровскому закону сохранения вдоль некритических сечений, рассмотренных впервые в работе [15].

Действительно, следуя в основном процедуре, предложенной в работе [15], можно проинтегрировать $\omega(\lambda, \mathfrak{G}(\Xi)_V)$ по частям и таким образом определить *обобщенный морфизм Бергманна–Бианки* с точностью до горизонтальных дифференциалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Будем называть глобальный морфизм $\beta(\lambda, \mathfrak{G}(\Xi)_V) := E_{\omega(\lambda, \mathfrak{G}(\Xi)_V)}$ *обобщенным морфизмом Бергманна–Бианки*, ассоциированным с лагранжианом λ и вариационным векторным полем $\mathfrak{G}(\Xi)_V$.

Координатные выражения для морфизмов $\beta(\lambda, \mathfrak{G}(\Xi)_V)$ можно получить с помощью обратной процедуры (см., например, работу [29]). Заметим, в частности, что $\beta(\lambda, \mathfrak{G}(\Xi)_V)$ есть не что иное, как морфизм Эйлера–Лагранжа, ассоциированный с *новым* лагранжианом $\omega(\lambda, \mathfrak{G}(\Xi)_V)$, определенным на расслоенном многообразии $J_{2s} \mathbf{Y}_\zeta \times_V J_{2s} \mathcal{A}^{(r,k)}_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbf{X}$; при этом $\mathfrak{G}(\Xi)_V \lceil \beta(\lambda, \mathfrak{G}(\Xi)_V)$ в точности является гессианом $\mathfrak{H}(\lambda, \mathfrak{G}(\Xi)_V)$, связанным с λ .

Пусть $\mathfrak{K}$ – *ядро* обобщенного калибровочно-естественного морфизма $\mathcal{J}(\lambda, \mathfrak{G}(\Xi)_V)$. В работе [20] мы доказали следующую фундаментальную теорему, которая в общем случае играет существенную роль для характеристики канонических ковариантных сохраняющихся нётеровских токов и, в частности, для доказательства теоремы 4 настоящей работы.

ТЕОРЕМА 3. *Обобщенный морфизм Бергманна–Бианки глобально обращается в нуль, если и только если $\delta_{\mathfrak{G}}^2 \lambda \equiv \mathcal{J}(\lambda, \mathfrak{G}(\Xi)_V) = 0$, т.е. если и только если $\mathfrak{G}(\Xi)_V \in \mathfrak{K}$.*

Пусть теперь $\lambda \in \mathcal{V}_s^n$ – калибровочно-естественный лагранжиан, а $j_s \hat{\Xi}$ – его калибровочно-естественная симметрия, так что $j_s \hat{\Xi}_V \in \mathfrak{K}$. Пусть D_H – внешний дифференциал на расширенном пространстве $J_{2s} \mathbf{Y}_\zeta \times_V J_{2s} \mathcal{A}^{(r,k)}_{\mathbf{X}}$. При $\beta(\lambda, \mathfrak{K}) \equiv 0$ глобально имеем $\omega(\lambda, \mathfrak{K}) = D_H \epsilon(\lambda, \mathfrak{K})$; тогда из первой теоремы Нётер получаем $D_H(\epsilon(\lambda, \mathfrak{K}) - \tilde{\epsilon}(\lambda, \mathfrak{K})) = 0$, что является так называемым калибровочно-естественным “сильным” законом сохранения для *глобальной канонической плотности* $\epsilon(\lambda, \mathfrak{K}) - \tilde{\epsilon}(\lambda, \mathfrak{K})$. Тогда существует *канонический* глобальный морфизм пучков $\nu(\lambda, \mathfrak{K}) \in (\mathcal{V}_{2s-1}^{n-2})_{\mathbf{Y}_\zeta \times \mathfrak{K}}$, так что $D_H \nu(\lambda, \mathfrak{K}) = \epsilon(\lambda, \mathfrak{K}) - \tilde{\epsilon}(\lambda, \mathfrak{K})$. В силу точности вариационной последовательности существование локального суперпотенциала можно вывести как сечение пучка $(\mathcal{V}_{2s-1}^{n-2})_{\mathbf{Y}_\zeta \times \mathcal{A}^{(r,k)}_{\mathbf{X}}}$. Для физики оказывается существенным, что наш подход дает глобальные сечения *редуцированного* пучка $(\mathcal{V}_{2s-1}^{n-2})_{\mathbf{Y}_\zeta \times \mathfrak{K}}$ без фиксирования какой бы то ни было связности априори. Мы имеем в виду *канонические* ковариантные токи или соответствующие суперпотенциалы при их сужении на $\mathfrak{K}$.

Как актуальное следствие приведенных выше результатов, видим, что необходимое и достаточное условие того, чтобы калибровочно-естественная симметрия $\hat{\Xi}$ лагранжиана была генератором канонического ковариантного сильно сохраняющегося тока, состоит в том, что производная Ли сечений калибровочно-естественных расслоений $\mathcal{L}_{\hat{\Xi}}$ должна удовлетворять инвариантным обобщенным уравнениям Якоби (ср. с работой [33]).

Гамильтоновы уравнения, эквивалентные обобщенным уравнениям Якоби. Как хорошо известно, вторая теорема Нётер имеет дело со свойствами инвариантности уравнений Эйлера–Лагранжа (так называемыми обобщенными симметриями, или симметриями Бесселя–Хагена, см., например, фундаментальную работу [34]). Хотя симметрии лагранжиана оказываются также симметриями морфизма Эйлера–Лагранжа, обратное, вообще говоря, неверно. Симметрии морфизма Эйлера–Лагранжа, однако, четко связаны со свойствами инвариантности, которыми обладает $\omega(\lambda, \mathfrak{G}(\Xi)_V) := -\mathcal{L}_{\Xi} \mathcal{E}_n(\lambda)$. Рассмотрим нётеровский закон сохранения, связанный с индуцированными свойствами инвариантности $\omega(\lambda, \mathfrak{G}(\Xi)_V)$ (см. также работу [22]).

Заметим, что для всякой симметрии $\Xi \in \mathcal{A}^{(r,k)}$ такой, что $\Xi_V \in \mathfrak{K}$, имеем

$$\mathcal{L}_{j_s \Xi_H} \omega(\lambda, \mathfrak{K}) = -D_H(-j_s \mathcal{L}_{\Xi_V} \rfloor p_{D_V \omega(\lambda, \mathfrak{K})}).$$

Более того, можно утверждать, что $\omega(\lambda, \mathfrak{K})$ обладает свойством естественности, дающим некоторую дополнительную информацию о гамильтоновой структуре калибровочно-естественных теорий поля. Пусть $\Xi_V \in \mathfrak{K}$. Имеем $\mathcal{L}_{j_s \Xi_H} \omega(\lambda, \mathfrak{K}) = 0$. Следовательно, для любого $\mathfrak{G}(\Xi)_H$ получаем существование обобщенного сохраняющегося нётеровского тока (который можно было бы интерпретировать как *обобщенный тензор энергии-импульса* для $\omega(\lambda, \mathfrak{K})$). Таким образом, если положить $\Xi_V \in \mathfrak{K}$, то получим *ковариантный* закон сохранения

$$D_H(-j_s \mathcal{L}_{\Xi_V} \rfloor p_{D_V \omega(\lambda, \mathfrak{K})}) = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Определим ковариантную n -форму

$$\mathcal{H}(\lambda, \mathfrak{K}) = -j_s \mathcal{L} \rfloor p_{D_V \omega(\lambda, \mathfrak{K})} \quad (9)$$

как гамильтонову форму для $\omega(\lambda, \mathfrak{K})$ на лежандровом расслоении $\Pi \equiv V^*(J_{2s} \mathbf{Y}_\zeta \times_{\mathbf{X}} V J_{2s} \mathcal{A}^{(r,k)}) \wedge (\wedge^{n-1} T^* \mathbf{X})$.

Пусть Ω – мультисимплектическая форма на Π . Рассмотрим однородное лежандрово расслоение $\mathbf{Z} \doteq T^*(J_{2s}(\mathbf{Y}_\zeta \times_{\mathbf{X}} V \mathcal{A}^{(r,k)})) \wedge \wedge^{n-1} T^* \mathbf{X}$, снабженное обычной мультисимплектической формой. Хорошо известно, что любое сечение аффинного расслоения $\mathbf{Z} \rightarrow \Pi$ дает гамильтонову форму $\mathcal{H}$ на лежандровом расслоении Π с помощью обратного образа канонической внешней n -формы $\psi_{J_{2s}(\mathbf{Y}_\zeta \times_{\mathbf{X}} V \mathcal{A}^{(r,k)})}$ такой, что $\Omega = d\psi$. Каждая связность на $J_{2s}(\mathbf{Y}_\zeta \times_{\mathbf{X}} V \mathcal{A}^{(r,k)})$ определяет гамильтонову форму; обратно, каждая гамильтонова форма $\mathcal{H}$ допускает гамильтонову связность $\gamma_{\mathcal{H}}(\lambda, \mathfrak{K})$, для которой $\gamma_{\mathcal{H}}(\lambda, \mathfrak{K}) \rfloor \Omega = d\mathcal{H}(\lambda, \mathfrak{K})$. Пусть тогда $\gamma_{\mathcal{H}}(\lambda, \mathfrak{K})$ – соответствующая форма гамильтоновой связности [35]. Хорошо известно, что при $\dim \mathbf{X} > 1$ имеется, вообще говоря, множество гамильтоновых связностей $\gamma_{\mathcal{H}}$, зависящих от линейной связности на $\mathbf{X}$. В действительности гамильтонова связность $\gamma_{\mathcal{H}}(\lambda, \mathfrak{G}(\Xi)_V)$ зависит от импульса $p_{D_V \omega(\lambda, \mathfrak{K})}$. Тем не менее легко видеть, что при $\gamma_{\mathcal{H}}(\lambda, \mathfrak{K})$ горизонтальное распределение, индуцированное подъемом связности $\gamma(\xi)$, однозначно связано с $\mathcal{L}_{\Xi}$ согласно обобщенным уравнениям Якоби.

Приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4. *Для всех $\mathfrak{G}(\Xi)_V \in \mathfrak{K}$ уравнения Гамильтона для гамильтоновой формы связности $\gamma_H(\lambda, \mathfrak{K})$ совпадают с ядром обобщенного калибровочно-естественного морфизма Якоби.*

Для доказательства теоремы заметим, что уравнения Гамильтона для гамильтоновой связности $\gamma_H(\lambda, \mathfrak{K})$ (эквивалентные ядру морфизма Эйлера–Лагранжа для лагранжиана $\omega(\lambda, \mathfrak{K})$; см., например, книгу [35]) совпадают с $\mathfrak{K}$ в силу теоремы 3 и тем самым удовлетворяются тождественно. Обобщенные тождества Бергманна–Бианки появляются при этом как связи, обеспечивающие выполнение такой эквивалентности. Вследствие предложения 2 и теоремы 3 они также характеризуются обращением в нуль гессианова морфизма (см. также работу [1] для теорий поля первого порядка).

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке GNFM INdAM, MIUR (PRIN 2005) и Туринского университета.

Список литературы

- [1] H. Goldschmidt, S. Sternberg, *Ann. Inst. Fourier*, **23**:1 (1973), 203–267.
- [2] А. В. Бочаров, А. М. Вербовецкий, А. М. Виноградови др., *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, Факториал, М., 1997.
- [3] I. Kolář, P. W. Michor, J. Slovák, *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer, Berlin, 1993.
- [4] D. Krupka, “Some geometric aspects of variational problems in fibred manifolds”, *Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Purk. Brunensis, Physica*, **14**, J. E. Purkyně Univ., Brno, 1973, 1–65; [math-ph/0110005](#).
- [5] B. A. Kupersmidt, “Geometry of jet bundles and the structure of Lagrangian and Hamiltonian formalism”, *Geometric Methods in Mathematical Physics*, Proc. NSF-CBMS Conf. (Lowell, 1979), *Lect. Notes Math.*, **775**, eds. G. Kaiser, J. E. Marsden, Springer, Berlin, 1980, 162–218.
- [6] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd ed., *Grad. Texts in Math.*, **107**, Springer, New York, 1993.
- [7] R. S. Palais, *Foundations of Global Non-linear Analysis*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1968.
- [8] D. J. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, *London Math. Soc. Lect. Note Ser.*, **142**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [9] A. M. Vinogradov, *J. Math. Anal. Appl.*, **100**:1 (1984), 1–40; 41–129.
- [10] F. Takens, *J. Diff. Geom.*, **14** (1979), 543–562.
- [11] W. M. Tulczyjew, *Bull. Soc. Math. France*, **105** (1977), 419–431.
- [12] А. М. Виноградов, *ДАН СССР*, **236**:2 (1977), 284–287.
- [13] А. М. Виноградов, *ДАН СССР*, **238**:5 (1978), 1028–1031.
- [14] R. Vitolo, *Diff. Geom. Appl.*, **10**:3 (1999), 225–255.
- [15] P. G. Bergmann, *Phys. Rev.*, **75** (1949), 680–685.
- [16] Э. Нётер, “Инвариантные вариационные задачи”, *Вариационные принципы механики*, Физматлит, М., 1959, 604–630.
- [17] L. Fatibene, M. Francaviglia, M. Palese, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **130** (2001), 555–569.
- [18] P. Matteucci, *Rep. Math. Phys.*, **52**:1 (2003), 115–139.

- [19] J. L. Anderson, P. G. Bergmann, *Phys. Rev.*, **83**:5 (1951), 1018–1025.
- [20] M. Palese, E. Winterroth, *Arch. Math. (Brno)*, **41**:3 (2005), 289–310.
- [21] M. Palese, E. Winterroth, *Rep. Math. Phys.*, **54**:3 (2004), 349–364.
- [22] M. Francaviglia, M. Palese, E. Winterroth, *Rep. Math. Phys.*, **56**:1 (2005), 11–22; [math-ph/0407054](#).
- [23] M. Francaviglia, M. Palese, E. Winterroth, “Second variational derivative of gauge-natural invariant Lagrangians and conservation laws”, *Differential Geometry and its Applications*, Proc. IX Int. Conf. (Prague, Czech Republic, 2004), eds. J. Bures et al., Matfyzpress, Prague, 2005, 591–604.
- [24] M. Palese, E. Winterroth, “Gauge-natural field theories and Noether theorems: canonical covariant conserved currents”, *Geometry and Physics* (Srni, CZ, 2005), Rend. Circ. Mat., Palermo, 2006, 161–174.
- [25] M. Francaviglia, M. Palese, R. Vitolo, *Diff. Geom. Appl.*, **22**:1 (2005), 105–120.
- [26] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of Variations. Vol. I. The Lagrangian Formalism*, Grundlehren Math. Wiss., **310**, Springer, Berlin, 1996.
- [27] R. Vitolo, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **125**:1 (1999), 321–333.
- [28] D. J. Eck, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **33**:247 (1981), 1–48.
- [29] I. Kolář, *J. Geom. Phys.*, **1**:2 (1984), 127–137.
- [30] I. Kolář, R. Vitolo, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **135**:2 (2003), 277–290.
- [31] D. Krupka, “Variational sequences on finite order jet spaces”, *Differential Geometry and its Applications* (Brno, Czechoslovakia, 1989), eds. J. Janyška, D. Krupka, World Scientific, Singapore, 1990, 236–254.
- [32] M. Francaviglia, M. Palese, R. Vitolo, *Czechoslovak Math. J.*, **52(127)**:1 (2002), 197–213.
- [33] M. Godina, P. Matteucci, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, **2** (2005), 159–188.
- [34] A. Trautman, *Commun. Math. Phys.*, **6** (1967), 248–261.
- [35] L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, *Connections in Classical and Quantum Field Theory*, World Scientific, Singapore, 2000.